Préliminaires

Introduction Les phénomènes étudiés en physique sont caractérisés par des variables d'espace, de temps et/ou des constantes universelles ou phénoménologiques. par des lois d'évolutions temporelles. Ainsi, une grandeur physique s'exprime toujours sous la forme d'une fonction mathématique : il est donc crucial de maîtriser un certain nombre d'opérations mathématiques pour gérer de telles fonctions et *in fine* les comprendre.

1 Remarques sur l'utilisation des notations

S'il n'y a pas de méthode unique et infaillible de résolution d'un problème en physique, on peut tout de même dégager quelques étapes-clés :

— **S'approprier le problème** : Faire un schéma, identifier les grandeurs physique pertinentes, les nommer. Distinguer dès cette étape, ce qui est une fonction connue à l'instant initial (les conditions initiales (CI), que l'on notera la plupart du temps indicées), des fonctions *a priori* variables au cours de l'évolution (dont on explicitera la plupart du temps la dépendance), et des paramètres qui seront constants au cours de l'évolution.

Exemple v_0 est une notation correcte pour une vitesse initiale. $v(t)$ est une notation correction pour une vitesse susceptible d'évoluer au cours d'un mouvement.

Exemple une solution à l'équation de propagation d'une onde sur une corde s'écrit : $e(M,t) = e_0 cos(\omega t - kx)$, qui est une fonction du temps t et de l'abscisse x, et qui met en jeu trois paramètres constants : l'amplitude e_0, la pulsation ω et le vecteur d'onde k.

— **Analyser le problème et le résoudre :** décomposer le problème ou le phénomène en somme de petits phénomènes. Pour chaque phénomène de base, **traduire ce phénomène en équation de base**. Il peut s'agir là d'écrire des lois cinématiques, géométriques, des définitions et le plus souvent de traduire les lois de la physique qui le décrivent. Travailler les expressions précédentes jusqu'à arriver à l'**expression littérale de la grandeur recherchée**. **Attention, ne JAMAIS mélanger raisonnement/expression littérale et application numérique. Après avoir obtenu l'expression littérale**, faire l'application numérique (AN).

Attention concernant l'application numérique, il est crucial d'utiliser un nombre correct de chiffres significatifs (CS). Beaucoup d'élèves recopient tel quel le résultat indiqué sur leur calculatrice, ce qui leur fait perdre des points. **C'est une consigne de correction commune à tous les concours : trop de chiffres significatifs → pas de point à la question.** D'autre part, à l'école polytechnique, la calculatrice est interdite ; il faut donc faire ses applications numériques à la main, avec un seul chiffre significatif.

— **Avoir un regard critique sur le résultat :** vérifier la pertinence du résultat, tant son homogénéité que son ordre de grandeur (ODG) (par comparaison avec un ODG de l'énoncé ou tiré d'une simulation numérique). Etudier qualitativement **les cas limites** et **la pertinence des dépendances.**

2 Analyse dimensionnelle

2.1 Unités et dimensions

A chaque grandeur physique est associé une intensité (ou mesure) repérée par un nombre mais aussi une unité qui en précise la nature. 7 unités ont été choisies (arbitrairement) pour être unités de base.

1: Definition

Toute situation physique peut être décrite par certaines propriétés comme la longueur, la vitesse, la surface etc. C'est ce qu'on appelle des **dimensions**. Les dimensions sont les propriétés que l'on peut mesurer.

Définition Les *unités* sont les éléments standardisés que l'on utilise pour quantifier ces dimensions. La dimension d'une grandeur physique représente donc sa nature physique et ne peut dépendre d'un choix particulier de système d'unités.

Exemple Ainsi, une grandeur qui a la dimension d'une longueur, c'est-à-dire qui est homogène à une longueur, peut s'exprimer en mètres, yards, angströms... et ce choix d'unité ne peut avoir d'influence sur la physique intrinsinque du phénomène.

Remarque Certaines grandeurs, bien qu'ayant une unité, sont sans dimension : ce sont en fait des nombres purs au sens mathémathique. C'est le cas du radian : un angle en radian est le rapport de deux longueur : c'est la longueur l de l'arc de cercle AB (correspondant à la portion de cercle de rayon R intercepté par les deux demi-droites qui délimite cet angle) divisé par R soit $\alpha = \frac{l}{R}$.

2.2 Homogénéité d'une expression

Ne réaliser l'application numérique que lorsque le calcul littéral est terminé **permet de juger l'homogénéité d'une formule** : une équation est homogène lorsque ses deux membres ont la même dimension. Il est ainsi possible de détecter les erreurs de calculs les plus importantes - les erreurs d'homogénéité :

1: Attention

Tout résultat non homogène est **nécessairement faux** (NH).

Remarque Cela ne veut pas dire que tout résultat homogène est juste.

2: Attention

- On ne peut additionner ou comparer que des termes qui ont la même la dimension.
- L'argument d'une fonction transcendante (sin, cos, exp, ln, etc.) est nécessairement *sans dimension*. Par exemple, si on obtient après les calculs un terme du type exp(kt), l'argument kt de l'exponentielle doit être un nombre sans dimension (si t est un temps, alors k doit être l'inverse d'un temps)
- La dimension du produit de deux grandeurs est le produit des dimensions de chacune des grandeurs.
- La dimension de A^r est égale à d^r, où r est un nombre sans dimension et d la dimension de A.
- Si on calcule la dérivée d'une grandeur G par rapport à une autre F, la dimension de la dérivée est le rapport des dimensions de G et de F.
- De même, si on intègre une grandeur G par rapport à une autre F, la primitive a pour dimension le produit des dimensions de G et de F.

Exemple Par exemple, lors du calcul d'une résistance équivalente dans un circuit électrique comportant des résistances de valeur R_1, R_2 et R_3, des élèves trouvent les formules suivantes. Identifier la ou les expression(s) qui a(ont) une chance d'être juste(s).

$$R_{eq} = \frac{R_3^2+2R_1R_2}{1+R_2},\ R_{eq} = \frac{R_3+2R_2}{R_1+R_2} \text{ et } R_{eq} = \frac{R_3^2+2R_1R_2}{R_1+R_2}$$

Exemples retrouver les dimensions de toutes les grandeurs dans les équations :

— Soit $z(t)$ l'altitude d'une masse m lancée verticalement à la vitesse v_0 dans le champ de pesanteur : $z(t) = \frac{-gt^2}{2} + v_0t + h$

— Soit le déplacement d'un chariot lors d'oscillations amorties : $x(t) = x_0e^{-\alpha t}cos(\omega t)$

3: Méthode

Pour déterminer l'homogénéité d'une grandeur, on peut écrire une ou des lois physiques faisant intervenir cette grandeur et d'autres grandeurs ayant des homogénéités connues ou accessibles par d'autres lois physiques.

Exemple Pour déterminer la dimension d'une énergie, on se rappelle que l'énergie cinétique d'une particule de masse m est donnée par : $E_C = \frac{1}{2}mv^2$ d'où $[E_C] = [m][v^2] = M.L^2.T^{-2}$. L'unité de l'énergie qui est le joule (J) est donc une unité dérivée correspondant à $1kg.m^2.s^{-2}$.

Gestion des graphes en physique

1 Tracé de fonctions

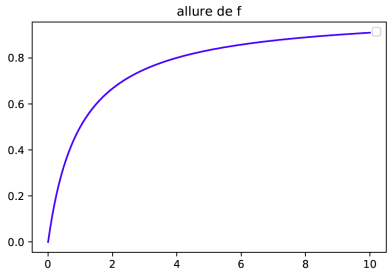
1.1 Généralités

L'allure d'une fonction donnée par un modèle théorique est une donnée importante, qu'il faut savoir obtenir sans calculatrice, simplement par analyse qualitative, afin de la confronter rapidement à une courbe expérimentale.

1: Méthode

On utilise :
- les allures des fonctions connues qui interviennent éventuellement dans la fonction étudiée.
- Le calcul des limites de la fonction en et en l'infini. les simplifications asymptotiques et les allures de ces simplifications.
- Il faut ainsi se poser les questions : d'où part la fonction ? Où va-t-elle ? Comment y va-t-elle ? En quel temps typique ?
- Pour les fonctions périodiques, on pourra affiner en déterminant la période de la fonction, ses valeurs maximale, minimale et moyenne.

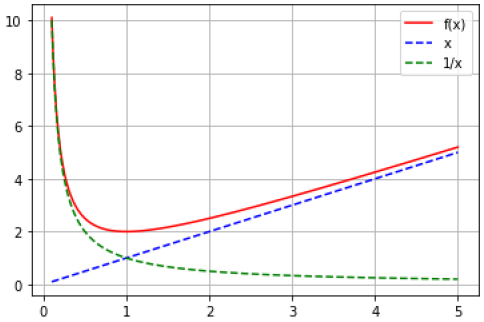
Exemple On cherche l'allure de la fonction $f(x) = \frac{x}{1+x}$
- D'où part cette fonction ? En $x = 0$, on a : $f(0) = 0$
- Où va-t-elle ? En $x \gg 1$, $f(x) \sim \frac{x}{x} = 1$
- En $x \ll 1$, $f(x) \sim \frac{x}{1} = x$.
- On a donc une fonction qui part de 0 et qui croît d'abord linéairement pour arriver en 1, ce qui laisse présager une allure figurée ci-contre.



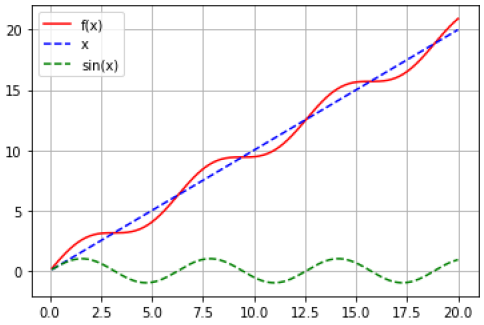
1.2 Tracé d'une somme, d'un produit

Dans le cas où la fonction s'écrit comme la somme de deux fonctions usuelles, il peut être utile de tracer les deux fonctions avant d'en déduire l'allure de la somme recherchée.

Exemple On cherche l'allure de la fonction $x \to f(x) = x + \frac{1}{x}$
- Quand $x \ll 1$, on a : $\frac{1}{x} \gg x$, donc la fonction f ressemble à $\frac{1}{x}$
- Quand $x \gg 1$, on a : $\frac{1}{x} \ll x$, donc la fonction f ressemble à x
- On peut ainsi en déduire l'allure de la fonction f pour toutes les valeurs de x.

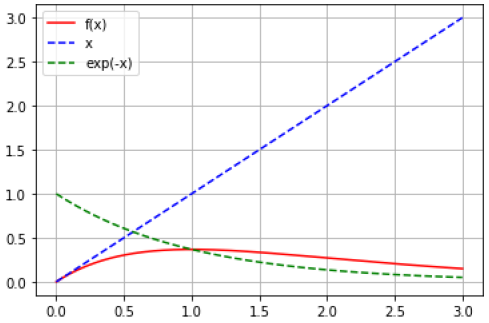


Exemple Déterminer l'allure de la fonction $x \rightarrow f(x) = x + sinx$

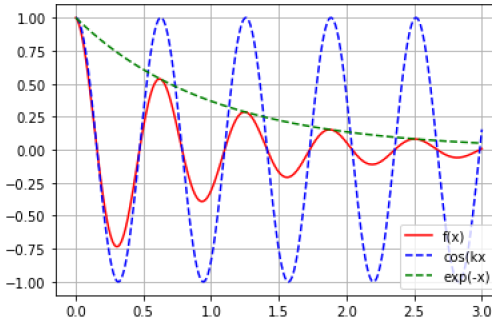


De même, quand la fonction s'écrit comme le produit de deux fonctions usuelles, il peut être utile de tracer les deux fonctions de base pour pouvoir prévoir "à la main" l'allure du produit des deux allures.

Exemple Déterminer l'allure de la fonction $x \rightarrow f(x) = xe^{-x}$



Exemple Déterminer l'allure de la fonction $x \rightarrow f(x) = e^{-x}cos(kx)$



2 Analyse d'une courbe expérimentale, extraction de données, modélisation

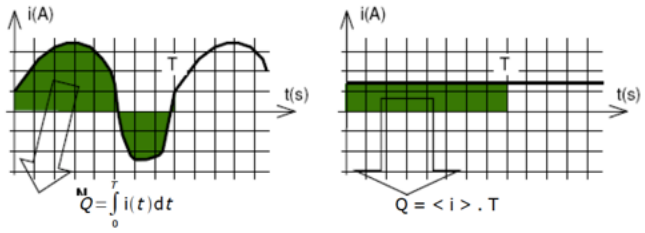
Inversement, il faut savoir extraire d'une courbe expérimentale ses grandeurs pertinentes en vue de les confronter à leurs valeurs théoriques.

2.1 Analyse qualitative

1: Définitions

Soit un signal $s(t)$. Quelques caractéristiques simples peuvent être dégagées sur ce signal :
- Sa valeur initiale, si elle existe : $s(t = 0)$
- Sa valeur asymptotique, si elle existe : $s(t = \infty)$
- Son type d'évolution : fonction croissante, décroissante, périodique...
- Son temps typique d'évolution τ, son intervalle d'évolution $[s_{min}, s_{max}]$, sa période...
- Sa valeur moyenne (ou composante continue), qui constitue sa modélisation la plus grossière (valeur de la fonction constante abritant la même aire que la courbe considérée, Cf. figure suivante) :

$$< s(t) >= \frac{1}{T_{int}} \int_0^{Tint} s(t)dt$$



2.2 Régression linéaire

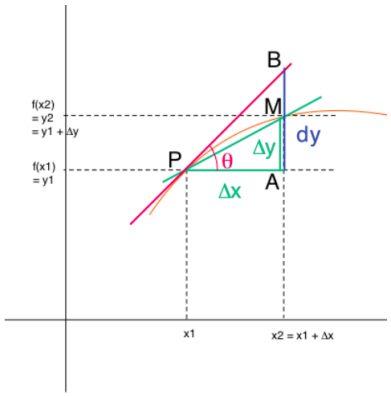
La confrontation d'une courbe expérimentale avec un modèle se fait souvent grâce à un modèle de courbe. La modélisation linéaire est de loin le plus fréquente ; la linéarisation fonde une partie de la physique : la physique linéaire.

2: Méthode

On modélise la courbe $f(x)$, au voisinage d'un point d'abscisse x_0 par sa tangente locale d'équation :

$$f(x) \simeq t(x) \ = \ f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

On procède par lecture graphique :
- $f(x_0)$ se lit directement sur le graphique.
- Pour $f'(x_0)$ on détermine la pente locale sur un intervalle pour lequel le modèle semble pertinent.



Remarque Cette linéarisation est le développement de Taylor le plus simple d'une fonction au voisinage d'un point quelconque. Si l'on pousse ce développement "un cran plus loin", on approxime cette fois la fonction par une parabole de même valeur, de même pente et de même courbure locale, d'équation :

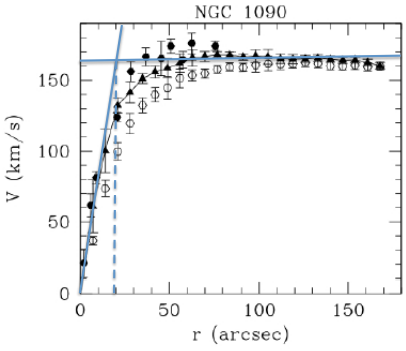
$$d_2(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0) + f''(x_0).(x - x_0)^2/2$$

2.3 Modélisation en exponentielle

3: Méthode

Pour de nombreux systèmes, la relaxation d'un des paramètres suit une évolution de la forme : $x(t) = ae^{-t/\tau} + b$
- Pour déterminer les paramètres a et b, il suffit d'étudier les valeurs en $t = 0$ et l'infini.
- Pour déterminer le temps typique d'évolution τ, il faut tracer l'asymptote en l'infini et la tangente initiale. Le temps τ correspond à l'abscisse d'intersection de ces deux droites.

Exemple On cherche à modéliser la courbe expérimentale suivante par une fonction de la forme : $v = a + be^{-\frac{r}{r_0}}$
- En $r = 0$, $v(r = 0) = 0 = a + b$ donc $b = -a$
- Pour déterminer a il suffit de prendre la limite quand r est grande : $v \sim a$. Sur le graphe, cela donne : $a = 160km/s$
- Pour r_0 on détermine sa valeur en utilisant la méthode de la tangente à l'origine : l'intersection entre la tangente à l'origine et l'asymptote correspond à $r_0 = 20arcsec$.
- Pour déterminer b, on utilise $b = -a$.



3 Exercices d'application

3.1 Tracé d'allures

Quelques fonctions Donner les allures des fonctions suivantes :
$h(x) = x.e^{-x}$; $m(x) = \frac{1}{x} + x$; $n(x) = x + sinx$; $z(x) = z_0 sin^2\left(2\pi\frac{x}{L}\right)$; $y(x) = \frac{x}{x+x_0}$; $z(x) = z_0 e^{-x/x_0} cos(kx)$; $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$; $h_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$; $h_2(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$; $h_3(x) = a(1 - cos(kx))$.

Dilatations Comparer les graphes de $sinx$, $ksinx$ et $sin(kx)$

Puissance débitée par une pile On peut montrer que la puissance débitée par une pile est de la forme : $P = E_0 i - Ri^2$, avec $i > 0$.
1 - Tracer l'allure de cette puissance.
2 - Déterminer la valeur de l'intensité qui maximise cette puissance et exprimer en fonction de E_0 et R la valeur de la puissance maximale.

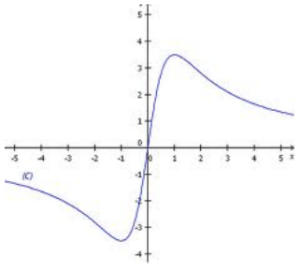
Mouvement d'un mobile Le mouvement d'un mobile de masse m se déplaçant sur un banc incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale et soumise à l'action d'aimants placés en bout de banc est repéré par la donnée de x, la distance instantané entre les aimants et le mobile. On peut construire une énergie potentielle $E_P(x) = \frac{k}{x^3} + mgxsin\alpha$
1 - Tracer l'allure de l'énergie potentielle.
2 - Exprimer la position x_0 du minimum local de cette fonction.

Charge d'un capteur capacitif La plupart des surfaces tactiles utilisent des capteurs capacitifs. La tension aux bornes d'un tel capteur, soumis à un échelon de tension est de la la forme : $U = E(1 - e^{-t/\tau})$
1 - Tracer l'allure de la fonction.
2 - Déterminer la pente initiale de la fonction.
3 - Déterminer l'expression de la fonction $h(t)$, tangente à $U(t)$ en $t = 0$. Tracer cette tangente sur le même graphe.
4 - On appelle temps de montée t_m la durée nécessaire pour que le signal passe de 10% de sa valeur finale à 90% de sa valeur finale. Exprimer t_m en fonction de τ.

Impédance d'un dipôle On peut montrer qu'une bobine est caractérisée par une grandeur appelée impédance, dont le module est : $z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$.
1 - Tracer l'allure de ce module en fonction de ω pour ω variant de 0 à $+\infty$.
2 - Donner le domaine de ω dans lequel il est pertinent de considérer z comme une constante. Donner le domaine de ω dans lequel il est pertinent de considérer z comme une fonction linéaire.

3.2 Lien fonction-graphe : Modèle de force non-linéaire

Soit un oscillateur non-linéaire caractérisé par la fonction ci-contre.
1. On souhaite modéliser cette courbe par la fonction $y(x) = \frac{kx}{x^2+x_0^2}$. Déterminer la position du maximum de cette fonction et la valeur de ce maximum. En utilisant la courbe, déterminer les valeurs numériques de k et x_0.
2. Donner l'équation de la tangente à la fonction $y(x)$ en $x = 3$.
3. Donner l'équation qui permet de savoir à quelle distance de ce point le modèle s'éloigne de la réalité de plus de $0,1$.



3.3 Mise en forme d'un signal

On cherche à mettre en forme le signal suivant, dans la partie où il correspond à une exponentielle décroissante. Les réglages sont $0,1ms/div$ et $2V/div$.
1. A l'aide du graphe, déterminer l'amplitude et le temps typique de décroissance.
2. Ecrire le signal $u(t)$ en prenant garde à l'origine des temps. En déduire l'amplitude du signal au moment où l'alimentation - en rouge - reprend.
3. Avec quelle précision peut-on considérer que le signal est nul pour un temps correspondant à $4,5 carreaux$? Comparer cette précision avec la largeur du trait de mesure et conclure.

Opérations de base sur les fonctions

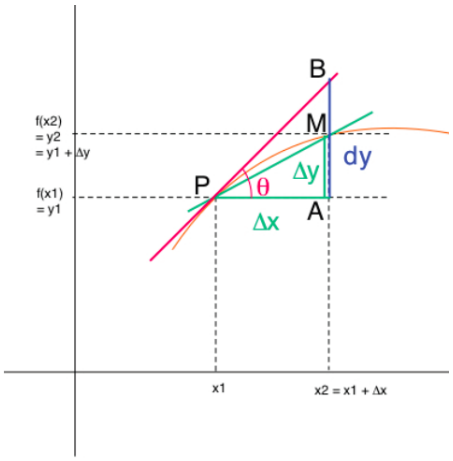
1 Dérivation

1.1 Introduction

Pour caractériser l'évolution temporelle d'une grandeur $x(t)$, il est souvent utile de se donner une fonction qui reflète le sens de variation de x au cours du temps.

Principe

- Dans l'approche la plus simple, cette variation peut-être une variation moyenne de $x(t)$ sur un intervalle donné Δt. Si x varie de Δx sur cet intervalle, la donnée du rapport $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ caractérise les variations de x sur cet intervalle. Son signe définit par exemple le sens de variation de $x(t)$ (si x est croissante ou décroissante), et sa valeur quantifie la manière dont x croît rapidement ou non sur cet intervalle.
- De manière plus générale, soit une fonction $y(x)$, la donnée du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ en un x donné caractérise le sens et l'amplitude de l'évolution locale de y avec x.



Limite

- Cependant, la pertinence de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a ses limites : elle ne fournit qu'une idée globale du comportement de $y(x)$ sur l'intervalle Δx. En effet, on pourrait imaginer une fonction ayant des variations brutales et rapides sur ledit intervalle, dont la fonction $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ne rend pas du tout compte.
- Enfin, la largeur de l'intervalle Δx n'est pas forcément évidente à choisir et peut sembler arbitraire a priori.
- Pour toutes ces raisons, dans l'immense majorité des cas, on se donne une fonction qui est la limite de la définition précédente et qui permet de caractériser de manière exacte la variation locale de y avec x. D'un point de vue mathématique, une telle fonction est la dérivée de y par rapport à x.

1.2 Dérivée d'une fonction

1.2.1 Définition exacte, mais assez peu utile

Définition

On dit qu'une fonction réelle f, définie dans un intervalle des réels, est dérivable, en un point x_0 de cet intervalle et admet pour dérivée $f'(x_0)$, si :

$$lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

est définie.

Interprétation

- x–x_0 est la variation d'abscisse entre x et x_0. Quand on prend la limite, cette variation tend à être infinitésimale.
- $f(x)$–$f(x_0)$ est la variation d'ordonnée pour la variation d'abscisse correspondante. Quand on prend la limite, cette variation tend elle aussi à être infinitésimale. Si l'on trace le graphe de $f(x)$ autour de l'abscisse x_0, quand au passe à la limite dans l'expression précédente, cela revient à confondre la variation infinitésimale d'ordonnée locale $f(x)$–$f(x_0)$ avec la variation d'ordonnée de la fonction affine tangente localement à $f(x)$ en x_0. (on confond une courbe avec une droite pour un déplacement infinitésimal, Cf. graphe précédent)
- Comme la dérivée est le rapport de cette variation infinitésimale approchée sur la variation d'abscisse, la dérivée en x_0 correspond donc à la pente de la fonction affine tangente localement à f en x_0. Géométriquement, $f'(x_0) = tan(\theta(x = x_0))$ où $\theta(x)$ est l'angle entre la tangente locale au graphe en $x = x_0$ et l'axe des abscisses.

1.2.2 Autre définition exacte, beaucoup plus utile

Définition on note dx la *variation d'abscisse infinitésimale*, c'est-à-dire la plus petite variation d'abscisse générique.

Utilité Cette notion est très utile car elle permet d'omettre le passage à la limite, qui rend si peu fonctionnelle l'expression précédente. Il faut comprendre que si l'on utilise la notation dx, cela signifie qu'on utilise un élément qui est *nécessairement suffisamment petit pour rendre exactes des relations qui ne seraient qu'approchées si l'on utilisait des éléments finis* ; dx est toujours assez petit.

1: Définition

Plutôt que d'envisager la variation de la fonction entre x_0 et x et que faire tendre cette variation vers 0 en utilisant la notion de limite, on peut introduire des éléments infinitésimaux dans la définition de la dérivée. On peut donc poser $x = x_0 + dx$, avec dx suffisamment petit pour ne pas avoir à utiliser la limite. La définition (exacte) de la dérivée de $f(x)$ en x_0 devient :

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+dx)-f(x_0)}{x_0+dx-x_0} = \frac{f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx}$$

Attention, la grandeur $f'(x_0)$ n'a pas la même homogénéité que $f(x)$. En effet, la grandeur $f(x_0 + dx) - f(x)$ a la même homogénéité que f, et dx est une longueur. Ainsi, le rapport de ces deux grandeurs est homogène à :

$$[f'] = \frac{[f]}{[x]}$$

1.2.3 Différentielle

1: Définition

df est **la différentielle** de f calculée en x_0

$$df = f(x_0 + dx) - f(x_0)$$

Cette grandeur correspond à la variation infinitésimale de la fonction f entre les deux abscisses. Attention, la grandeur $df(x_0)$ a la même homogénéité que $f(x)$:

$$[df] = [f]$$

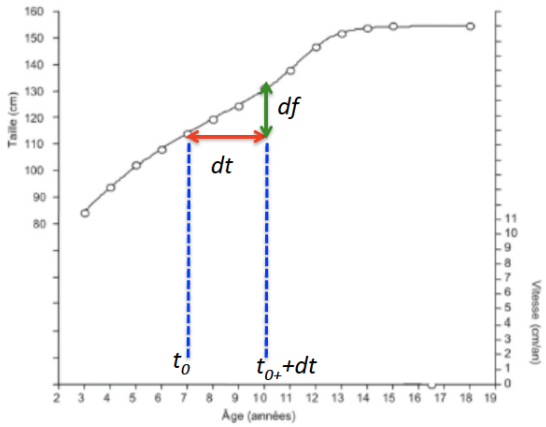
1: Propriété

D'après tout ce qui précède :

$$f'(x_0) = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}$$

L'arc $x = x_0$ signifie que l'on calcule la différentielle df en $x = x_0$. L'utilisation de notations infinitésimales fait de la dérivée un **rapport**. Ceci permet de manier les éléments infinitésimaux ou indépendamment les uns des autres et de manière exacte, comme de simples grandeurs mathématiques. En physique, de telle grandeurs auront donc une signification physique.

Exemple Soit une fonction f correspondant à la taille d'un enfant. Dans ce cas, la différentielle df calculée en t_0 est la variation de taille de l'enfant entre t_0 et $t_0 + dt$. Cette variation est d'autant plus grande que $f'(t_0)$ est grande.



Exemple Soit l'aire A d'un disque de rayon r, $A = \pi r^2$. La différentielle de l'aire en r_0 correspond physiquement à la variation de l'aire du disque si celui-ci voit son rayon passer de r_0 à $r_0 + dr$. Si on calcule cette différentielle :

$$dA = (2\pi r)_{r=r_0}\, dr = 2\pi r_0.dr$$

Ce résultat a une interprétation géométrique simple, $dA = 2\pi r_0.dr$ est l'aire de la couronne d'épaisseur dr qui entoure le disque de rayon r_0. Pour s'en convaincre, il suffit de dérouler cette couronne : on obtient un rectangle de longueur le périmètre du disque, *i.e.* $2\pi r_0$, et de largeur dr, donc bien d'aire $2\pi r_0.dr$.

2: Homogénéité

La définition précédente ne modifie pas les règles d'homogénéité :

$$[f'] = \frac{[f]}{[x]}$$

La dérivée d'une grandeur par rapport au temps est donc homogène à :

$$\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{[f]}{temps}$$

la dérivée d'une fonction par rapport au temps est notée :

$$\frac{df}{dt} = \dot{f}$$

Exemples

— Soit la vitesse verticale d'un point en coordonnées cartésiennes : $v_z = \frac{dz}{dt}$. Elle a bien pour dimension $m.s^{-1}$.
— Soit l'accélération d'un point en mouvement unidimensionnel : $a = \frac{dv}{dt}$. Elle a bien pour dimension $[a] = \frac{vitesse}{temps} = \frac{m.s^{-1}}{s} = m.s^{-2}$

1.3 Fonction dérivée

2: Définition

Si la dérivée est définie pour tout x_0 de l'intervalle d'étude, on peut définir une fonction dérivée $f'(x)$ qui fait correspond à une abscisse x la valeur $f'(x)$ de la dérivée de$f(x)$ en x, définie par :

$$f'(x) = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} = \left.\frac{df}{dx}\right)_x$$

2: Fonctions dérivées classiques

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

$$(ln(x))' = 1/x$$

$$(exp(x))' = exp(x)$$

$$(sin(x))' = cos(x)$$

$$(cos(x))' = -sin(x)$$

1.4 Dérivation d'une fonction composée à une seule variable

Problème

— Soit une fonction $f(x)$ où l'argument de la fonction, x, est lui-même une fonction d'un autre paramètre, par exemple t, tel que $x(t)$.
— Si $f(x)$ est une fonction continûment dérivable de x et x une fonction continûment dérivable de t, on peut envisager de dériver f par rapport à t, il existe alors un rapport entre les dérivées.
— Si l'on utilise des notations infinitésimale, on peut très bien multiplier numérateur et dénominateur par dx, faisant ainsi apparaître la dérivée de f par rapport à x, on a donc l'égalité :

3: Dérivée d'une fonction composée

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} = f'(x)\frac{dx}{dt}$$

Exemple Variation de l'énergie cinétique d'une masse m avec le temps. On a : $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

Donc $\frac{dE_C}{dt} = \frac{2}{2}mv.\frac{dv}{dt} = mv.\frac{dv}{dt}$

1.5 Dérivée seconde

Problème

— Il est courant en physique d'avoir besoin de la variation de la variation d'une fonction – qui correspond par exemple, en mécanique, à ce que représente l'accélération par rapport au vecteur position. Mathématiquement, cela correspond à déterminer la *dérivée seconde* de la fonction considérée.
— Il n'y a pas de subtilité cachée dans sa définition : la fonction dérivée seconde n'est autre que la dérivée de la dérivée. Toutefois, les notations courantes sont souvent mal comprises, et il est bon de comprendre leurs origines.

4: Dérivée seconde d'une fonction

La dérivée seconde d'une fonction est par définition :

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(f'(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

Pour simplifier cette notation, il est d'usage de mettre en facteur les dx au dénominateur. On obtient donc un $(dx)^2$ le plus souvent noté dx^2. Il faudra prendre garde au fait que le carré ne porte pas sur le x, mais sur tout le dx : dx^2 n'a ainsi rien à voir avec $d(x)^2$. De même, on met en facteur les d au numérateur. On obtient un d^2, ce qui donne finalement :

$$f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2}$$

Attention la dérivée seconde en x_0 n'est pas la dérivée de la valeur de la dérivée en x_0, (pas plus que la valeur de la dérivée en x_0 n'est la dérivée de la valeur en x_0). En effet, la dérivée d'une valeur est toujours nulle.

3: Homogénéité

La définition précédente implique que :

$$[f''] = \frac{[f]}{[x^2]}$$

Exemples Soit l'accélération verticale d'un point en mouvement unidimensionnel : $a = \frac{d^2z}{dt^2}$. Elle a bien pour dimension $[a] = \frac{position}{temps^2} = \frac{m}{s^2} = m.s^{-2}$

Notation la dérivée seconde d'une fonction $f(t)$ par rapport au temps est notée :

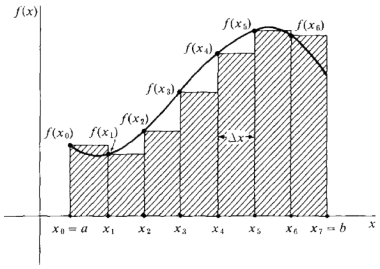
$$\frac{d^2f}{dt^2} = \ddot{f}$$

Exemple L'accélération en coordonnées cartésiennes s'écrit : $\overrightarrow{a} = \ddot{x}\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}$

2 Intégration

— Dans de nombreux cas, il peut être utile d'avoir accès au comportement moyen d'une fonction. Par exemple, la moyenne temporelle d'un signal variable constitue l'approximation la plus simple dudit signal. D'un point de vue mathématique, l'opération de moyenne est liée à l'intégration. De même que la dérivation, l'intégration est tributaire des notations infinitésimales.

— En théorie d'intégration de Riemann, l'aire située entre les abscisse a et b et sous la courbe $f(x)$ est définie exactement à l'aide d'une série (méthode des rectangles) que l'on fait tendre vers l'infini. (on découpe l'aire sous la courbe en rectangles très petits et on fait tendre le nombre de ces rectangles vers l'infini – et donc leur taille vers 0, de telle sorte que l'erreur intrinsèque pour un nombre fini de rectangles, qui est la différence entre l'aire sous la courbe et l'aire des rectangles, tende vers 0).



— On admet que la limite de cette série est équivalente à la somme continue suivante :

$$\int_a^b f(x)dx$$

— Les notations précédentes sont significatives : $f(x).dx$ représente l'aire d'un rectangle infinitésimale compris entre les abscisse x et $x + dx$ et de hauteur $f(x)$. L'aire sous la courbe est exactement égale à la somme des aires de tels rectangles, car ces derniers sont infinitésimaux : ils sont suffisamment petits pour que la relation soit exacte.

4: Homogénéité

Le signe intégration n'est qu'une écriture de la sommation effectuée de façon continue. **Cette sommation ne modifie pas l'homogénéité du produit dans l'intégrale**. Ainsi :

$$\left[\int f dx\right] = \int [f dx] = [f]\,[x]$$

Pour une intégration par rapport au temps :

$$\left[\int f dt\right] = \int [f dt] = [f]\,[t]$$

Exemple Position d'un point en mouvement unidimensionnel : $x = \int v_x dt$. Qui a bien la dimension : $[x] = \left[\int v_x dt\right] = \int [v_x dt]$: $m = m.s^{-1}.s$.

Le tableau ci-après résume les primitives les plus courantes en physique :

F est une primitive de f sur l'intervalle I (ou sur tout autre intervalle sur lequel f est continue).

$f(x)$	$F(x)$	I
x^α $(\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$ (ou $\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$)
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$e^{\alpha x}$ $(\alpha \in \mathbb{C}^*)$	$\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$

3 Exercices d'application

3.1 Dérivation

Régimes transitoires Soit une tension dans un circuit décrite par la fonction $u(t) = u_0 cos(\omega t)$. On note $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ et $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$.

1 - Exprimer $\dot{u}(t)$, $\dot{u}(t=0)$, $\ddot{u}(t)$ et $\ddot{u}(t=0)$.

Soit maintenant une tension décrite par la fonction $u(t) = Acos(\omega t) + Bsin(\omega t)$.

2 - Exprimer $u(t=0)$, $\dot{u}(t)$, $\dot{u}(t=0)$. Sachant que $u(t=0) = 0$ et $\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0$, déterminer A et B. Tracer l'allure de cette fonction.

Soit maintenant une tension de la forme : $u(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}(Acos\Omega t + Bsin\Omega t)$.

3 - Exprimer $u(t=0)$, $\dot{u}(t)$, $\dot{u}(t=0)$. Sachant que $u(t=0) = 0$ et $\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0$, déterminer A et B. Tracer l'allure de cette fonction.

Soit maintenant une tension de la forme : $u(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} + Be^{-\frac{t}{\tau_2}}$.

4 - Exprimer $u(t=0)$, $\dot{u}(t)$, $\dot{u}(t=0)$. Sachant que $u(t=0) = 0$ et $\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0$, déterminer A et B. Tracer l'allure de cette fonction.

Lien fonction/dérivée La vitesse d'un paquebot de masse m lors d'un freinage s'écrit : $v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$.

1 - Exprimer $\dot{v}$ en fonction du temps et des paramètres constants du problème. En déduire qu'il existe une relation simple entre $\dot{v}$, v et τ. En supposant que cette relation est issue du principe fondamental de la dynamique appliqué au paquebot, en déduire l'expression de la force de frottement subie par le paquebot.

Dans un autre modèle, la vitesse s'écrit : $v(t) = \frac{v_0}{1+\alpha t}$.

2 - Exprimer $\dot{v}$ en fonction de v_0, t et α. En déduire qu'il existe une relation simple entre $\dot{v}$, α, v_0 et v. De même que précédemment, en déduire l'expression de la force de frottement cohérente avec une telle évolution.

L'altitude d'un lévitron est donnée par : $z(t) = z_0 cos(\omega t)$

3 - Exprimer $\dot{z}(t)$ puis $\ddot{z}(t)$. En déduire une relation simple entre $\ddot{z}$, z et ω.

Fonctions composées Lors du freinage d'un TGV de masse m, la vitesse $v(t)$ vérifie l'équation : $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2) = -\alpha v^3$

1 - Exprimer le terme de gauche en fonction de m, v et $\dot{v}$. En déduire une équation liant $\dot{v}$, α, m et v.

Dans un circuit LC, la charge $q(t)$ du condensateur C vérifie l'équation : $LC\dot{q}^2 + q^2 = cste$.

2 - Dériver cette équation par rapport au temps.

Soit z l'altitude d'une bille dans un saladier hémisphérique de rayon r_0. On peut montrer par le théorème de Pythagore que $z = -\sqrt{r_0^2 - r^2}$

3 - Exprimer $\frac{dz}{dr}$.

On considère le cas où $r(t)$ varie : on définit $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$.

4 - Exprimer $\dot{z}$ et commenter géométriquement.

3.2 Différentielles

Relation de conjugaison Soit une lentille convergente de distance focale f. Soit un objet à distance algébrique x de cette lentille. La relation de conjugaison donne la position x' de l'image de l'objet par la relation : $1/x'–1/x = 1/f'$ Soit un objet situé en x_0 et se déplaçant de dx. Exprimer la variation dx' de la position de son image.

Champ de gravité terrestre L'intensité du champ de gravité en fonction de r distance au centre de la Terre est $g(r) = g_0 R_T^2/r^2$ où g_0 est l'intensité du champ de gravité à la surface terrestre et R_T le rayon terrestre. On cherche à savoir s'il est pertinent de considérer le champ de gravité comme uniforme.

1. Exprimer la variation infinitésimale dg du champ de gravité pour une variation de distance dr au voisinage de R_T en fonction de g_0, R_T et dr uniquement.

2. Evaluer cette variation pour $dr = h = 30km$, sachant que $g_0 = 9,8m.s^{-2}$ et $R_T = 6,4.10^3 km$. Comparer cette variation à g_0. Commenter l'approximation $g(r) \sim g_0$.

Dérivées et différentielles Exprimer les dérivées par rapport à x puis les différentielles de : x^a, $(x+a)^b$, $(ax+b)^c$, $sin^2(x)$, $sin(kx)$, $cos^2(kx)$, $ln(ax)$, $ln(ax+b)$, $exp(ax^2)$

Variations infinitésimales L'énergie cinétique d'une masse m se déplaçant à la vitesse v, correspondant à une quantité de mouvement $p = mv$ peut se mettre sous la forme : $E = p^2/(2m)$

1. Exprimer la variation infinitésimale d'énergie dE si la quantité de mouvement passe de p_0 à $p_0 + dp$ à m fixée.

2. Exprimer la variation infinitésimale d'énergie dE si la masse passe de m_0 à $m_0 + dm$ à charge p_0 fixée.

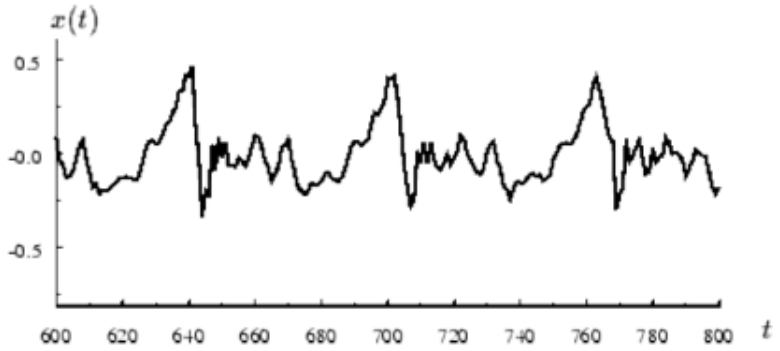
3. Exprimer la variation de quantité dp si la masse passe de m_0 à $m_0 + dm$ à énergie fixée.

Ecritures de grandeurs périodiques et sinusoïdales

1 Généralités

1.1 Présentation, généralités

Intérêt Les signaux périodiques jouent un rôle particulier dans l'étude des signaux, et ce notamment parce que tout signal peut être décomposé en une somme de signaux périodiques (plus précisément, en une somme de signaux sinusoïdaux). Ce signal est en réalité non-périodique au sens mathématique du terme. Cela dit, peu de signaux physiques peuvent se vanter d'être suffisamment « propres » pour pouvoir être considérés comme périodiques au sens mathématique du terme. Bien souvent par exemple, ils contiennent une petite composante de bruit qui brise la périodicité, comme on le voit sur la courbe suivante :



1.2 Caractéristiques

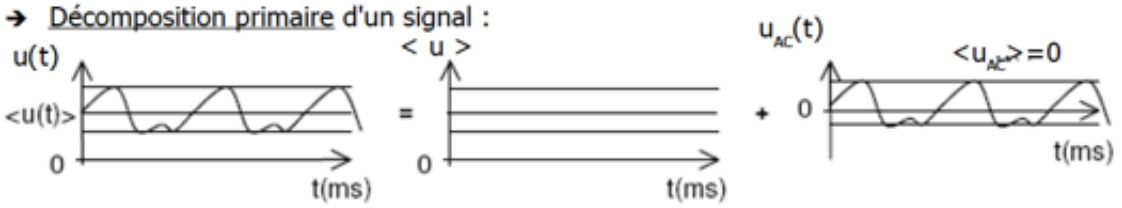
D'une manière générale, un signal périodique peut être caractérisé (repérer les différentes grandeurs sur le graphe précédent) :

1: Définitions

- par sa période T telle que : $s(t+T) = s(t)$
- par sa fréquence : $f = 1/T$
- par sa valeur moyenne $< s(t) >$:
- Son **amplitude crête**, différence entre sa valeur maximale et sa valeur moyenne.

1.3 Décomposition d'un signal

Idée On peut penser tout signal comme la superposition d'une composante continue et d'une composante alternative.



u (t) = <u> + u_{AC}(t) avec u_{AC}(t) la composante alternative de u(t).

Utilité Chacune de ces grandeurs qui caractérisent un signal périodique peut contenir une partie ou toute l'information désirée. Par exemple, la fréquence contient la hauteur d'un signal musical, sa valeur moyenne contient son niveau sonore moyen,...

2 Un signal périodique important : le signal sinusoïdal

Parmi tous les signaux périodiques, le signal sinusoïdal joue un rôle très particulier, puisque que tout signal peut être vu comme une somme de signaux sinusoïdaux : ce sont donc les "briques élémentaires" permettant de construire tous les signaux imaginables. En plus de cette importance qu'on pourrait qualifier de mathématique, le signal sinusoïdal intervient dans un système physique qui a une importance cruciale dès lors qu'on s'intéresse à un système dans une situation stable : l'oscillateur harmonique, dont le représentant le plus célèbre est le système masse-ressort.

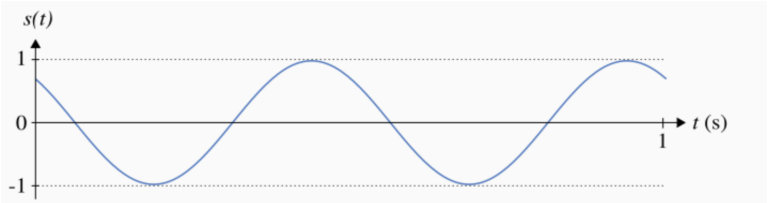
2.1 Définitions

2: Définitions

- D'une manière générale, un signal sinusoïdal peut s'écrire sous la forme suivante : $s(t) = s_0 cos(\omega t + \varphi)$
- Dans cette expression, s_0 est appelée **amplitude** du signal et représente la différence entre la valeur la plus élevée du signal et sa valeur moyenne, ici nulle. Renotons que l'homogénéité de $s(t)$ est celle de s_0.
- ω est appelée **la pulsation** du signal et elle est reliée à sa période T et sa fréquence f par : $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$. La pulsation s'exprime en $rad.s^{-1}$.
- $\omega t + \varphi$ est appelée la **phase du signal**. Cette grandeur est **adimensionnée** (comme argument d'une fonction transcendante). φ est appelée la **phase à l'origine** : elle positionne horizontalement la courbe par rapport à l'origine des temps.

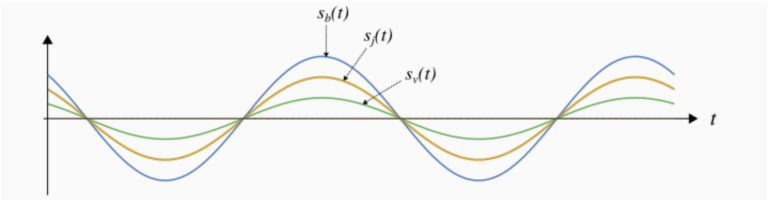
2.2 Analyse

Un signal sinusoïdal est un signal en forme de sinus. Formellement, il s'agit d'un signal pouvant s'écrire sous la forme suivante : $s(t) = S_0 \cos(2\pi f t + \varphi)$. Son allure est la suivante :



Signal sinusoïdal d'amplitude 1, de fréquence 2 Hz et de phase à l'origine $\pi/4$ rad.

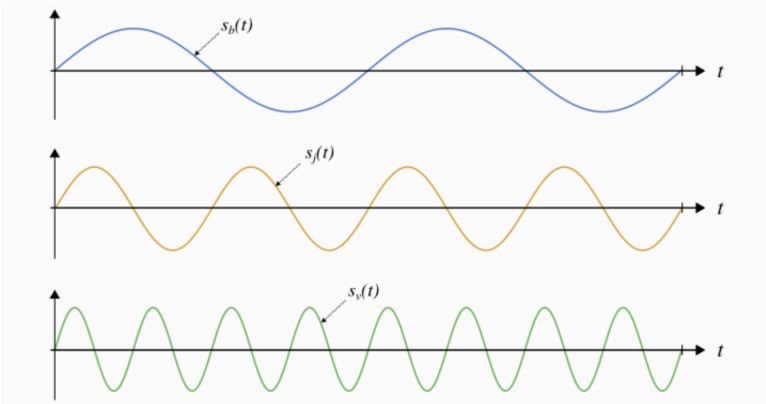
Amplitude Pour comprendre visuellement à quoi correspond l'amplitude, étudions les trois signaux sinusoïdaux de la figure ci-dessous :



Signaux sinusoïdaux de différentes amplitudes.

Ces signaux ont la même fréquence et la même phase à l'origine, mais diffèrent par leurs amplitudes. Il y a un signal bleu, $s_b(t)$, qui oscille le plus fort, un signal jaune, $s_j(t)$, qui oscille moins fort, un signal vert, $s_v(t)$, qui oscille encore moins fort. Les amplitudes sont telles que le signal bleu à la plus forte amplitude, suivi par le signal jaune et enfin le signal vert. On observe ainsi que plus l'amplitude est grande, plus l'oscillation est haute. Autrement dit, l'amplitude règle la hauteur des pics et la profondeur des creux. Ce comportement se justifie mathématiquement en utilisant l'expression d'un signal sinusoïdal. Le maximum d'un signal sinusoïdal, obtenu quand le cosinus est maximal et donc égal à 1, est en effet égal à l'amplitude : $\max s(t) = S_0 \max(\cos(2\pi f t + \varphi)) = S_0 \times 1 = S_0$

Fréquence Pour comprendre visuellement à quoi correspond la fréquence, étudions les trois signaux sinusoïdaux ci-dessous.

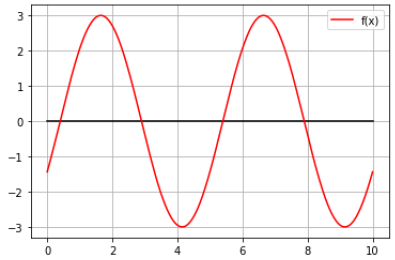


Comparaison de signaux sinusoïdaux de différentes fréquences.

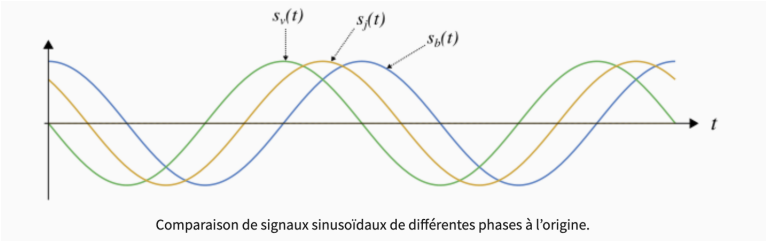
Ces signaux ne diffèrent que par leur fréquence et sont observés sur la même durée. On a un signal bleu, $s_b(t)$, qui oscille le moins vite, un signal jaune, $s_j(t)$, qui oscille plus vite, un signal vert, $s_v(t)$, qui oscille encore plus vite.

Pulsation La pulsation est liée à la fréquence par la définition suivante : $\omega = 2\pi f$. Pour déterminer la pulsation d'un signal sinusoïdal, on mesure la période T du signal, et on calcule : $\omega = \frac{2\pi}{T}$. La pulsation est en $rad.s^{-1}$

Méthode de détermination de la pulsation : Par exemple, pour le signal suivant, on lit : $T \simeq 5s$. Donc $\omega = \frac{2\pi}{T} \simeq \frac{2\pi}{5} \simeq 1,26 rad.s^{-1}$



Phase à l'origine Pour comprendre visuellement à quoi correspond la phase à l'origine, étudions cette fois les trois signaux suivants, qui s'écrivent $s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$:



Comparaison de signaux sinusoïdaux de différentes phases à l'origine.

Les phases à l'origine de ces signaux sont telles que le signal bleu à une phase à l'origine nulle, le signal jaune a une phase à l'origine de l'ordre de $\pi/4$, le signal vert a une phase à l'origine de $\pi/2$. On voit que plus la phase à l'origine est grande plus le signal se déplace vers la gauche sur la figure. **En terme de temps, cela revient à dire que plus la phase à l'origine est grande, plus le signal est en avance temporelle.**

Phase Pour un signal sinusoïdal, la **phase** désigne la quantité à l'intérieur du cosinus, c'est-à-dire $2\pi ft + \varphi$. Le terme origine quant à lui désigne l'origine des temps, autrement dit $t = 0$. Si on calcule la phase pour $t = 0$, on obtient φ, la phase à l'origine. La phase à l'origine est **sans dimension**.

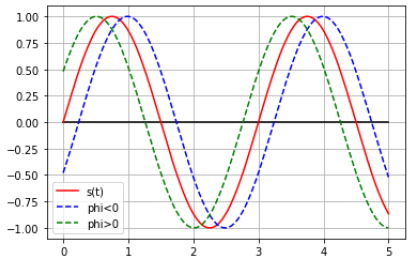
Ecriture Ainsi, les signaux sinusoïdaux sont le plus souvent écrits avec la pulsation au lieu de la fréquence : $s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$

Signe de la phase à l'origine Considérons un signal qui s'écrit sous la forme : $s(t) = S_0.sin(\omega t + \varphi)$.

— Si $\varphi = 0$, le signal est un *sin* classique qui s'annule en $t_0 = 0$. (en rouge)

— Si $\varphi > 0$, le signal s'annule en t_0 tel que $\omega t_0 + \varphi = 0$, donc $t_0 = \frac{-\varphi}{\omega} < 0$. Ainsi, un tel signal est **en avance** sur un sinus classique. (en vert)

— Si $\varphi < 0$, le signal s'annule en t_0 tel que $\omega t_0 + \varphi = 0$, donc $t_0 = \frac{-\varphi}{\omega} > 0$. Ainsi, un tel signal est **en retard** sur un sinus classique. (en bleu)



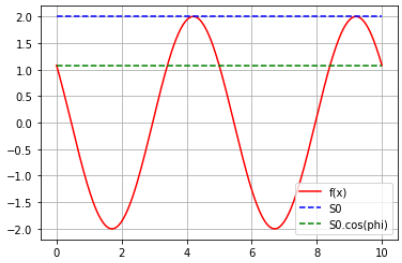
2.3 Méthodes de mesure de φ

Soit la courbe $s(t) = S_0.cos(\omega t + \varphi)$. On cherche à déterminer φ :

Méthode 1 : en mesurant le max et la valeur initiale : On mesure le maximum, ce qui donne la valeur de $s_{max} = S_0$. Ici : $S_0 = 2u_{SI}$

On mesure la valeur initiale, ce qui donne $s(t = 0) = S_0 cos\varphi$. Ici : $S_0 cos\varphi \simeq 1,1u_{SI}$

Donc : $cos\varphi \simeq \frac{1,1}{2}$ Donc $\varphi \simeq cos^{-1}(\frac{1,1}{2}) \simeq 0,98$



Méthode 2 : En mesurant l'instant d'annulation :

On mesure d'abord la période pour avoir accès à la pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{5} \simeq 1,26rad.s^{-1}$

En mesurant l'instant t_0 où l'annulation est atteinte : $s(t_0) = 0 = S_0.cos(\omega t_0 + \varphi)$

Ici : $t_0 \simeq 0,4s$

Cet instant correspond à l'annulation de la fonction en *cos* donc à une situation où son argument vaut $\pi/2$, donc $\omega t_0 + \varphi = \pi/2$

Donc $\varphi = \pi/2 - \omega t_0 = \pi/2 - 1,26 \times 0,4 \simeq 1,1rad$

On retrouve pratiquement la même valeur que précédemment, la différence étant uniquement liée aux erreurs de lecture.

Méthode 3 : En mesurant l'instant correspondant au maximum :

En mesurant l'instant t_m où le maximum est atteint : $s(t_m) = S_0 = S_0.cos(\omega t_m + \varphi)$

On mesure d'abord la période pour avoir accès à la pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{5} \simeq 1,26rad.s^{-1}$

En mesurant l'instant t_m où le maximum est atteint : $s(t_m) = S_0 = S_0.cos(\omega t_m + \varphi)$

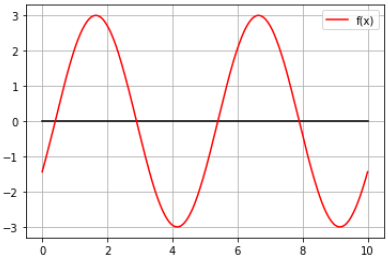
Ici : $t_m \simeq 4,2s$

Cet instant correspond au maximum de la fonction en *cos* donc à une situation où son argument vaut $0[2\pi]$, donc $\omega t_m + \varphi = 0[2\pi]$

Ici, on a $\varphi > 0$ car la fonction est en avance sur une fonction *cos* classique, donc on va prendre : $\omega t_m + \varphi = 2\pi$

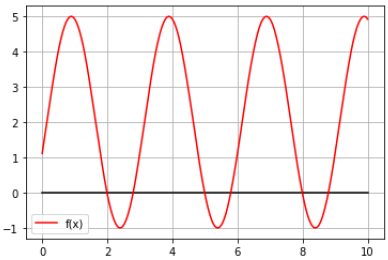
Donc : $\varphi = 2\pi - \omega t_m \simeq 0,99rad$, qui est, là encore, assez proche de la première valeur trouvée.

Exemple 1 : Reprendre les trois méthodes précédentes et déterminer S_0, ω et φ pour le signal suivant, écrit sous la forme : $f(t) = S_0 sin(\omega t + \varphi)$:



Correction : $S_0 = 3u_{SI}$, $T = 5s$, $\omega = 1,26rad.s^{-1}$, $\varphi = -0,5$

Exemple 2 : Reprendre les trois méthodes précédentes et déterminer S_0, S_1, ω et φ pour le signal suivant, écrit sous la forme : $f(t) = S_0 + S_1 sin(\omega t + \varphi)$:



Correction : $S_0 = 2u_{SI}$, $S_1 = 3u_{SI}$, $T = 3s$, $\varphi = -0,3rad$

2.4 Forme alternative avec un sinus

Il existe une définition alternative pour les signaux sinusoïdaux qui utilise la fonction sinus :
$s(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi')$
Il est possible de démontrer ce changement de variable grâce à quelques calculs trigonométriques :
$\forall x, \cos(x) = \sin(x + \pi/2)$
En transformant la définition, on obtient une forme avec un sinus :
$s(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi + \pi/2)$
En posant $\varphi' = \varphi + \pi/2$, on obtient finalement :
$s(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi')$

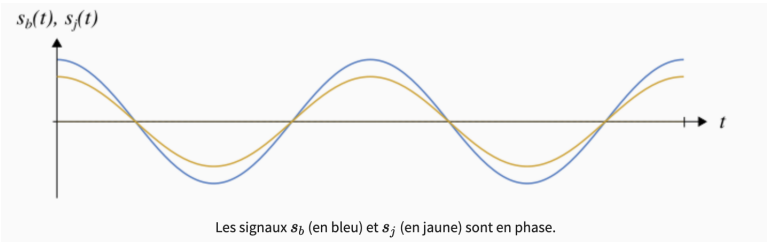
2.5 Déphasage entre deux signaux de même fréquence

2.5.1 Généralités

Le déphasage entre deux signaux est une mesure du décalage entre deux signaux sinusoïdaux de même fréquence. Si on considère de deux signaux sinusoïdaux s_1 et s_2 de même pulsation $s_1(t) = S_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = S_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ alors le déphasage de s_2 par rapport à s_1 est la quantité : $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$

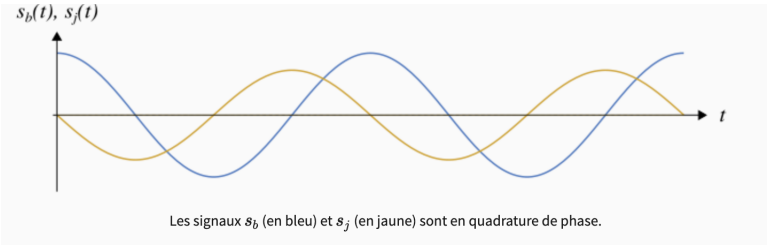
Vocabulaire
— Si $\Delta\varphi > 0$ est positif, le signal 2 est **en avance** de phase par rapport au signal 1.
— Si $\Delta\varphi < 0$ est négatif, le signal 2 est **en retard** de phase par rapport au signal 1.

Cas particuliers de déphasage Quelques valeurs de déphasage remarquables ont un nom particulier qu'il est utile de connaître.
— **Quand le déphasage est nul, on dit que les signaux sont en phase**. Dans cette configuration, leurs maximums et minimums coïncident ; les signaux oscillent conjointement. Mathématiquement, cela signifie que les deux signaux sont proportionnels. C'est par exemple le cas pour la tension électrique aux bornes d'une résistance et le courant électrique qui la traverse.



Les signaux s_b (en bleu) et s_j (en jaune) sont en phase.

— **Signaux en opposition de phase :** Quand le déphasage est égal à π, on dit que les signaux sont en opposition de phase. Dans cette configuration, les maximums d'un signal coïncident avec les minimums de l'autre signal ; les signaux oscillent à l'opposé l'un de l'autre.
— **Signaux en quadrature de phase** Quand le déphasage est égal à $\pi/2$, on dit que les signaux sont en quadrature de phase. Dans cette configuration, les maximums d'un signal coïncident avec les passages par zéros en décroissant de l'autre signal. Par exemple, un signal sinusoïdal et sa dérivée sont en quadrature de phase.



Les signaux s_b (en bleu) et s_j (en jaune) sont en quadrature de phase.

2.5.2 Retard temporel et déphasage

Retard temporel Dans la première partie, nous avons évoqué le lien entre phase et avance (ou retard) temporel et ce lien se retrouve évidemment sur le déphasage. Il est ainsi possible de relier le déphasage de deux signaux de même fréquence et le retard temporel de l'un par rapport à l'autre, mais avant de faire cela, il convient de préciser un peu la notion de retard temporel. Soient les signaux : $s_1(t) = S_1 \cos(2\pi f t + \varphi)$ et $s_2(t) = S_2 \cos(2\pi f(t + \Delta t) + \varphi)$. On dira alors que s_2 est en avance (temporelle) sur s_1 de Δt, ou, de manière équivalente que s_1 est en retard de Δt sur s_2. Il faut voir Δt comme la durée à ajouter à la variable temporelle t dans l'expression de s_2 pour qu'il oscille en phase avec s_1. De manière intuitive, cela signifie que si on a un maximum pour s_2 à un instant t, alors on aura un maximum pour s_1 dans le futur, à la date $t + \Delta t$.

Relation entre déphasage et retard temporel Maintenant qu'on dispose de la notion de retard temporel, voyons comment le déphasage et le retard temporel sont liés.

Soit deux signaux s_1 et s_2 de même pulsation ω tels que s_2 soit déphasé de $\Delta\varphi$ par rapport à s_1. On peut écrire les écrire ainsi : $s_1(t) = S_1 \cos(\omega t + \varphi)$ et $s_2(t) = S_2 \cos(\omega t + \varphi + \Delta\varphi)$. En factorisant partiellement par ω dans le cosinus, on peut transformer l'expression de $s_2(t)$ en : $s_2(t) = S_2 \cos\left(2\pi f\left(t + \frac{\Delta\varphi}{2\pi f}\right) + \varphi\right)$. On peut réécrire cela sous la forme : $s_2(t) = S_2 \cos(2\pi f\,(t + \Delta t) + \varphi)$ avec : $\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{2\pi f}$

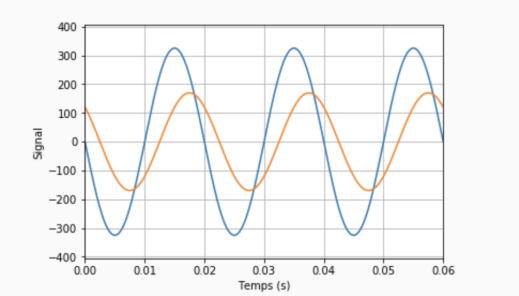
Nous venons d'obtenir une formule qui permet de passer d'un retard temporel à un déphasage et réciproquement.

Elle a une grande utilité pratique, notamment car de nombreux instruments permettent la mesure du temps, mais pas directement de la phase. C'est le cas notamment des oscilloscopes, très utilisés en électronique.

Considérations pratiques Dans la pratique, l'origine des temps est une référence arbitraire (par exemple, sur un oscilloscope, le temps zéro est lié à la configuration du déclenchement). On s'intéresse en conséquence assez peu aux valeurs des phases à l'origine, et la définition du déphasage comme différence entre les phases à l'origine n'a pas d'utilité pratique. À la place, on mesure le retard pour en déduire le déphasage avec la formule vue ci-avant. La mesure de déphasage d'un signal 2 par rapport à un signal 1 s'effectue ainsi :

— On prend un instant de référence t_1 sur le signal 1 (parce qu'on s'intéresse au déphasage du signal 2 par rapport au signal 1). Il peut s'agir par exemple d'un instant où le signal est maximum ou minimum.
— On cherche un instant analogue t_2 sur le signal 2. Par exemple, si on a choisi un maximum comme point de référence, il faut un maximum. Attention, il ne faut pas choisir n'importe quel instant analogue, mais celui le plus près de l'instant de référence. Il s'agit d'une convention qui revient à considérer le déphasage comme compris entre $-\pi$ et π. On mesure le retard $\Delta t_{2/1}$ du signal 2 par rapport au signal 1, défini par $\Delta t_{2/1} = t_2 - t_1$
— On en déduit le déphasage grâce à la formule $\Delta\varphi_{2/1} = \omega \Delta t_{2/1}$
— Cette méthode donne directement le déphasage entre les deux signaux, sans passer par les phases à l'origine.

Exemple 1 : Déterminer le déphasage du signal orange par rapport au signal bleu.



La première étape est de considérer si le signal orange est en avance ou en retard temporel sur le signal bleu. Comme il est à sa droite, on peut conclure que le signal orange est en retard sur le signal bleu. Son déphasage sera donc **négatif**.

La deuxième étape consiste à mesurer l'écart temporel. Le passage par zéro est l'endroit ou le retard est le plus facile à mesurer. C'est assez peu évident à mesurer sur une petite figure, mais l'écart entre les deux signaux vaut 1/4 de graduation, soit $2,5ms$. Le signe est négatif, car le signal orange est en retard.

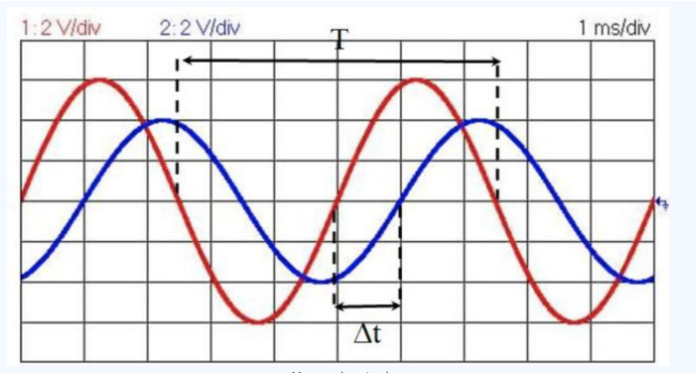
$\Delta t_{orange/bleu} = -2,5$ ms

Il est assez facile de voir qu'une période dure deux graduations, soit $T = 20ms$.

On peut en déduire la fréquence : $f = \frac{1}{T} = 50$ Hz

Donc : $\Delta\varphi = 2\pi f \Delta t_{orange/bleu} = -\frac{\pi}{4}$

Exemple 2 : Ecrire les deux signaux suivants : déterminer leurs amplitudes, pulsations, phases à l'origine. Déterminer leur différence de phase et commenter la cohérence du signe et de la valeur numérique.



2.6 Ecritures alternatives du signal

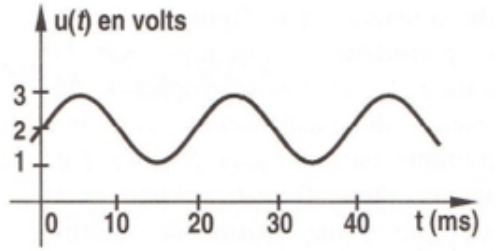
— L'écriture utilisé $s(t) = s_0 cos(\omega t + \varphi)$ n'est pas la seule envisageable. Le même signal peut en effet s'écrire sous la forme : $s(t) = s_0 sin(\omega t + \varphi') = acos(\omega t) + bsin(\omega t)$

— Autrement dit, toute combinaison linéaire de sinus et de cosinus synchrones (i.e. de même fréquence) peut s'écrire sous la forme d'un sinus, ou d'un cosinus, en choisissant des phases à l'origine adaptées.

3 Exercices d'application

Ecriture d'une fonction *Mise en forme*

1. Donner l'expression de la tension $u(t)$ dont le graphe est figuré ci-après. Déterminer sa valeur moyenne et la valeur efficace de sa composante alternative.



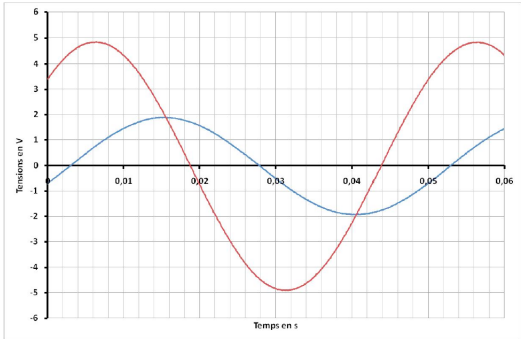
Problème inverse

Soit un signal sinusoïdal d'amplitude maximale 2 Volts, et de période 2 ms.

2. Tracer-le. Tracer sur le même schéma un signal sinusoïdal d'amplitude double et de fréquence double du précédent, initialement déphasé d'un quart de période.

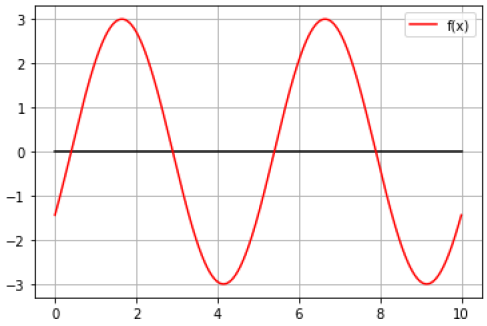
Ecriture de deux fonctions Lorsqu'on alimente un transformateur, on observe en deux points du circuit les tensions suivantes, que l'on notera respectivement $u_1(t)$ (en rouge) et $u_2(t)$ (en bleu).

1. Déterminer la période et la pulsation des deux signaux : sont-ils synchrones ? Déterminer les amplitudes u_{20} et u_{10} des deux signaux.
2 - Déterminer de trois manières différentes la phase à l'origine du signal rouge si on l'écrit à l'aide d'une fonction *sin*. Déterminer de même, de trois manières différentes, la phase à l'origine du signal bleu, si on l'écrit à l'aide d'une fonction *sin*.
3. Déterminer le déphasage entre ces deux fonctions, en précisant bien quel signal est en avance par rapport à l'autre et en le reliant au signe du déphasage. Est-il cohérent d'avoir un déphasage différent de $\pi/2$ au vu des deux courbes ?
4. Ecrire les deux signaux $u_1(t)$ et $u_2(t)$ correspondants, en prenant comme origine des temps l'instant où $u_2(t)$ est maximale.



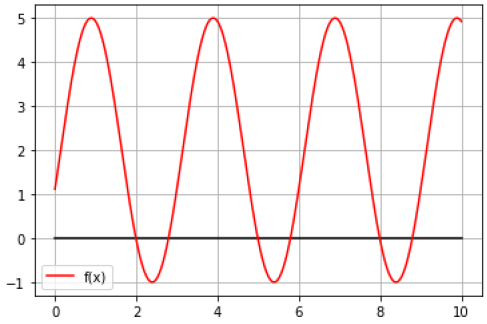
Ecritures d'une fonction Soit la fonction ayant le graphe suivant.

1 - Ecrire cette fonction à l'aide d'une fonction *sin*. On déterminera de trois manières différentes la phase à l'origine. Ecrire cette fonction à l'aide de l'argument $t - t_0$ où t_0 correspond à un instant d'annulation de la fonction.
2 - Ecrire cette fonction à l'aide d'une fonction *cos*. Ecrire cette fonction à l'aide de l'argument $t - t'_0$ où t'_0 correspond à un maximum de la fonction.



Fonction décalée On s'intéresse à présent au signal décalé suivant.

1 - Reprendre les trois méthodes précédentes et déterminer S_0, S_1, ω et φ pour le signal suivant, écrit sous la forme : $f(t) = S_0 + S_1 sin(\omega t + \varphi)$.
2 - Ecrire la fonction à l'aide d'un *cos*.



Somme de fonctions trigonométriques Soit une fonction $t \to f(t) = x_0 cos(\omega t) + x_1 sin(\omega t)$. On cherche à déterminer le maximum de cette fonction et à déterminer l'instant où ce maximum est atteint.

1 - On suppose que $f(t) = x_2 cos(\omega t + \varphi)$. On rappelle que $cos(a + b) = cos(a).cos(b) - sin(a).sin(b)$. Développer la deuxième expression de $f(t)$ et en déduire deux relations entre x_2, φ, x_1 et x_0.

2 - Eliminer φ des deux expressions précédentes en utilisant $cos^2 + sin^2 = 1$ et en déduire x_2 en fonction de x_1 et x_0 uniquement.

3 - Déterminer $tan\varphi$ en fonction de x_0 et x_1 uniquement, puis φ en fonction des mêmes paramètres. En déduire l'instant t_0 pour lequel $f(t)$ est maximale. Analyser les comportements de t_0 pour des valeurs pertinentes du rapport x_0/x_1.

Développements limités

But Pour confirmer ou infirmer une loi, pour résoudre une équation algébrique, il est souvent nécessaire de simplifier une expression, moyennant certaines hypothèses. On traite ici de la simplification la plus courante : l'approximation linéaire, ou développement limité à l'ordre 1.

1 Généralités et exemples

Ce type de modélisation est de loin le plus fréquent, la linéarisation fonde une partie de la physique. On parlera indifféremment d'approximation linéaire, affine, de linéarisation ou de développement limité à l'ordre 1. Une telle approximation linéaire a déjà été vue précédemment en s'appuyant sur la représentation graphique de la fonction ; on cherche ici à faire de même à partir de l'expression de la fonction étudiée.

1: Principe

On modélise la courbe $f(x)$, au voisinage d'un point d'abscisse x_0 par sa tangente locale d'équation :

$$f(x) \simeq t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

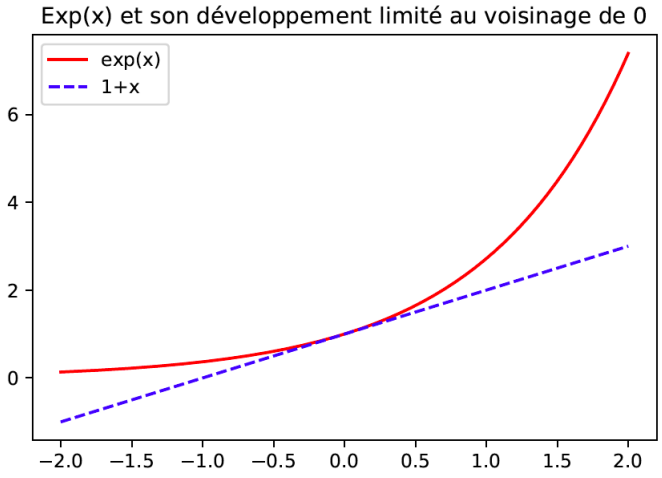
La méthode générale pour établir le développement limité consiste simplement à faire les calculs de $f(x_0)$ et $f'(x_0)$ et de réinjecter les valeurs dans l'expression de $t(x)$.

Exemple Développement limité de e^x au voisinage de $x = 0$

- On calcule la valeur de la fonction en $x = 0$, ce qui donne : $exp(0) = 1$
- On calcule la valeur de la pente de la fonction à approximer en $x = 0$, ce qui donne : $exp(0) = 1$
- L'expression générale donne :

$$exp(x) \sim 1 + x$$

Interprétation Si l'on trace sur le même graphe $exp(x)$ et $1+x$, on visualise simplement la signification de la linéarisation : au voisinage immédiat de $x = 0$, la fonction $exp(x)$ peut être approchée par $1 + x$.



Remarque signalons dès à présent que le développement limité est une approximation qui a *un domaine de validité*. On voit bien sur le graphe précédent que pour $x = -1$, l'approximation de $exp(x)$ par $1 + x$ est vraiment mauvaise. On précise donc toujours, lorsque l'on fait un développement limité, au voisinage de quelle valeur d'abscisse on l'effectue.

Exemple Montrer que : $(1 + x)^\alpha \sim 1 + \alpha x$ pour x petit devant 1

Application Linéariser la fonction $\frac{1}{(1+x)^3}$ au voisinage de $x = 0$ et faire la construction graphique correspondante.

2: Développements limités utiles en physique

Au voisinage de 0 :

$$exp(x) \sim 1 + x$$

$$(1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x$$

$$ln(1+x) \sim x$$

$$sin(x) \sim x$$

$$cos(x) \sim 1$$

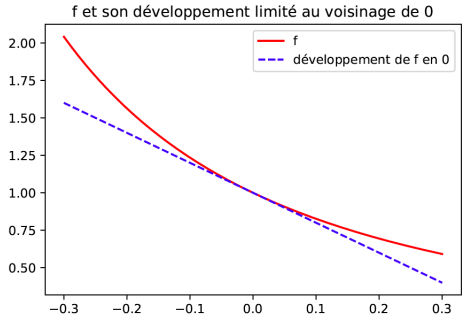
Exemples le développement $(1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x$ se rencontre très souvent en physique. Voici quelques exemples :

- $(1+x)^3 \sim 1 + 3x$
- $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \sim 1 - \frac{x}{2}$
- $\frac{1}{(1-x)^{3/2}} \sim 1 + \frac{3x}{2}$
- $(a+x)^3 = a^3(1+\frac{x}{a})^3 \sim a^3(1+3\frac{x}{a}) = a^3 + 3xa^2$

On remarque notamment sur ce dernier exemple que le développement limité ne change pas l'homogénéité de la formule.

Application Linéariser la fonction $\frac{1}{(1+x)^2}$ au voisinage de $x = 0$ et faire la construction graphique correspondante.

Solution $\frac{1}{(1+x)^2} \sim 1 - 2x$ dont les tracés ont pour allures :



2 Méthodes

Dans la plupart des cas, l'utilisation de la formule générale $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, n'est pas nécessaire, et l'on peut se ramener aux formules précédentes *si l'on parvient à créer une grandeur petite devant* 1.

3: Méthode

On remarque que : $x = x_0 + x - x_0$ avec $x - x_0 \ll x_0$.
Par construction, la grandeur petite devant 1 est $(x - x_0)/x_0$. On peut mettre l'ensemble sous la forme : $x = x_0(1 + (x - x_0)/x_0)$. On peut alors réinjecter cette dernière expression dans les formules de développements limités usuels, au voisinage de 0.

Exemple Linéariser $1/z^3$ au voisinage de $z = d$

Solution $\frac{1}{z^3} = \frac{1}{(d+z-d)^3} = \frac{1}{(d(1+\frac{z-d}{d}))^3} = \frac{1}{d^3(1+\frac{z-d}{d})^3} \sim \frac{1}{d^3}(1 - 3\frac{z-d}{d}) = \frac{1}{d^3} - 3\frac{z-d}{d^4}$

Remarque le développement limité ne change pas l'homogénéité d'une fonction.

Il arrive souvent que l'on cherche à quantifier la variation d'une fonction en fonction de l'écart relatif par rapport à une position particulière (position d'équilibre en mécanique, point de fonctionnement en électrocinétique,...)

4: Méthode

Pour une fonction $f(x)$ analysée au voisinage d'un point x_0, on pose ainsi : $x = x_0(1 + \varepsilon)$ avec $\varepsilon \ll 1$
On peut alors réinjecter cette dernière expression dans les formules de développements limités usuels, au voisinage de 0.

Exemple Linéariser $exp(x)$ au voisinage de x_0 ; donner le résultat en fonction de ε puis de x.

Solution $exp(x) = exp(x_0(1+\varepsilon)) = e^{x_0}e^{x_0\varepsilon} \sim e^{x_0}(1+x_0\varepsilon) = e^{x_0}(1+x_0\frac{x-x_0}{x_0}) = e^{x_0}(1+x-x_0)$

5: Méthode

Si l'on envisage une variation infinitésimale dx de l'argument d'une fonction $f(x)$ au voisinage d'un point x_0, faire le développement limité en dx_0 est un calcul proche de celui de la différentielle de f en x_0. Là encore, les formules classiques permettent souvent de s'affranchir du calcul direct. La grandeur petite devant 1 est ici dx/x_0.

Exemple Exprimer l'aire d'un disque de rayon $r+dr$ et en déduire l'aire de la couronne circulaire comprise entre r et $r+dr$

Solution $A(r+dr) = \pi(r+dr)^2 = \pi r^2(1+\frac{dr}{r})^2 \sim \pi r^2(1+2\frac{dr}{r}) = \pi r^2 + 2\pi r dr$

L'aire de la couronne comprise entre r et $r+dr$ est donc : $A(r+dr) - \pi r^2 = 2\pi r dr$, ce qui a une interprétation géométrique simple.

Enfin, la fonction f n'est pas une fonction simple de x, elle peut être un quotient, un produit, une fonction composée de fonctions de x.

6: Méthode

Le développement limité à l'ordre 1 d'une fonction composée est la composée des développements limités : on développe la première fonction, puis on redéveloppe pour la deuxième,...

Exemple Linéariser $exp(x^2)$ au voisinage de 1

7: Méthode

Dans le cas où $f(x)$ « contient » plusieurs fonctions de x, on développe chacune d'entre elles à l'ordre 1 et on ne garde que les termes d'ordre après développement des produits, quotients, sommes...

Exemple Linéariser $exp(x)/(1+x)^2$ au voisinage de 0

Application Déterminer une solution approchée au voisinage de 0 de l'équation $ln(1+x) = 1/(1+x)^2$. Figurer les deux courbes exactes et les courbes linéarisées sur le même graphe et vérifier la cohérence de la démarche.

3 Exercices d'application

Vérification Vérifier les développements limités suivants et corriger les éventuelles erreurs :
$\frac{1}{1+x} \sim 1-x$; $\frac{1}{a+x} \sim a - \frac{x}{a}$; $\frac{1}{a+x} \sim a-x$; $\frac{1}{(1+x)^{3/2}} \sim 1+\frac{3x}{2}$; $\frac{1}{(d+x)^4} \sim d^4 - 4x$

Solution approchée On cherche à résoudre l'équation algébrique suivante $k\frac{cos(x)}{(1-x)^2} = x$ où $k = 0{,}1$. En supposant que la solution est petite devant 1, linéariser l'équation précédente et en déduire une solution approchée de l'équation. Comparer cette solution à celle issue d'une résolution numérique exacte. Commenter.

Pression dans une classe Une classe de hauteur $h = 3m$, contient de l'air dont la pression à une hauteur z du sol est donnée par : $P(z) = P_0 exp(-Mgz/RT)$ où $M = 29g.mol^{-1}$ est la masse molaire de l'air, g l'intensité du champ de pesanteur, R la constante des gaz parfaits ($R = 8,314 J.K^{-1}.mol^{-1}$) et $T = 293K$ est la température de l'air.

1. On pose $H = RT/Mg$. Montrer que H est homogène à une hauteur et donner sa valeur numérique. Comparer cette valeur à la hauteur de la classe. En déduire une expression approchée au premier ordre de $P(z) - P_0$.

2. Quelle erreur maximale commet-on en considérant la pression uniforme dans la classe ?

Champ de gravité terrestre Soit le champ de gravité terrestre $g(r) = g_0 R_T^2/r^2$.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 1 du champ de gravitation au voisinage de la surface terrestre en fonction de G, M_T, R_T et r. On supposera donc que $r - R_T << R_T$.

2. Tracer la fonction exacte et la fonction linéarisée en fonction de r. A-t-on tendance à sur ou à sous-estimer $g(r)$ en utilisant son développement limité ?

Rayonnement d'un corps Un corps de surface extérieure S portée à la température T en contact avec une atmosphère à la température T_0 rayonne une puissance différentielle $P = S\sigma(T^4 - T_0^4)$. Par deux méthodes différentes, linéariser cette puissance différentielle pour $T \sim T_0$. Vérifier que l'homogénéité de la formule est bien la même qu'avant le développement limité.

La mission Darwin La mission Darwin aurait pour localisation un des points de Lagrange du système Terre-Soleil. On admet qu'en un tel point L dit point de Lagrange, situé entre le Soleil et la Terre, à une distance d du Soleil, pour lequel une masse m déposée en L peut tourner à la même vitesse angulaire que la Terre, de sorte que le système S, L et T reste constamment aligné. L'équation donnant la position du point L est : $0 = -\frac{GM_S m}{d^2} + \frac{GM_T m}{(D-d)^2} + m\Omega^2 d$ où $\Omega^2 = \frac{GM_S}{D^3}$ avec D est la distance Soleil-Terre et M_S et M_T les masses respectives du Soleil et de la Terre.

1. En déduire une relation uniquement entre les grandeurs $x = d/D$ et $\alpha = M_T/M_S$. Cette relation définit un des points dits de Lagrange du système Soleil-Terre. Numériquement, on trouve $x = 0,989$.

2. Retrouver une valeur similaire à l'aide d'un développement limité idoine.

Equations différentielles du premier ordre

1 Généralités

Définitions L'application d'un principe physique (par exemple, le PFD pour un système mécanique) permet souvent d'aboutir à un relation entre une grandeur et une ou des dérivées temporelles de cette grandeur : on parle d'*équation différentielle régissant la grandeur*.

1: Définition

- Soit une fonction f de la seule variable x. Une équation différentielle (E.D.) sur la fonction est une égalité entre les valeurs prises par f et ses dérivées successives. L'inconnue d'une telle équation différentielle est la fonction vérifiant cette égalité.
- L'**ordre** d'une équation différentielle portant sur la fonction f est l'ordre le plus élevé apparaissant dans les dérivées successives de cette fonction au sein de cette équation.

Exemples

— La fonction exponentielle est une solution de l'équation différentielle d'ordre 1 : $\frac{df}{dx} = f(x)$.
— L'équation différentielle $f'' + 4f' + f = 0$ est d'ordre 2.

2: Définition

- Une équation différentielle est dite **homogène** lorsqu'elle ne possède que des termes fonction de f et/ou d'une dérivée de f.
- On parlera de **l'équation différentielle homogène** associée à une équation différentielle donnée : c'est cette même équation différentielle privée des termes ne faisant intervenir ni f ni ses dérivées.
- Une équation différentielle est dite **linéaire** à coefficients constants si l'équation différentielle homogène associée à cette équation différentielle peut être mise sous la forme : $\Sigma a_n f^{(n)}(x) = 0$ où les coefficients sont constants.

Exemples

— $f'' + 4f' + f = 0$ est une équation différentielle homogène.
— $f'' + 4f' + f = 5$ est une équation différentielle non homogène à second membre constant
— $f'' + 4f' + f = cos(ax)$ est une équation différentielle non homogène à second membre non constant

2 Etapes de résolution d'une équation différentielle

1: Méthode

Soit une fonction f de la variable x. Pour résoudre une équation différentielle sur la fonction f, il y a deux étapes :
- **Intégrer cette équation**, c'est-à-dire trouver une expression de $f(x)$ qui vérifie cette équation différentielle. Cette solution générale fait apparaître une ou des constantes d'intégration, que l'on ne peut pas connaître a priori. $f(x)$ n'est donc pas entièrement déterminée à cette étape.
- **Déterminer la ou les constantes d'intégration en utilisant les conditions initiales sur la fonction** $f(x)$.
- Même si elles ne sont pas nécessaires en mathématiques pour définir l'espace des solutions, les constantes d'intégration jouent un rôle fondamental en physique au-delà de la prise en compte des conditions initiales : **pour donner une dimension à la solution**.

Exemple L'équation différentielle $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ a pour solution générale $x(t) = Acos\omega t + Bsin\omega t$, A et B étant les constantes d'intégration à déterminer. Si l'on sait par ailleurs que $x(t=0) = x_0$ et $\dot{x}(t=0) = 0$, on a nécessairement $A = x_0$ et $B = 0$ d'où l'unique solution vérifiant ces conditions : $x(t) = x_0 cos\omega t$

1: Propriété

Le nombre de constantes d'intégration à déterminer lors de la résolution d'une équation différentielle est **égal à l'ordre de cette équation différentielle**. On peut vérifier cette propriété sur l'exemple précédent : c'est la constante d'intégration A qui donne son homogénéité à $x(t)$. Il faut donc penser à vérifier a posteriori que l'on a bien utilisé un nombre suffisant de conditions initiales.

Vérification Vérifier qu'une fonction est bien solution d'une équation différentielle correspond à :

— réinjecter cette fonction dans l'équation différentielle, et à s'assurer que l'équation est bien valable pour toutes les valeurs du domaine de résolution de la fonction
— s'assurer que la fonction vérifie la ou les condition(s) initiale(s)

Exemple soit l'équation différentielle $\frac{df}{dt} + kf = 0$ avec $f(t=0) = f_0$.

On peut vérifier que la fonction $f(t) = f_0 e^{-kt}$ est bien solution de cette équation. En effet, avec cette solution : $\frac{df}{dt} = -kf_0 e^{-kt} = -kf$ donc $\frac{df}{dt} + kf = -kf + kf = 0$ qui est vérifiée pour tout t. De plus, $f(t=0) = f_0 e^{-k0} = f_0$ ce qui correspond bien à la condition initiale.

Contre-exemple On peut vérifier que la fonction $f(t) = f_0 cos\,(kt)$ n'est pas solution de l'équation précédente. En effet, avec cette solution : $\frac{df}{dt} = -kf_0 sin(kt)$ donc $\frac{df}{dt} + kf = -kf_0 sin(kt) + kf_0 cos(kt)$. Il existe certes un instant t_0 pour lequel $-kf_0 sin(kt_0) + kf_0 cos(kt_0) = 0$ mais il s'agit d'une annulation fortuite. L'équation doit être vérifiée pour tout t, ce qui n'est pas le cas ici, on peut donc dire que $f(t) = f_0 cos(kt)$ n'est pas solution de $\frac{df}{dt} + kf = 0$.

3 Résolution des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1

Dans la plupart des cas (sauf si l'on fait du raccordement de solutions), les conditions initiales sont données à $t = 0$. Dans ce cas, l'équation à résoudre est :

$$\frac{df}{dt} + kf = 0$$

$$f(t=0) = f_0$$

2: Propriété

La solution d'une équation différentielle du premier ordre à coefficient constant dans l'espace des réels est de la forme :

$$f(t) = \lambda e^{rt}$$

où r est un complexe quelconque et λ est un réel.

3: Propriété

La solution de l'équation différentielle précédente est donc :

$$f(t) = f_0 . e^{-k.t}$$

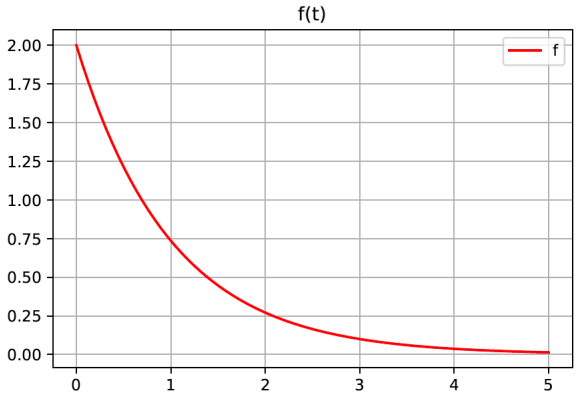
Démonstration

— On réinjecte une telle solution dans l'équation différentielle, on obtient :
— $\lambda r e^{rt} + \lambda k e^{rt} = 0$
— soit $r + k = 0$ et donc $r = -k$
— et donc une solution du type $f(t) = \lambda e^{-kt}$
— Il ne reste qu'à déterminer la constante d'intégration $f(t = 0) = \lambda e^0 = \lambda = f_0$
— ce qui donne finalement : $f(t) = f_0 e^{-kt}$

Vérification il faut prendre l'habitude, une fois le résultat établi, de vérifier que la solution proposée vérifie bien l'équation et les conditions initiales. Ici :

— $f(t = t_0) = f_0 e^{-k(t_0 - t_0)} = f_0 e^0 = f_0$
— Et : $\frac{df}{dt} = -k f_0 e^{-k(t-t_0)} = -kf$ ce qui est bien l'équation différentielle.

Allure dans le cas où $t_0 = 0$ et $f_0 = 2$.



2: Analyse

Le fait que la solution d'une équation différentielle $\frac{df}{dt} = -kf$ ait une solution de la forme $f = \lambda e^{-kt}$ est logique car l'équation différentielle correspond à une phrase du type : "quand je dérive f, je retrouve f multipliée par $-k$", ce qui correspond aux propriétés de la fonction exponentielle.

4: Propriété

Dans certains cas, la ou les conditions initiales sont données à $t = t_0$. Dans ce cas, le problème étudie s'écrit :

$$\frac{df}{dt} + kf = 0 \text{ et } f(t = t_0) = f_0$$

Et sa solution est

$$f(t) = f_0 . e^{-k.(t-t_0)}$$

Démonstration

— On réinjecte une telle solution dans l'équation différentielle, on obtient :
— $\lambda r e^{rt} + \lambda k e^{rt} = 0$
— soit $r + k = 0$ et donc $r = -k$
— et donc une solution du type $f(t) = \lambda e^{-kt}$
— Il ne reste qu'à déterminer la constante d'intégration $f(t = t_0) = \lambda e^{-kt_0} = f_0$
— ce qui donne finalement : $f(t) = f_0 e^{-k(t-t_0)}$

Vérification une fois le résultat établi, on vérifie que la solution proposée vérifie bien l'équation et les conditions initiales. Ici :

— $f(t = t_0) = f_0 e^{-k(t_0 - t_0)} = f_0 e^0 = f_0$
— Et : $\frac{df}{dt} = -k f_0 e^{-k(t-t_0)} = -kf$ ce qui est bien l'équation différentielle.

4 Equations différentielles linéaires à second membre constant

Considérons l'équation différentielle linéaire du premier ordre non-homogène sous sa forme générale :

$$\frac{df}{dt} + kf = c$$

$$f(0) = f_0$$

5: Propriétés

La solution de toute équation différentielle linéaire est la somme :

- d'une **solution particulière** $f_P(t)$ à déterminer. **Celle-ci ne dépend pas des conditions initiales** et peut être entièrement déterminée sans conditions initiales. On peut montrer qu'**elle est de la même forme que le second membre** : si le second membre est une constante, une solution particulière de type constante convient.

- et **de la solution $f_H(t)$ de l'équation homogène associée**.

Méthode

— Déterminer la solution particulière : $f_P = \frac{c}{k}$ convient. Pour la déterminer, puisque le second membre est ici une constante, une solution particulière de type constante convient. On cache le terme dérivé (puisqu'on cherche une constante, sa dérivée est nulle) et on identifie directement.
— Déterminer la solution f_H de l'équation homogène associée : comme précédemment : $f_H = \lambda e^{-kt}$
— Ecrire la solution générale : $f = f_P + f_H = \frac{c}{k} + \lambda e^{-kt}$
— Déterminer la constante d'intégration est comme précédemment fournie par la condition initiale : $f(t_0) = f_0 = \frac{c}{k} + \lambda e^{-kt_0}$
— ce qui donne *in fine* : $\lambda = \left(f_0 - \frac{c}{k}\right) e^{kt_0}$

Et on a ainsi :

6: Propriété

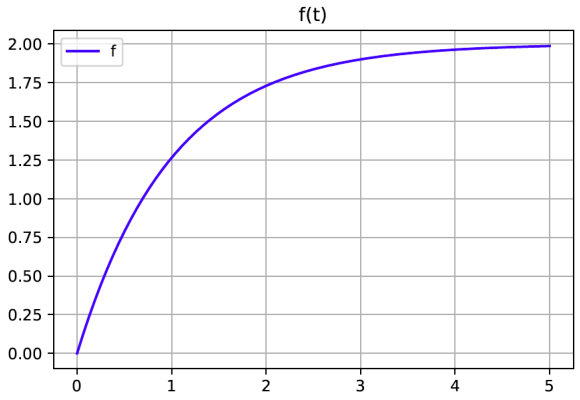
la solution de l'équation : $\frac{df}{dt} + kf = c$ avec $f(t=0) = f_0$ est :

$$f(t) = \frac{c}{k} + \left(f_0 - \frac{c}{k}\right) e^{-kt}$$

Attention la condition initiale est vérifiée par la forme générale de la solution et pas uniquement par la solution homogène ou la solution particulière.

Vérification La solution proposée vérifie bien l'équation et les conditions initiales. En effet :

— $f(t=0) = \frac{c}{k} + (f_0 - \frac{c}{k})e^0 = \frac{c}{k} + (f_0 - \frac{c}{k}) = f_0$
— Et : $\frac{df}{dt} = -k(f_0 - \frac{c}{k})e^{-kt} = -kf + c$ ce qui est bien l'équation différentielle.



Analyse Cette forme de solution peut-être reconstruite qualittivement :

— la fonction doit tendre vers sa solution particulière c/k
— la fonction doit valoir f_0 en $t = 0$, donc on s'arrange avec la constante d'intégration devant l'exponentielle pour que ce soit le cas.

Remarque on peut retrouver cette forme de solution.

— Il faut commencer par séparer les variables $\frac{df}{c-kf} = df$
— Identifier les termes en tant que différentielles de fonctions connues : $\frac{-1}{k} ln(c - kf) = t + D$
— soit : $c - kf = exp(-k(t + D))$
— que l'on réécrit sous la forme : $f = \frac{c}{k} + \lambda e^{-kt}$

7: Propriété

La solution particulière et donc le régime établi ne dépendent pas des conditions initiales. On voit que la solution tend vers c/k, c'est-à-dire vers la solution particulière quand le temps tend vers l'infini. La solution particulière est associée au **régime établi du système**.

5 Analyse qualitative d'une EDLO(1)

Il s'agit à présent de prévoir qualitativement la forme de la solution de l'équation différentielle. Cette analyse peut être menée soit :

— après la résolution quantitative, en vue de confirmer la cohérence de la solution.
— avant la résolution quantitative, en vue de prévoir la forme de la solution.

Par une analyse qualitative, il est possible de déterminer des grandeurs pertinentes de l'évolution de la solution d'une équation (temps typique d'évolution, période, valeur maximale, minimale, amplitude, pente initiale,...).

5.1 Premier exemple

Soit l'équation différentielle :
— $\frac{dx}{dt} = a$ (on se place dans le cas où $a > 0$)
— $x(t = 0) = x_0$

Analyse Cette équation différentielle peut être vue comme une phrase qui raconte une histoire. Elle dit : "$x(t)$ croît en fonction du temps". Et sa condition initiale dit "$x(t)$ part d'une valeur x_0 à $t = 0$".

Cohérence Ces deux remarques sont cohérentes avec le fait que $x(t) = a.t+cste$ est solution de l'équation différentielle et que si on utilise $x(t = 0) = x_0$, on a : $x_0 = a.0 + cste = cste$, ce qui implique que la solution de l'équation est $x(t) = a.t + x_0$: l'analyse qualitative est cohérente avec la solution analytique.

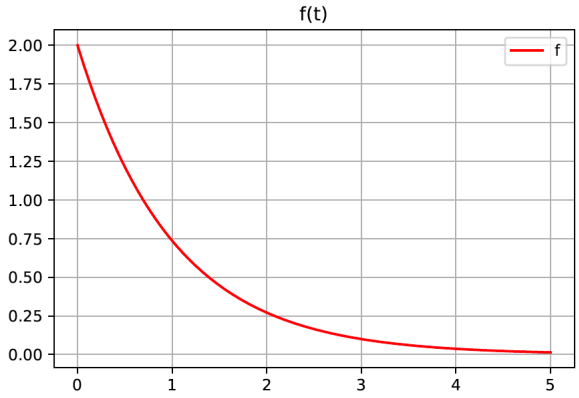
5.2 Deuxième exemple

Soit l'équation différentielle :
— $\frac{dx}{dt} = -kx$ (on se place dans le cas où $a > 0$)
— $x(t = 0) = x_0$

Analyse Cette équation différentielle peut être vue comme une phrase qui raconte une histoire. Elle dit :

— Pour $t = 0$, $x(t) \simeq x_0$.
— Cela implique que $\frac{dx}{dt})_{t=0} = -kx(t = 0) = -kx_0$. Donc $x(t)$ est une fonction décroissante, dont la valeur initiale est x_0 et dont la pente initiale est $-kx_0$.
— Quand le temps va passer, puisque $x(t)$ est initialement décroissante, $x(t)$ va décroître et devenir inférieure à x_0. Cela implique que : $\frac{dx}{dt})_{t>0} = -kx$ et donc la pente devient plus petite (en valeur absolue), et donc la fonction est de "moins en moins décroissante", elle a une forme d'exponentielle relaxante. Sa pente reste toujours négative, mais est de plus en plus faible en valeur absolue.
— On peut comprendre que la fonction relaxe forcément vers 0 parce que "tant que $x(t)$ est non nul, $\frac{dx}{dt}$ est non nulle, et donc la fonction continue d'évoluer".

Cohérence Toutes ces analyses sont cohérentes avec le fait que la solution est $x(t) = x_0 e^{-kt}$.



Analyse on peut construire le "temps typique" de l'évolution précédente. Ce temps est l'ordre de grandeur "du temps pour lequel il se passe quelque chose". On peut se donner plusieurs critères quantitatifs pour cela : temps pour que $x(t)$ atteigne la moitié de sa valeur initiale, temps pour que $x(t)$ parcoure 63% du chemin qui le sépare de son asymptote,... Tous ces temps ne seront pas égaux, mais ils seront commensurables.

Construction Une manière de construire ce temps typique τ consiste à dire qu'il est de l'ordre du temps que met la tangente initiale à la courbe pour rejoindre l'asymptote finale de la courbe.

— Or la pente initiale de la courbe est : $\frac{dx}{dt})_{t=0} = -kx_0$.
— Cette pente est la pente de la tangente initiale. Or si l'on note τ l'instant de l'intersection de la tangente avec l'asymptote finale qui est $x_\infty = 0$, on a la relation : $\frac{dx}{dt})_{t=0} = -kx_0 = \frac{0-x_0}{\tau}$(la tangente a une pente qui lui permet de passer de x_0 à 0 en un temps τ).
— Ainsi on a : $\tau = 1/k$ qui est le temps typique d'évolution de la fonction.

Cohérence on constate que ce temps est cohérent avec le temps que l'on peut construire avec une analyse dimensionnelle de la solution analytique : $x(t) = x_0 e^{-kt}$ implique que $1/k$ est forcément un temps.

5.3 Troisième exemple

On examine ici qualitativement "le fonctionnement" d'une équation différentielle sur un cas simple : soit l'équation : $\dot{x} = -kx + c$
avec pour condition initiale $x(0) = 0$

Première partie de l'évolution : les temps courts Pour t proche de 0, on sait que x est proche de sa condition initiale :

Prévision $x(t \sim 0) \sim x(t = 0) = 0$ et donc l'ED se simplifie en : $\dot{x} \sim c$
et on a donc

$$x(t \sim 0) \sim ct$$

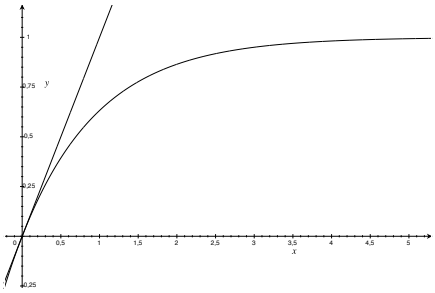
On peut ainsi prévoir la pente initiale de la solution : c

Cohérence Cette évolution linéaire approchée correspond forcément à l'approximation linéaire (au développement limité) de la solution exacte, quelle qu'elle soit. Ici, la solution exacte est :

$$x = \frac{c}{k}(1 - e^{-kt})$$

On vérifie simplement qu'aux temps courts, $x(t)$ est croissante de pente c :
— Si on dérive l'expression précédente, pour avoir la pente, et que l'on calcule celle-ci à $t = 0$, on obtient c.
— Si on fait le développement limité de cette fonction pour t faible, on obtient : $x(t) \sim \frac{c}{k}(1 - (1 - kt)) = ct$ qui est bien cohérent avec l'analyse aux temps courts.

Représentation l'approximation linéaire de la solution aux temps courts donne :



Deuxième partie de l'évolution : les temps intermédiaires Pour les temps intermédiaires, $x(t)$ a eu le temps de croître

Prévision les deux termes c et $-kx(t)$, du fait de l'évolution de $x(t)$, deviennent commensurables et l'évolution de $x(t)$ se fait plus lente.

Cohérence On vérifie sur la solution exacte que l'évolution de $x(t)$ est plus lente et que la pente est plus faible.

Troisième partie de l'évolution : aux temps longs Il arrive souvent qu'une solution d'équation différentielle réelle tende vers une valeur constante.

Prévision Aux temps longs, les deux termes c et $-kx(t)$ se compensent et $x(t)$ atteint sa valeur finale qui correspond à $\dot{x}(t=\infty)=0$

et donc qui est donnée par $\dot{x}(t=\infty)=0=-kx_f+c$
donc

$$x_f=\frac{c}{k}$$

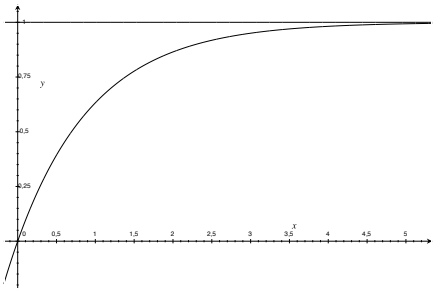
On peut ainsi prévoir la valeur finale de la solution.

Cohérence La solution atteint en effet un régime stationnaire.

3: Analyse

L'état stationnaire correspond à la **solution particulière**.
Cette solution particulière est **indépendante des conditions initiales**.

Représentation



Attention Tous ces raisonnements sont basés sur le fait que k est une constante positive. L'existence d'un comportement asymptotique de la solution est lié à la mise en forme : $\dot{x}+kx=c$.

A retenir On retiendra que lorsqu'on met tous les termes fonctions de x d'un côté de l'équation, s'ils sont tous du même signe, alors la solution est stable et tend vers un comportement asymptotique.

5.4 Méthodes de détermination d'un temps typique d'évolution

5.4.1 Généralités

8: Méthodes

Si on a déjà déterminé la solution de l'équation, cette détermination est une simple étude de fonction. Sinon, à partir de l'équation différentielle elle-même, le temps typique d'évolution - qui correspond ici au temps typique pour atteindre un régime stationnaire - peut être déterminé soit :
- Par homogénéité : en comparant les différents membres de l'équation. Cela peut-être plus ou moins immédiat selon la forme de l'équation.
- Si cela n'est pas possible, il faut écrire que le temps typique est celui nécessaire pour atteindre la valeur finale en ayant une vitesse typique d'évolution correspondant approximativement à la vitesse initiale - ce qui correspond à la méthode de la tangente.

5.4.2 Construction du temps typique d'évolution pour une équation linéaire homogène

Soit une équation du type : $\dot{x} = -kx$ avec $x(0) = x_0$

Méthode Par homogénéité, le premier membre est homogène à : $\frac{[x]}{temps}$ donc le second membre doit avoir la même homogénéité, donc $[kx] = \frac{[x]}{temps}$ donc k est forcément homogène à l'inverse d'un temps et l'on peut poser : $\tau = \frac{1}{k}$

Analyse la résolution analytique de l'équation conduit à une solution en exponentielle avec un temps typique $\tau = \frac{1}{k}$ cohérent avec cette analyse.

5.4.3 Construction du temps typique d'évolution pour une équation linéaire non-homogène

Soit une équation du type : $\dot{x} = -kx + c$ avec $x(0) = 0$

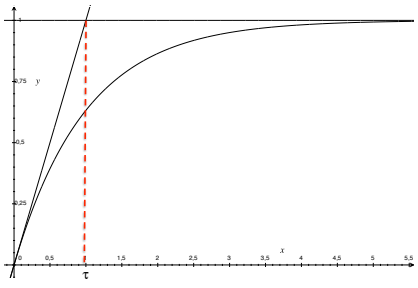
Méthode Soit on procède comme précédemment : le premier membre est homogène à : $\frac{[x]}{temps}$ donc le second membre doit avoir la même homogénéité, donc $[kx] = \frac{[x]}{temps}$ donc k est forcément homogène à l'inverse d'un temps et l'on peut poser : $\tau = \frac{1}{k}$

Méthode Soit on écrit que le temps typique est celui nécessaire pour atteindre la valeur finale en ayant une vitesse typique d'évolution correspondant approximativement à la vitesse initiale :

— ici, la pente initiale est $\dot{x}(t = 0) = c$
— la valeur finale est $x_f = \frac{c}{k}$
— Donc le temps typique pour passer de 0 à x_f avec une pente typique de c est tel que : $\frac{x_f - 0}{\tau_T} = c$
— Donc $\tau_T = \frac{x_f}{c} = \frac{1}{k}$. On retrouve le temps typique précédent.

Remarque on aurait pu appliquer la même méthode à l'équation précédente.

Représentation



6 Equations du premier ordre non-linéaires

6.1 Résolution

9: Méthode

On considère une équation de la forme : $\frac{df}{dt} = u(f)$

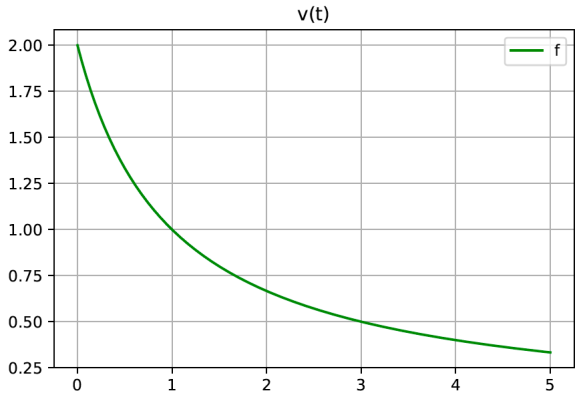
- La méthode consiste à séparer les variables, et de réécrire l'xéquation sous la forme : $\frac{df}{u(f)} = dt$

- Il ne reste plus qu'à intégrer des deux côtés par variables séparables. (Il faut donc connaître une primitive de 1/u(f))

Exemple intégrer l'équation : $\frac{dv}{dt} = -bv^2$ avec $v(t=0) = v_0$. Tracer l'allure de $v(t)$.

Solution on sépare les variables, ce qui donne : $-\frac{dv}{v^2} = bdt$

Or, on sait que : $-\frac{dv}{v^2} = d\left(\frac{1}{v}\right)$, donc l'intégration donne : $\frac{1}{v} = bt + cste$ (on peut vérifier, en différentiant cette égalité que l'on retombe bien sur l'équation différentielle)
Pour déterminer la constante d'intégration, on utilise la condition initiale : $v(t=0) = v_0$, on évalue donc l'égalité $\frac{1}{v} = bt + cste$ en $t = 0$, ce qui donne : $\frac{1}{v_0} = b.0 + cste$ donc $cste = \frac{1}{v_0}$
Donc : $\frac{1}{v} = bt + \frac{1}{v_0}$ ce qui donne finalement :
$v = \frac{v_0}{1+btv_0}$ dont on peut simplement vérifier l'homogénéité.

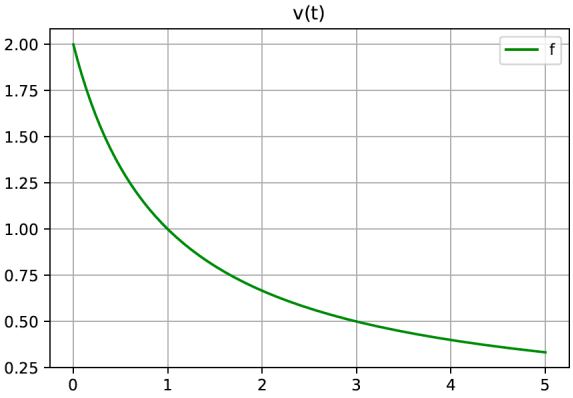


6.2 Analyse qualitative

L'idée est exactement la même que précédemment : il s'agit de faire parler l'équation différentielle.

6.2.1 Analyse globale du comportement

Prenons l'exemple d'une équation du type : $\dot{x} = -kx^2$ avec $x(0) = x_0$.
— On peut prévoir $x(t=0) = 0$ et $\dot{x}(0) = -kx_0^2 < 0$ et donc $x(t)$ est une fonction décroissante initialement, dont la pente initiale est $-kx_0^2$.
— Ensuite, $x(t)$ décroît, et donc $-kx^2$ est moins négative qu'elle ne l'était initialement. La fonction reste décroissante (parce que la pente reste négative), mais la pente est de moins en moins forte : on a une allure relaxante.
— $x(t)$ tend vers 0, parce que tant que $x(t)$ est non-nulle, la pente l'est aussi et la fonction évolue.
— On peut donc s'attendre à une allure :



6.2.2 Construction d'un temps typique d'évolution

Pour une équation non linéaire homogène Soit une équation du type : $\dot{x} = -kx^2$ avec $x(0) = x_0$.

Méthode On écrit que le temps typique est celui nécessaire pour atteindre la valeur finale en ayant une vitesse typique d'évolution correspondant approximativement à la vitesse initiale :

— Ici, la pente initiale est $\dot{x}(t=0) = -kx_0^2$
— la valeur finale est $x_f = 0$.
— Donc le temps typique pour passer de x_0 à $x_f = 0$ avec une pente typique de $-kx_0^2$ est tel que : $\frac{x_f - x_0}{\tau_T} = -kx_0^2$ donc $\tau_T = \frac{-x_0}{-kx_0^2} = \frac{1}{kx_0}$.

Remarque on aurait pu construire ce temps par homogénéité.

Remarque Dans la partie précédente, on a montré que la solution de l'équation différentielle $\frac{dv}{dt} = -bv^2$ avec $v(t=0) = v_0$ était $v = \frac{v_0}{1+btv_0}$. Si l'on note $\tau_{1/2}$ le temps nécessaire pour que $v(t)$ soit divisé par deux par rapport à sa valeur initiale, on a : $v(\tau_{1/2}) = \frac{v_0}{2} = \frac{v_0}{1+b\tau_{1/2}v_0}$ ce qui implique : $1 + b\tau_{1/2}v_0 = 2$. Donc $\tau_{1/2} = \frac{1}{bv_0}$. On retombe donc exactement sur les mêmes dépendances par une analyse quantitative.

Pour une équation non linéaire non-homogène Soit une équation du type $\dot{x} = -kx^2 + c$ avec $x(0) = 0$

Méthode

— On écrit que le temps typique est celui nécessaire pour atteindre la valeur finale en ayant une vitesse typique d'évolution correspondant approximativement à la vitesse initiale – ce qui correspond à la méthode de la tangente.
— Ici, la pente initiale est $\dot{x}(t=0) = c$
— la valeur finale est x_f telle que $\dot{x}(x_f) = 0 = -kx_f^2 + c$ donc $x_f = \sqrt{\frac{c}{k}}$
— Donc le temps typique pour passer de 0 à $x_f = \sqrt{\frac{c}{k}}$ avec une pente typique de c est tel que : $\frac{x_f - 0}{\tau_T} = c$ donc $\tau_T = \frac{x_f}{c} = \frac{\sqrt{\frac{c}{k}}}{c} = \frac{1}{\sqrt{ck}}$

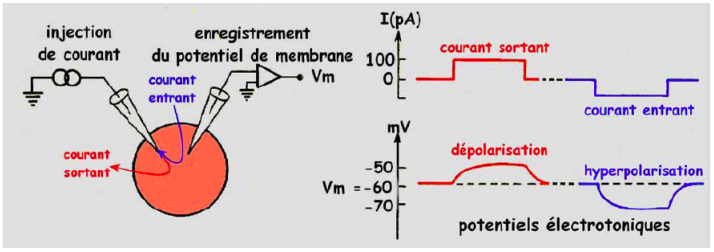
7 Exercices d'application

Equations linéaires d'ordre 1

Quelques outils de base Soit une grandeur $y(t)$ vérifiant l'équation différentielle : $\dot{y} + \frac{y}{\tau} = 0$, avec $y(t=0) = y_0$
1 - On cherche une solution de la forme : $y = \lambda e^{rt}$. Réinjecter cette fonction dans l'équation. En déduire r. Réinjecter cette fonction dans la condition initiale. En déduire λ. Tracer la fonction solution $y(t)$.
Soit une grandeur $y(t)$ vérifiant l'équation différentielle : $\dot{y} + \frac{y}{\tau} = \alpha$, avec $y(t=0) = 0$
2 - On cherche une solution de la forme : $y = \lambda e^{rt} + b$. Réinjecter cette fonction dans l'équation. En identifiant les fonctions qui dépendent du temps et les constantes, déduire r et b. Réinjecter cette fonction dans la condition initiale. En déduire λ. Tracer la fonction solution $y(t)$.

Phase d'accélération d'un TGV, modèle simple Soit un TGV de masse m soumis à une force F_0 et à un frottement fluide linéaire, en $-bv$. On admet que l'équation différentielle qui régit $v(t)$ est $m\frac{dv}{dt} = F_0 - bv(t)$
1 - Déterminer $v(t)$ si la vitesse initiale est nulle. Tracer son allure.
2 - Mêmes questions si la vitesse initiale est v_0.

Comportement de la membrane d'un axone *La membrane neuronale est constituée d'une bicouche lipidique à travers laquelle des ions peuvent circuler par l'intermédiaire de canaux dits canaux ioniques. Cette circulation d'ions correspond à un courant électrique, à travers les canaux ioniques. Dans une première expérience, on impose un courant transmembranaire en forme d'échelon et on mesure la tension transmembranaire induite par cet échelon.*



La durée totale de l'échelon de courant sortant est 4ms. A l'aide de ces courbes expérimentales, on cherche à déterminer l'équation différentielle qui régit le comportement de la tension transmembranaire $V(t)$.

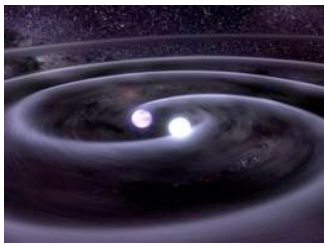
1. D'après les graphes précédents, proposer une modélisation en exponentielle relaxante pour $V(t)$ dans la partie dépolarisation. On introduira tous les paramètres pertinents nécessaires et on les estimera sur le graphe.

2. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $V(t)$ dans cette partie.

3. On suppose que la dépolarisation est stoppée à une date $t_S = 3\tau$ et que $V(t)$ est alors régie par la même équation que précédemment, mais sans second membre. Déterminer $V(t)$ pour $t > t_S$ en supposant que $V(t)$ est continue en t_S.

Equations non-linéaires

Evolution d'une étoile double On considère une étoile double, constituée d'une étoile très massive et d'une étoile moins massive qui lui tourne autour. La Relativité Générale montre qu'une masse accélérée rayonne de l'énergie sous forme d'ondes gravitationnelles et la distance R entre les deux étoiles vérifie l'équation différentielle : $\frac{dR}{dt} = -\frac{k}{R^3}$.

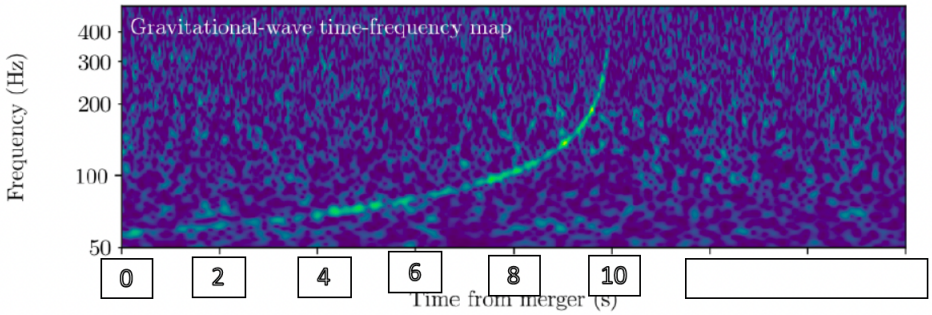


1 A l'instant $t = 0$, le rayon est R_0. Déterminer $R(t)$. Représenter la trajectoire de l'étoile mobile.

2 - Tracer l'allure de $R(t)$ et déterminer le temps de coalescence, τ.

Collapse d'étoiles et ondes gravitationnelles La première observation expérimentale des ondes gravitationnelles, en 2016, est une découverte majeure de la physique du 21e siècle. Les ondes observées sont produites à l'extérieur de notre galaxie lorsque deux astres massifs, initialement en rotation l'un par rapport à l'autre, se rapprochent et fusionnent en un seul. On admet que la fréquence $f(t)$ des ondes gravitationnelles émises évolue au cours du temps suivant la loi $\frac{df}{dt} = Kf^{11/3}$ où K est une constante indépendante du temps.

1 - Déterminer $f(t)$. Représenter $f(t)$. Commenter l'accord avec la courbe expérimentale ci-après.



La figure précédente représente la variation de $f(t)$ mesurée dans un détecteur d'ondes gravitationnelles en échelle logarithmique. Ce signal est interprété comme provenant de la fusion de deux étoiles à neutrons de masses approximativement identiques, M. On cherche à vérifier aussi précisément que possible, en relevant des valeurs numériques sur la figure, que cette variation est compatible avec le résultat de la question précédente. On définit $u(f) = ln\left(\frac{f}{f_0}\right)$.

2 - Exprimer $u(t)$ à l'aide de la solution établie précédemment. Prendre trois points et calculer la fonction u pour ces trois points. Montrer que pour des valeurs de temps faibles $u \simeq f_0^{8/3} Kt$. On rappelle que $ln(1+x) \simeq x$ si $x \ll 1$. Vérifier que la fonction $u(t)$ est bien linéaire sur ces trois points et retouver la valeur numérique de K.

3 - Déterminer la dimension de la constante K. On admet qu'elle s'écrit $G^\alpha M^\beta c^\gamma$ où α, β et γ sont des rationnels. Sachant que $G = 7.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}$ et $c = 3.10^8 m.s^{-1}$, en déduire que ces rationnels vérifient un système de trois équations à trois inconnus et déterminer ces rationnels.

4 - En déduire, en analysant les données de la figure précédente, un ordre de grandeur grossier de M. Que penser du résultat, sachant que la masse du Soleil est de l'ordre de $2.10^{30} kg$?

Analyse qualitative

Modèle de l'accélération d'un TGV Soit un TGV de masse m soumis à une force F_0. On prend en compte une force de frottement en $-kv^2$; l'équation différentielle qui régit sa vitesse est : $m\frac{dv}{dt} = F_0 - kv^2$.

1 - Déterminer l'allure et les grandeurs pertinentes de $v(t)$ solution de cette équation pour $v(t = 0) = 0$ (valeur asymptotique, pente initiale, temps typique d'évolution).

2 - Tracer l'allure de $\frac{dv}{dt}$ en fonction de v et justifier que la vitesse limite corresponde à une situation stable.

Base Jump et C_x Un corps de surface S qui se déplace dans l'air à allure importante subit une force de frottement de norme $C_x S \rho_{air} \frac{v^2}{2}$.

1. Estimer le C_x d'un homme en chute libre, connaissant sa vitesse limite, de l'ordre de $2.10^2 km/h$.

2. Estimer le temps mis pour atteindre sa vitesse limite.

Modèle d'atterrissage sur Mars Voici quelques courbes donnant l'altitude en fonction de la vitesse de quelques sondes envoyées sur Mars.

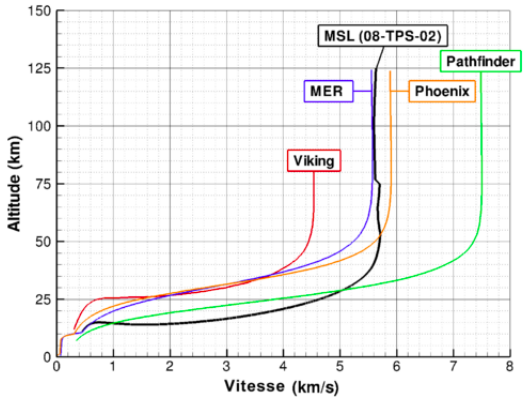
1. Dans quel sens sont parcourues ces courbes pendant l'atterrissage ? Identifier l'altitude z_0 en deça de laquelle on ne peut pas négliger les frottements de l'atmosphère.

Soit une sonde de masse m. A l'issue de la première phase, la sonde a une vitesse v_0, une altitude z_0. On suppose que la force de frottements peuvent se mettre sous la forme $F_f = -bv^3$.

2. Donner la dimension du terme b. A quoi correspond-il physiquement (que signifie avoir un grand b ou au contraire avoir un petit b) ?

On considère le champ de gravité comme uniforme de norme g_m. On admet que l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$ est : $m\frac{dv}{dt} = mg_m - bv^3$

3. Prévoir le comportement et l'allure de $v(t)$. Construire les grandeurs typiques de son évolution : valeur asymptotique, pente initiale, temps typique d'évolution. **On se placera dans le cas où $v_0 > v_{lim}$.**



Equations différentielles du deuxième ordre

1 Equations sans terme de frottement

1.1 Equation du type $\ddot{x} = \omega_0^2 x$

Analyse si $x(t)$ est positif, $\ddot{x}$ est positif et donc au bout d'un moment, $\dot{x}$ devient positif, ce qui fait augmenter $x(t)$: on a une divergence de $x(t)$ vers l'infini. Les choses sont inversées si $x(t)$ est négatif, mais toujours avec une divergence. On peut prévoir une divergence de $x(t)$ quelles que soient les conditions initiales.

1: Propriété

Pour une équation du type $\ddot{x} = \omega_0^2 x$, les solutions sont de la forme :

$$x = Ae^{\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t}$$

où A et B sont des constantes d'intégration déterminées à l'aide des conditions initiales.

Démonstration

— Pour déterminer cette forme de solution, on postule une solution de la forme e^{rt} et on résout l'équation caractéristique vérifiée par r, qui est :

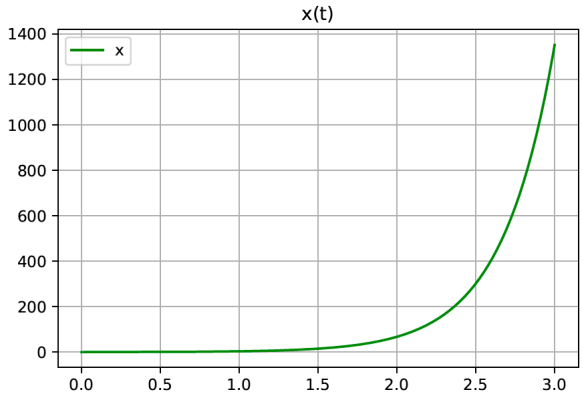
$$r^2 = \omega_0^2$$

— Dont les solutions sont $r = -\omega_0$ et $r = \omega_0$

— Ce qui implique que la forme générale de la solution est une combinaison linéaire des deux e^{rt} possibles, à savoir de la forme : $x = Ae^{\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t}$.

Exemple résoudre $\ddot{x} = 9x$ avec $x(t=0) = 0$ et $\dot{x}(t=0) = 1$.

Solution la solution est, d'après ce qui précède : $x = Ae^{3t} + Be^{-3t}$. La première condition initiale impose : $x(t=0) = 0 = A+B$, donc $B = -A$, donc une solution de la forme : $x = A(e^{3t} - e^{-3t})$. On sait que : $\dot{x}(t) = A(3e^{3t} + 3e^{-3t})$ donc la deuxième condition impose : $\dot{x}(t=0) = 1 = A(3+3)$ donc $A = \frac{1}{6}$. On a finalement une solution qui est : $x = \frac{1}{6}(e^{3t} - e^{-3t})$



1.2 Equation du type $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$

Analyse si $x(t)$ est positif, $\ddot{x}$ est négatif et donc au bout d'un moment, $\dot{x}$ devient négatif, ce qui fait diminuer $x(t)$: on a un rappel de $x(t)$ vers 0 qui est la seule valeur d'équilibre de l'équation. Les choses sont inversées si $x(t)$ est négatif, mais toujours avec un rappel vers 0. On peut prévoir des oscillations de $x(t)$ autour de 0.

2: Propriété

Pour une équation du type $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$, les solutions sont de la forme :

$$x(t) = Asin(\omega_0 t) + Bcos(\omega_0 t)$$

où A et B sont des constantes d'intégration déterminées à l'aide des conditions initiales.

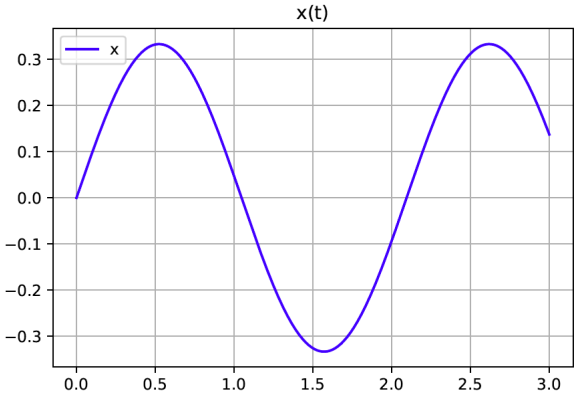
Démonstration Pour déterminer cette forme de solution :

- on postule une solution de la forme e^{rt} et on résout l'équation caractéristique vérifiée par r : $r^2 + {\omega_0}^2 = 0$ dont les solutions sont $r = \pm j\omega_0$
- et la solution la plus générale est donc : $x(t) = Ce^{j\omega_0 t} + De^{-j\omega_0 t}$
- que les formules de Moivre ou d'Euler permettent de transformer en : $x(t) = Asin(\omega_0 t) + Bcos(\omega_0 t)$

Remarque on peut se rappeler des propriétés des fonctions trigonométriques *sin* et *cos* : quand on les dérive deux fois, on obtient moins la fonction. Il reste alors à postuler des solutions de forme *sin* et *cos* ; et pour plus de généralité, on envisage une combinaison linéaire de ces deux fonctions, ce qui ramène à la solution générale envisagée

Exemple résoudre $\ddot{x} = -9x$ avec $x(t = 0) = 0$ et $\dot{x}(t = 0) = 1$.

Solution la solution est, d'après ce qui précède : $x = Acos(3t) + Bsin(3t)$. La première condition initiale impose : $x(t = 0) = 0 = A$, donc $A = 0$, donc une solution de la forme : $x = Bsin(3t)$. On sait que : $\dot{x}(t) = 3Bcos(3t)$ donc la deuxième condition impose : $\dot{x}(t = 0) = 1 = 3B$ donc $B = \frac{1}{3}$. On a finalement une solution qui est : $x = \frac{1}{3}sin(3t)$



2 Equation du type $\ddot{x} + b\omega_0\dot{x} \pm \omega_0^2 x = 0$

2.1 Analyse qualitative de l'influence du troisième terme

Le premier terme est le terme différentiel, il s'écrit toujours de la même manière, il n'a donc sous cette forme aucune influence sur la solution. La troisième terme joue sur la forme de la solution : si le deuxième terme n'était pas là, il permet de générer :

- des exponentielles réelles (croissantes ou décroissantes) si c'est $\ddot{x} - \omega_0^2 x = 0$
- des solutions oscillantes en *cos* et *sin*, si c'est $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

2.2 Cas ordinaire

On se restreint maintenant au cas le plus courant, $\ddot{x} + b\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, c'est-à-dire le cas où le troisième terme est responsable d'une solution du type oscillante.

2.2.1 Analyse qualitative de l'influence du deuxième terme

Le deuxième terme gère lui aussi la forme de l'évolution temporelle et va modifier la forme de cette oscillation ; pour s'en rendre compte qualitativement (avant de le montrer en écrivant la forme générale des solutions) il suffit de faire comme si le troisième terme n'existait pas : on obtient : $\ddot{x} + b\omega_0\dot{x} = 0$. Il y a alors deux cas selon le signe de b

- si b est *négatif* : la solution est une exponentielle croissante, signe d'une divergence temporelle de la grandeur x (ceci n'arrive que si un opérateur extérieur fournit de l'énergie au système, énergie qui est utilisée pour faire diverger la grandeur x)
- si b est *positif* : la solution est une exponentielle décroissante, signe d'un amortissement de la grandeur x (ceci arrive dans la plupart des cas, quand il n'y a pas de source extérieure et que le système comporte des résistances).

1: Analyse

Dans le cas où on considère l'équation générale, la forme de la solution va donc être influencée par les deuxième et troisième termes.
- des oscillations croissantes si b est négatif.
- des oscillations décroissantes si b est positif.
On se restreint maintenant au cas le plus courant où b est positif, qui correspond à des systèmes stables.

2.2.2 Analyse quantitative de la solution

Notation En fait, ces considérations qualitatives ne sont pas tout à fait exactes car il faut, en plus de se soucier du signe de b, prendre en compte sa valeur numérique. Pour s'en rendre compte, il faut résoudre en toute généralité l'équation différentielle $\ddot{x} + b\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, que pour des raisons de raisonnements physiques nous noterons désormais : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ où Q s'appelle le facteur de qualité du système.

2: Analyse

Q symbolise l'amplitude de l'**amortissement au sein du système** : plus Q est grand, plus le système est de bonne qualité, plus le terme responsable de l'amortissement est faible et plus la solution se rapproche d'une solution harmonique.

Résolution Comme on se doute que les solutions vont « ressembler » au cas sans deuxième terme, on peut postuler une solution de la même forme, c'est-à-dire : λe^{rt}. Ce qui donne : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \lambda e^{rt}(r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2) = 0$

1: Définition

La réinjection d'une telle solution dans l'équation nous donne l'**équation caractéristique** associée à l'équation différentielle, qui est une équation algébrique vérifiée par r :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

2.3 Différents régimes de solution

Dichotomie Pour déterminer r, il nous faut donc résoudre ce trinôme du second degré. Se présentent donc trois cas, suivant la valeur de Q qui conditionne la valeur du discriminant Δ du système : $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2$.

Conséquence Trois régimes sont possibles.

2.3.1 Régime apériodique

Si $Q < 1/2$ (amortissement fort), le discriminant est positif, les racines r_1 et r_2 de l'équation caractéristique sont des réels donnés par :

$$r_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{-\omega_0}{Q} + \sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2}\right)$$

et

$$r_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{-\omega_0}{Q} - \sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2}\right)$$

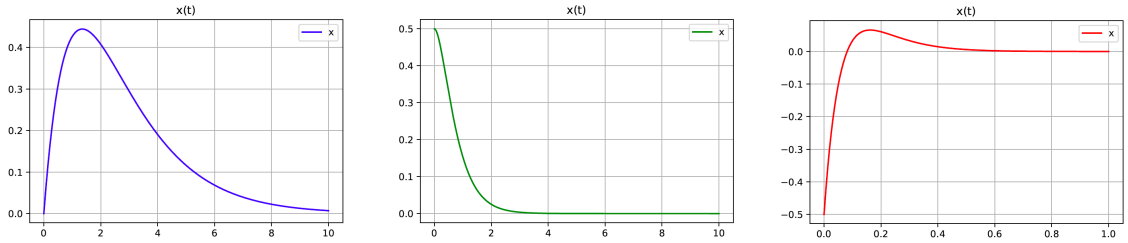
3: Régime apériodique

Si $Q < 1/2$ (amortissement fort), les racines de l'équation caractéristique sont des **réels négatifs** et correspondent à un amortissement tellement rapide de la grandeur $x(t)$ que celle-ci n'a pas le temps d'osciller, (logique car Q étant petit, cela signifie que l'amortissement est important) selon une solution dont la forme générale est :

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

Puisque les arguments des deux exponentielles sont réels, la solution nest pas périodique, il ny a pas d'oscillations et on parle de **régime apériodique**.

Remarque r_1 et r_2 sont homogènes à des inverses de temps et l'allure de la solution est :



Trois allures de régimes apériodiques, avec des conditions initiales différentes : à gauche, valeur initiale nulle et pente initiale non-nulle ; au centre, valeur initiale non-nulle et pente initiale nulle ; valeur initiale et pente initiale non-nulles

2.3.2 Régime critique

Si $Q = 1/2$, le discriminant est nul, les racines sont égales et réelles. Mais ce cas est purement théorique (il faudrait avoir une résistance dans le circuit qui soit déterminée avec une précision infinie, ce qui est impossible, on parle de régime critique). Dans ce cas, on peut montrer que la solution la plus générale est de la forme :

4: Régime apériodique

Si $Q = 1/2$, il n'y a qu'une racine réelle négative pour l'équation caractéristique. On est en régime dit **critique** et l'amortissement est de la forme :

$$x(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$$

L'allure est la même que celle du régime apériodique.

2.3.3 Régime pseudo-périoque

Si $Q > 1/2$ (amortissement faible) le discriminant est négatif, les racines r_1 et r_2 de l'équation caractéristique sont des complexes conjugués donnés par :

$$r_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{-\omega_0}{Q} + j\sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2}\right)$$

et

$$r_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{-\omega_0}{Q} - j\sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2}\right)$$

Ces deux complexes ont des parties réelles négatives qui correspondent à un amortissement de la grandeur x. Cette solution correspond à des oscillations amorties exponentiellement, on parle de régime pseudo-périodique. Dans l'expression de la solution générale, on peut mettre en facteur les parties réelles des deux solutions et l'on obtient :

5: Régime Pseudo-périodique

Si $Q > 1/2$, les deux racines de l'équation caractéristique sont des complexes conjugués. On est en régime dit **pseudo-périodique** car, après réarrangement des termes, l'évolution de $x(t)$ est le produit d'oscillations sinusoïdales par un terme d'amortissement exponentiel :

$$x(t) = e^{\frac{-\omega_0}{2Q}t}.(Acos(\Omega.t) + Bsin(\Omega.t))$$

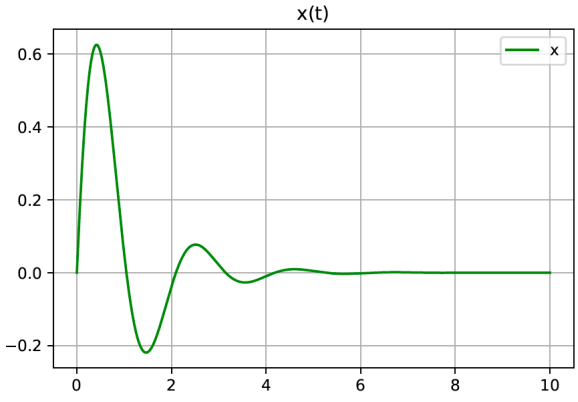
avec $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$
et $\tau = 2Q/\omega_0$

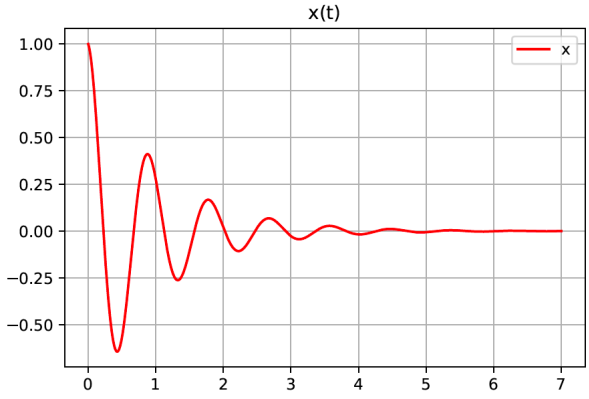
Analyse On retrouve donc bien une solution de la forme oscillations amorties, elle fait apparaître un temps typique d'amortissement $\tau = 2Q/\omega_0$ d'autant plus long que l'amortissement est négligeable (logique) et des oscillations dont la pulsation Ω tend vers ω_0 quand Q tend vers l'infini (là encore logique).

6: Analyse

On retiendra que :
- la partie réelle de la solution de l'équation caractéristique gère l'amortissement.
- la partie imaginaire de cette solution gère les oscillations.

Allure on a des oscillations amorties



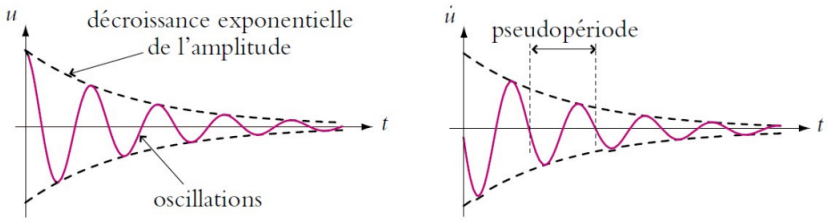


On peut distinguer un certain nombre de grandeurs pertinentes :

2: Définitions

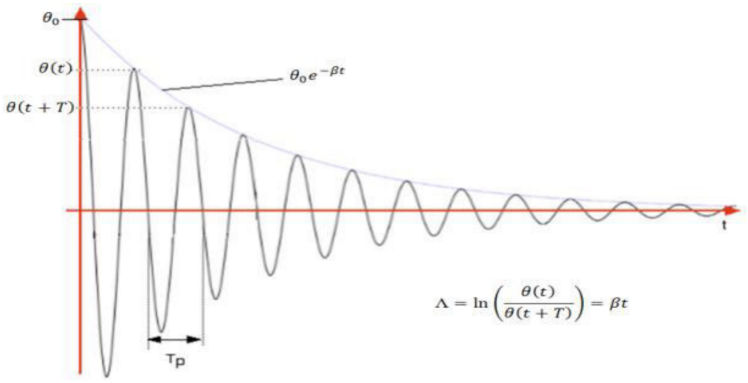
On peut définir sur ce signal :
- la **pseudo-période** : $T = \frac{2\pi}{\Omega}$
- le **temps typique d'amortissement** : $\tau = 2Q/\omega_0$
- le nombre typique d'oscillations visibles : $N \simeq \frac{5\tau}{T} \simeq Q$
- le **décrément logarithmique** : pour une grandeur qui décroît vers 0, si l'on note u_1 et u_2 deux maxima successifs, on définit : $\delta = ln\left(\frac{u_1}{u_2}\right)$. Cette grandeur ne dépend pas du couple choisi. Elle est caractéristique de l'amortissement.
- Le décrément logarithmique est d'autant plus grand que l'amortissement est rapide (que u_2 est faible devant u_1). Il est nul s'il n'y a pas d'amortissement (si $u_2 = u_1$). Il est lié au facteur de qualité : $\delta \simeq \frac{\pi}{Q}$

Illustration sur le graphe suivant, on voit la décroissance en exponentielle qui module les oscillations sinusoïdales. La décroissance se fait avec un temps typique τ que l'on peut construire avec la tangente initiale. La pseudopériode T est la durée qui sépare deux annulations du signal, ou deux maxima successifs.



Pour le décrément logarithmique, on mesure l'amplitude de deux maxima successifs atteints en des instants $t_1$et t_1+T, et on calcule : $\delta = ln(\frac{u(t_1)}{u(t_1+T)})$.

Exemple sur la courbe suivante, repérer T et les grandeurs nécessaires pour remonter à δ.



3 Cas des équations non-homogènes

Si la solution comporte un second membre non-nul, on admet que la solution générale est la somme de :
— la solution de l'équation homogène associée - dont la forme est déterminée avec les méthodes précédentes -
— et d'une solution particulière de la même forme que le second membre.

3.1 Premier exemple

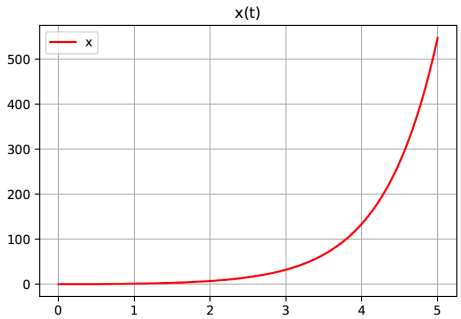
On cherche à résoudre $\ddot{x} - kx = a$ avec $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$

- L'équation homogène associée est $\ddot{x}_H - kx_H = 0$ que l'on met sous la forme $\ddot{x}_H = \frac{x_H}{\tau^2}$ dont la solution est $x_H(t) = Ae^{\frac{t}{\tau}} + Be^{-\frac{t}{\tau}}$
- La solution particulière est de la même forme que le second membre, c'est-à-dire une constante. On cherche donc $x_P = cste$, ce qui implique $\ddot{x}_P = 0$, ce qui, réinjecté dans l'équation différentielle donne : $\ddot{x}_P - kx_P = -kx_P = a$. Donc $x_P = \frac{-a}{k}$
- La solution générale de l'équation est donc : $x = x_H + x_P = Ae^{\frac{t}{\tau}} + Be^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{a}{k}$

Il ne reste plus alors qu'à déterminer A et B en utilisant les deux conditions initiales :

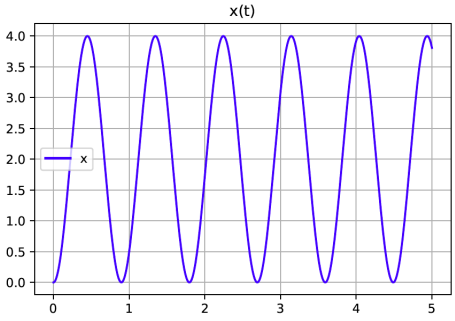
- $x(0) = 0$ implique $x(0) = 0 = A + B - \frac{a}{k}$
- $\dot{x}(0) = 0$ implique $\dot{x}(0) = 0 = \frac{1}{\tau}Ae^{\frac{0}{\tau}} - \frac{1}{\tau}Be^{\frac{-0}{\tau}} = \frac{1}{\tau}A - \frac{1}{\tau}B = 0$ ce qui donne $A = B$
- Ce qui, réinjecté dans la première équation, donne : $0 = 2A - \frac{a}{k}$ Donc $A = \frac{a}{2k}$

Et finalement : $x = \frac{a}{k}\left(\frac{1}{2}e^{\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right)$ dont on peut vérifier qu'elle vérifie les conditions initiales.



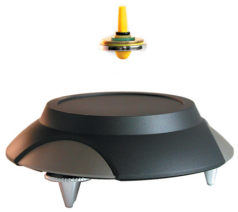
3.2 Deuxième exemple

On chercher à résoudre $\ddot{x} + kx = a$ avec $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$
L'équation homogène associée est $\ddot{x}_H + kx_H = 0$ que l'on met sous la forme $\ddot{x}_H = \omega_0^2 x_H$ dont la solution est $x_H(t) = Acos\omega_0 t + Bsin\omega_0 t$
La solution particulière est de la même forme que le second membre, c'est-à-dire une constante. On cherche donc $x_P = cste$, ce qui implique $\ddot{x}_P = 0$, ce qui, réinjecté dans l'équation différentielle donne : $\ddot{x}_P + kx_P = +kx_P = a$. Donc $x_P = \frac{a}{k}$
La solution générale de l'équation est donc : $x = x_H + x_P = Acos\omega_0 t + Bsin\omega_0 t + \frac{a}{k}$
Il ne reste plus alors qu'à déterminer A et B en utilisant les deux conditions initiales :
$x(0) = 0$ implique $x(0) = 0 = A + \frac{a}{k}$ ce qui donne $A = -\frac{a}{k}$
$\dot{x}(0) = 0$ implique $\dot{x}(0) = 0 = B\omega_0 = 0$ ce qui donne $B = 0$
Et finalement : $x = \frac{a}{k}(1 - cos\omega_0 t)$ dont on peut vérifier qu'elle vérifie les conditions initiales.



4 Exercices d'application

Levitron Soit un aimant de masse m soumis à son poids et à l'action d'une base aimantée.



On admet que l'interaction base-aimant est telle que l'altitude z du lévitron est régie par l'équation différentielle $\ddot{z} = -\alpha^2 z + \beta$. On suppose que $z(t = 0) = 0$ et $\dot{z}(t = 0) = 0$.

1. Déterminer la solution particulière et la solution de l'équation homogène associée. En déduire $z(t)$.

2. Tracer l'allure de $z(t)$. Proposer une période du mouvement.

3. Reprendre l'étude avec les conditions initiales : $z(t = 0) = \beta/\alpha^2$ et $\dot{z}(t = 0) = v_0$. Ces nouvelles conditions modifient-elles la périodes des oscillations ?

En l'absence de rotation, le lévitron est instable et il est alors régi par l'équation différentielle : $\ddot{z} = \alpha^2 z - \beta$. On suppose que $z(t = 0) = \beta/\alpha^2$ et $\dot{z}(t = 0) = -v_0$.

4. Prévoir le comportement du lévitron. Déterminer $z(t)$. Commenter.

Pratique de la résolution Résoudre les équations ci-après et tracer les allures des solutions sans calculatrice, en précisant les valeurs et les tangentes pertinentes.

$y" + 9y = 0$ avec $y(t = 0) = 0$ et $y'(t = 0) = 1$.

$y"–9y = 0$ avec $y(t = 0) = 0$ et $y'(t = 0) = 1$

$y"–9y = 1$ avec $y(t = 0) = 0$ et $y'(t = 0) = 1$

$y" + y' + 9y = 0$ avec $y(t = 0) = 0$ et $y'(t = 0) = 1$

$y" + y' + 9y = 1$ avec $y(t = 0) = 0$ et $y'(t = 0) = 1$

$y" + 6y' + 9y = 0$ avec $y(t = 0) = 0$ et $y'(t = 0) = 1$

$y" + 7y' + 9y = 0$ avec $y(t = 0) = 0$ et $y'(t = 0) = 1$

Vérifications Soit une tension dans un circuit décrite par la fonction $u(t) = u_0 cos(\omega t)$.

1 - Exprimer $\dot{u}(t)$, $\dot{u}(t = 0)$, $\ddot{u}(t)$ et $\ddot{u}(t = 0)$. Vérifier que l'on a un lien simple entre $\ddot{u}$ et u.

Soit une grandeur $x(t)$ régie par l'équation différentielle : $m\ddot{x} + kx = 0$.

2 - Montrer qu'une solution de la forme $x = Acos(\omega_0 t)$ convient si l'on n'impose pas les conditions initiales. Une telle solution peut-elle vérifier $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0 \neq 0$? Montrer qu'une solution de la forme $x = Asin(\omega_0 t)$ convient si l'on

n'impose pas les conditions initiales. Une telle solution peut-elle vérifier $x(t=0) = x_0$? Vérifier qu'une solution de la forme $x = Acos(\omega_0 t) + Bsin(\omega_0 t)$ convient aussi et peut vérifier $x(t=0) = x_0$ et $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$.

Soit une grandeur $x(t)$ régie par l'équation différentielle : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

3 - Vérifier que $x = \lambda e^{rt}$ est solution de cette équation différentielle si r vérifie une équation caractéristique que l'on précisera. Si l'on prend simplement une des deux racines, r_1, de cette équation, la solution vérifie-t-elle les conditions initiales $x(t=0) = x_0 \in \mathbb{R}$ et $\dot{x}(t=0) = \dot{x_0} \in \mathbb{R}$. Vérifier que si l'on prend une combinaison linéaire de la forme : $x = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$, il est possible de vérifier ces deux conditions initiales à condition que λ et μ soient des complexes qui vérifient deux équations à préciser. Vérifier qu'une solution de la forme $u(t) = Acos(\omega_0 t) + Bsin(\omega_0 t)$ est bien solution et vérifie les conditions initiales avec des expressions simples pour A et B.

Soit maintenant une tension décrite par la fonction $u(t) = Acos(\omega t) + Bsin(\omega t)$.

4 - Exprimer $u(t=0)$, $\dot{u}(t)$, $\dot{u}(t=0)$. Sachant que $u(t=0) = 0$ et $\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0$, déterminer A et B. Tracer l'allure de cette fonction.

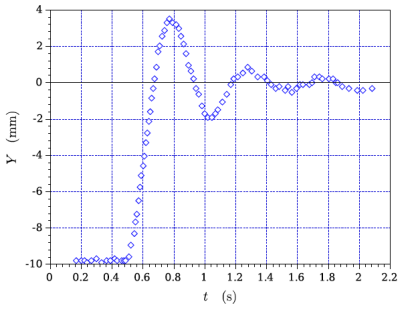
Soit maintenant une tension de la forme : $u(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}(Acos\Omega t + Bsin\Omega t)$.

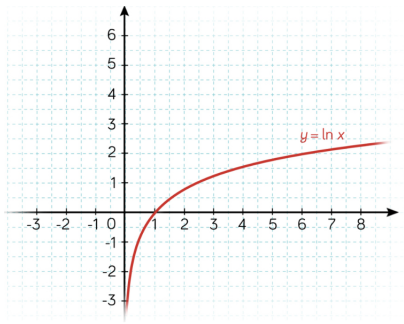
5 - Exprimer $u(t=0)$, $\dot{u}(t)$, $\dot{u}(t=0)$. Sachant que $u(t=0) = 0$ et $\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0$, déterminer A et B. Tracer l'allure de cette fonction.

Soit maintenant une tension de la forme : $u(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} + Be^{-\frac{t}{\tau_2}}$.

6 - Exprimer $u(t=0)$, $\dot{u}(t)$, $\dot{u}(t=0)$. Sachant que $u(t=0) = 0$ et $\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0$, déterminer A et B. Tracer l'allure de cette fonction.

Evolution de la profondeur d'un flotteur On admet que l'altitude d'un flotteur est régie par l'équation différentielle : $\ddot{z} = -\omega_0^2 z - \beta \dot{z}$. On pourra s'aider du tracé de la fonction $f : x \to f(x) = ln(x)$.





1 - Identifier le régime à partir du graphe expérimental. Déterminer le décrément logarithmique et la pseudopériode.

2 - Dans cette question, on pourra utiliser les expressions simplifiées valables si $Q \gg 1$, même si cette inégalité forte n'est pas vérifiée. Déterminer de même le facteur de qualité Q et le temps typique de décroissance τ et la pseudo-pulsation Ω. Commenter la valeur de Q.

Détecteur de particules Un dispositif destiné à détecter des particules ionisantes se comporte sous l'effet de l'une de ces particules comme un générateur pour lequel la tension à ses bornes évolue selon l'équation différentielle : $\ddot{U} + \alpha \dot{U} + \beta U = 0$.

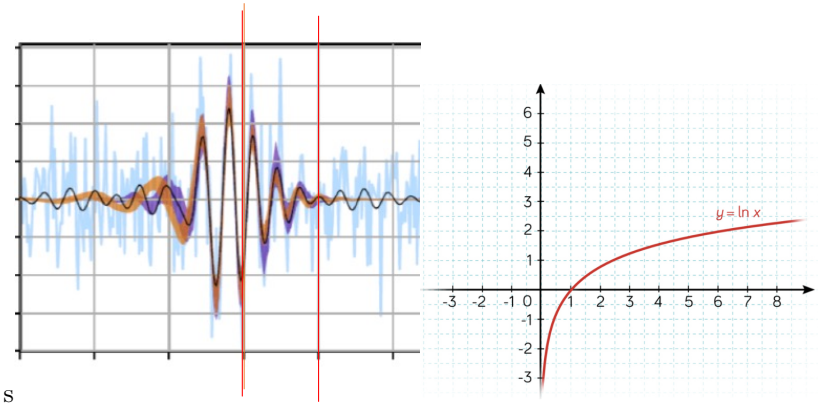
1 - Donner une relation entre α et β pour que l'évolution soit apériodique. On supposera que c'est le cas dans la suite. Réécrire l'équation en utilisant les notations canoniques.

2 - On écrit la solution de cette équation sous la forme : $u(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} + Be^{-\frac{t}{\tau_2}}$. Exprimer τ_1 et τ_2 en fonction de ω_0 et Q.

3 - Exprimer $u(t=0)$, $\dot{u}(t)$, $\dot{u}(t=0)$. Sachant que $u(t=0) = 0$ et $\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0$, déterminer A et B. Tracer l'allure de cette fonction.

4 - Le détecteur ne peut détecter une particule si la valeur maximal du signal engendré est inférieure à une tension seuil qui est la tension minimale mesurable, U_{seuil}. Donner une relation sur $\dot{u}_0$, τ_1, τ_2 et U_{seuil} pour que la particule soit détectable.

Signal d'ondes gravitationnelles Lorsque deux trous noirs collapsent, ils peuvent produire des ondes gravitationnelles qui peuvent être détectées. On s'intéresse au signal obtenu lors de la fusion des deux composantes de GW190521 observée en 2020. Une des courbes expérimentales est la suivante.



Relevé de l'amplitude de l'onde au cours du temps. fonction logarithme.

On cherche à modéliser la partie du graphe située entre les deux traits verticaux rouges - séparés d'une durée de $5.10^{-2}s$ - par une fonction $f(t)$ qui satisfait à l'équation différentielle : $\ddot{f} + \omega_0^2 f + \xi \dot{f} = 0$. On prendra le premier trait vertical rouge comme origine des temps.

1 - Par lecture du graphe, estimer numériquement la position et la pente initiale.

2 - Toujours par lecture du graphe, déterminer approximativement la pseudopériode, le décrément logarithmique, puis le facteur de qualité Q et le temps typique de décroissance. Expliquer qualitativement que l'on puisse confondre Ω et ω_0 dans ce cas. En déduire la valeur numérique de ξ dans ce modèle.

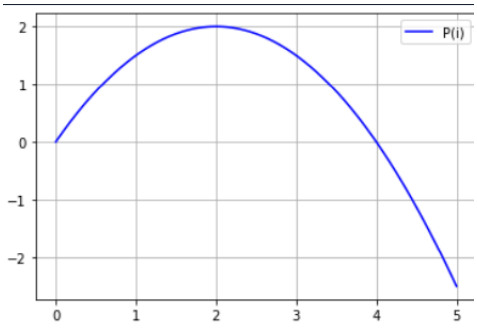
Correction des exercices d'application

1 Graphes

1.1 Tracé d'allures

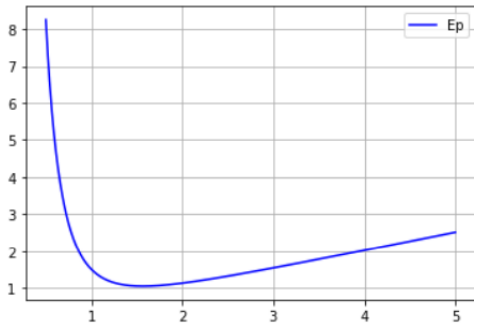
Cf. calculatrice

Puissance débitée par une pile **1 -** On a l'allure :



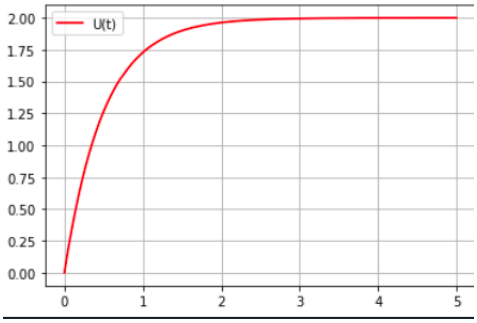
2 - Pour déterminer la valeur de l'intensité qui maximise cette puissance, on calcule la dérivée de la puissance par rapport à I et on cherche l'abscisse où cette dérivée s'annule, ce qui donne :
$\frac{dP}{di} = E_0 - 2Ri$ qui est nulle pour $\boxed{i_0 = \frac{E_0}{2R}}$.
Et la valeur de la puissance maximale est donc :
$\boxed{P(i_0) = \frac{E_0^2}{2R}}$

Mouvement d'un mobile **1 -** On a l'allure :



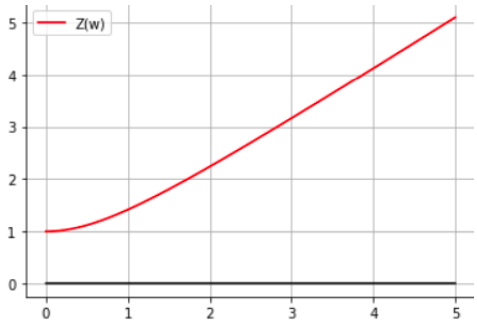
2 - Pour exprimer la position x_0 du minimum local de cette fonction, on cherche l'abscisse d'annulation de sa dérivée, ce qui donne :
$\frac{dE_P}{dx} = -3\frac{k}{x^4} + mgsin\alpha$
qui s'annule en : $\boxed{x_{min} = \left(3\frac{k}{mgsin\alpha}\right)^{1/4}}$

Charge d'un capteur capacitif **1 -** On a l'allure :



2 - La pente initiale de la fonction est la valeur initiale de la dérivée. Or : $U = E(1-e^{-t/\tau})$ donc $\boxed{\frac{dU}{dt} = \frac{E}{\tau}e^{-t/\tau}}$
qui vaut en $t = 0$: $\boxed{\left(\frac{dU}{dt}\right)_{t=0} = \frac{E}{\tau}}$
3 - L'expression de la fonction $h(t)$, tangente à $U(t)$ en $t = 0$ est donnée en adaptant la formule générale de la tangente d'une fonction f de l'argument x en un point x_0 : $f(x) \simeq t(x) = f(x_0) + (x - x_0).\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}$
Ce qui donne ici :
$\boxed{U(t) \simeq h(t) = f(0) + (t - 0).\left(\frac{df}{dt}\right)_0 = 0 + \frac{E}{\tau}t}$
qui est bien tangente à $U(t)$ en $t = 0$.
4 - Si l'on note t_{10} le temps pour que $U(t)$ atteigne 10% de sa valeur maximale qui est E, on a par définition :
$U(t_{10}) = \frac{E}{10} = E.(1 - e^{-t_{10}/\tau})$
et de même : $U(t_{90}) = \frac{9E}{10} = E.(1 - e^{-t_{90}/\tau})$
dont les inversions donnent : $t_{10} = -\tau ln\frac{9}{10}$ et $t_{90} = -\tau ln\frac{1}{10}$.
Par définition : $\boxed{t_m = t_{90} - t_{10} = \tau ln9}$

Impédance d'un dipôle **1 -** L'allure de ce module en fonction de ω :



2 - Le domaine de ω dans lequel il est pertinent de considérer z comme une constante correspond à la situation pour laquelle le terme en $\omega^2L^2 \ll R^2$ donc si : $\boxed{\omega \ll \frac{R}{L} = \omega_C}$; dans ce cas : $\boxed{z = \sqrt{R^2 + \omega^2L^2} \simeq \sqrt{R^2} = R}$

Au contraire, le domaine de ω dans lequel il est pertinent de considérer z comme une fonction linéaire correspond à la situation pour laquelle le terme $\omega^2 L^2 \gg R^2$ donc $\boxed{\omega \gg \frac{R}{L} = \omega_C}$

dans ce domaine : $\boxed{z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \simeq \sqrt{\omega^2 L^2} = \omega L}$

1.2 Modèle d'une fonction

1. Pour déterminer le maximum de la fonction $y(x) = \frac{kx}{x^2+x_0^2}$, il suffit de voir quand sa dérivée s'annule :

$\frac{dy}{dx} = k\frac{\left(x^2+x_0^2\right)-2x^2}{\left(x^2+x_0^2\right)^2}$ qui s'annule clairement quand $\boxed{x = x_0}$

La valeur du maximum est donc $\boxed{y(x_0) = \frac{k}{2x_0}}$.

On voit sur la courbe que le max est atteint en $x = x_0 = 1$ ce qui donne la valeur de $x_0 = 1$ et on voit que ce max vaut $y_{max} = 3,5 = \frac{k}{2\times 1}$ donc $\boxed{k = 7}$

2. Pour déterminer le modèle affine de cette caractéristique au voisinage de $x = 3$, on utilise l'équation de la tangente : $t(x) = y'(x_1).(x - x_1) + y(x_1)$ pour $\boxed{x_1 = 3}$

- soit on utilise l'expression de $y(x)$ avec les valeurs de k et de x_0 déterminées précédemment et on a : $\boxed{y(x_1 = 3) = 2}$ et $\boxed{y'(x_1) = -0,56}$
- Soit on utilise le graphe, on lit que $\boxed{y(x_1 = 3) = 2}$ et que $\boxed{y'(x_1) = -0,6}$. Donc, le modèle affine de la fonction au voisinage de $x_1 = 3$ est $\boxed{t(x) = -0,6.(x - 3) + 2}$

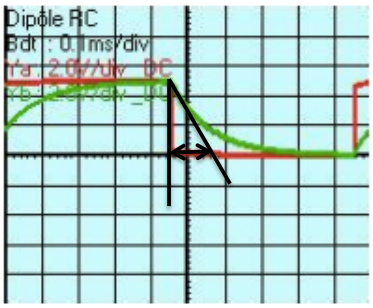
3. L'équation qui permet de savoir à quelle distance de ce point la modélisation s'aloigne de la réalité de plus de $0,1$ correspond à rechercher la solution de l'équation $y(x) - t(x) = 0,1$ i.e. $\boxed{y(x) - t(x) = \frac{7x}{x^2+1} + 0,6.(x - 3) - 2 = 0,1}$

1.3 Mise en forme d'un signal

Les réglages sont $0,1ms/div$ et $2V/div$.

1. A l'aide du graphe, l'amplitude est $2,5$ carreaux donc $\boxed{u_0 = 5V}$

Pour le temps typique de décroissance, on utilise la méthode de la tangente à l'origine, mais il faut faire attention à l'origine des temps.



Sur le graphe, on lit une intersection qui a lieu 1 carreau après le début de la décroissance, donc $\boxed{\tau = 0,1ms}$.

2. Le signal $u(t)$ est une exponentielle décroissante, qui comme à décroître en un instant t_0, donc elle est de la forme $\boxed{u = u_0 e^{-(t-t_0)/\tau}}$.

Or t_0 est négatif sur le graphe et il correspond environ à un $1/2$ carreau, donc $t_0 = -0,05ms$

L'amplitude du signal au moment où l'alimentation reprend, i.e. $4,5$ carreaux après $t = 0$ i.e. à l'instant $t_1 = 0,045ms$ est donc donnée par $\boxed{u(t_1) = u_0 e^{-(t_1-t_0)/\tau}}$ ce qui donne numériquement $u(t_1) =$

Ce signal est nul avec une précision que l'on peut estimer par le rapport de la valeur en t_1 et de la valeur maximale, i.e. u_0, ce rapport vaut $e^{-(t_1-t_0)/\tau} =$

La largeur du trait de mesure est de l'ordre de $1/10$ de carreau, ce qui correspond à une imprécision de $2/10 = 0,2V$ ce qui est nettement supérieur à la valeur théorique en t_1. On peut donc considérer qu'aux incertitudes expérimentales près, le signal est nul en t_1.

2 Opérations sur les fonctions

2.1 Dérivation

Régimes transitoires **1 -** On a donc :

$\boxed{\dot{u}(t) = -\omega u_0 sin(\omega t)}$, donc

$\boxed{\dot{u}(t = 0) = 0}$

et $\boxed{\ddot{u}(t) = -\omega^2 u_0 cos(\omega t)}$

et donc $\boxed{\ddot{u}(t = 0) = -\omega^2 u_0}$

On retrouve le fait que la valeur de la dérivée d'une fonction en un point n'a rien à voir avec la valeur de cette fonction en ce point.

2 - On a à présent :

$u(t = 0) = A$

$\dot{u}(t) = -\omega A sin(\omega t) + B\omega cos(\omega t)$

et donc : $\dot{u}(t = 0) = 0 + B\omega$.

Sachant que $u(t = 0) = 0 = A$

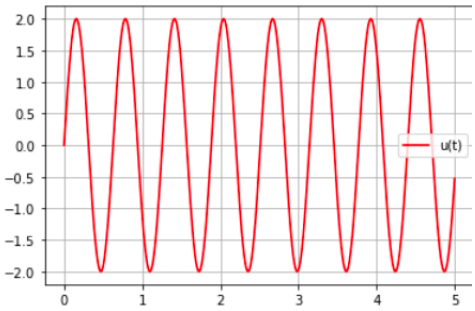
et $\dot{u}(t = 0) = \dot{u}_0 = B\omega$

Ce qui donne : $A = 0$ et $B = \frac{\dot{u}_0}{\omega}$

Ainsi la fonction recherchée est :

$\boxed{u(t) = \frac{\dot{u}_0}{\omega} sin(\omega t)}$

L'allure de cette fonction est :



3 - On a :

$u(t = 0) = A$

ensuite, on a (il faut faire la dérivée d'une somme de deux produits, ce qui donne quatre termes) :

$\dot{u}(t) = -e^{-\frac{t}{\tau}} A\Omega sin\Omega t - \frac{A}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} cos\Omega t + e^{-\frac{t}{\tau}} B\Omega cos\Omega t - \frac{B}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} sin\Omega t$

Si on évalue cette fonction en $t = 0$, on a :

$\dot{u}(t = 0) = -\frac{A}{\tau} + B\Omega$.

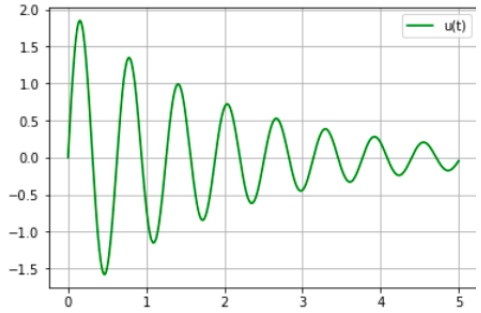
Sachant que $u(t = 0) = 0 = A$

et $\dot{u}(t = 0) = \dot{u}_0 = -\frac{A}{\tau} + B\Omega$

ce qui donne : $A = 0$ et $B = \frac{\dot{u}_0}{\Omega}$

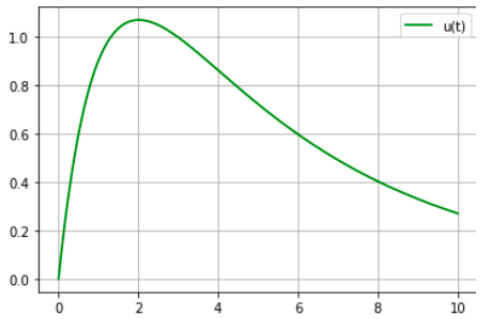
La fonction recherchée est donc :

$\boxed{u(t) = \frac{\dot{u}_0}{\Omega} e^{-\frac{t}{\tau}} (sin\Omega t)}$
Dont l'allure est :



Soit maintenant une tension de la forme : $u(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} + Be^{-\frac{t}{\tau_2}}$.

4 - On a : $u(t=0) = A + B$
ensuite : $\dot{u}(t) = -\frac{A}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{B}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}}$
donc : $\dot{u}(t=0) = -\frac{A}{\tau_1} - \frac{B}{\tau_2}$.
Sachant que $u(t=0) = 0 = A + B$
et $\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 = -\frac{A}{\tau_1} - \frac{B}{\tau_2}$
La première équation donne : $B = -A$, qui, réinjectée dans la deuxième donne : $\dot{u}_0 = -\frac{A}{\tau_1} + \frac{A}{\tau_2}$ ce qui donne : $A = \frac{\dot{u}_0 \tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}$
Donc : $B = -\frac{\dot{u}_0 \tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}$
Donc la fonction étudiée est : $\boxed{u(t) = \frac{\dot{u}_0 \tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \left(e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)}$
La fonction est nulle à $t = 0$, puis croissante si $\dot{u}_0 > 0$, elle atteint un max puis tend vers 0 :



Lien fonction/dérivée **1 -** On a : $\dot{v} = -\frac{v_0}{\tau} e^{-t/\tau}$.
On voit que : $\dot{v} = \frac{-v}{\tau}$
Si cette relation est issue du principe fondamental de la dynamique appliqué au paquebot, on a : $m\dot{v} = F_{ext}$ en projection, ce qui donne par identification : $\boxed{F_{ext} = \frac{-mv}{\tau}}$
2 - On a : $\dot{v} = \frac{-\alpha v_0}{(1+\alpha t)^2}$. On a donc : $\dot{v} = \frac{-\alpha v_0}{(1+\alpha t)^2} = \frac{-\alpha v_0^2}{v_0 (1+\alpha t)^2} = \frac{-\alpha v^2}{v_0}$ (il manquait le v_0 dans l'énoncé)
On a : $m\dot{v} = F_{ext} = \frac{-\alpha m v^2}{v_0}$ ce qui donne : $\boxed{F_{ext} = \frac{-\alpha m v^2}{v_0}}$
3 - On a : $\dot{z}(t) = -\omega z_0 sin(\omega t)$ puis $\ddot{z}(t) = -\omega^2 z_0 cos(\omega t)$
On en déduit que $\boxed{\ddot{z} = -\omega^2 z}$

Fonctions composées **1 -** Le terme de gauche est : $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2} m v^2) = mv\dot{v}$.
Par identification, on a donc : $mv\dot{v} = -\alpha v^3$
Ce qui donne : $\boxed{m\dot{v} = -\alpha v^2}$

2 - Si l'on dérive cette équation par rapport au temps, on obtient :
$\frac{d}{dt}(LC\dot{q}^2 + q^2) = \frac{d}{dt}(cste)$
$2LC\dot{q}\ddot{q} + 2q\dot{q} = 0$
ce qui donne l'équation différentielle : $\boxed{LC\ddot{q} + q = 0}$
3 - On a $\frac{dz}{dr} = \frac{2r}{2\sqrt{r_0^2 - r^2}} = \frac{r}{\sqrt{r_0^2 - r^2}}$
4 - On a donc : $\boxed{\dot{z} = \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{r}{\sqrt{r_0^2 - r^2}}\frac{dr}{dt}}$
Commentaires :
si $r = 0$, on est au fond du saladier et $\dot{z}(r=0) = 0$, ce qui est logique, car le fond du saladier est horizontal : même si r varie ($\dot{r} \neq 0$), z ne varie pas.
Si $r = r_0$, on est sur le bord du saladier, donc celui-ci est localement vertical, et donc la moindre variation de r donne une très grande variation de z.

2.2 Différentielles

Relation de conjugaison La relation de conjugaison peut se réécrire : $\boxed{x' = \frac{fx}{f+x}}$.
Si l'on calcule la différentielle de cette fonction de x en x_0 cela donne :
$\boxed{dx' = \frac{f(f+x_0) - fx_0}{(f+x_0)^2} dx = \frac{f^2}{(f+x_0)^2} dx}$

Champ de gravité terrestre **1.** La variation infinitésimale dg est donc $\boxed{dg = \frac{dg}{dr} dr = -g_0 \frac{2R_T^2}{r^3} dr}$

2. Pour $dr = h = 30km$, on a $\boxed{dg = 10^{-3} S.I.}$. Comparée à g_0, cette variation est négligeable : l'approximation $g(r) \sim g_0$ est une bonne approximation.

Dérivées et différentielles On a :
- $f_1' = ax^{a-1}$ et $\boxed{df_1 = ax^{a-1}dx}$
- $f_2' = b(x+a)^{b-1}$ et $\boxed{df_2 = b(x+a)^{b-1}dx}$
- $f_3' = ca(ax+b)^{c-1}$ et $\boxed{df_3 = ca(ax+b)^{c-1}dx}$
- $f_4' = 2sinxcosx$ et $\boxed{df_4 = 2sinxcosxdx}$
- $f_5' = kcoskx$ et $\boxed{df_5 = (kcoskx)dx}$
- $f_6' = -2ksinkxcoskx$ et $\boxed{df_6 = -2ksinkxcoskxdx}$
- $f_7' = \frac{a}{x}$ et $\boxed{df_7 = \frac{adx}{x}}$
- $f_8' = \frac{a}{ax+b}$ et $\boxed{df_8 = \frac{adx}{ax+b}}$
- $f_9' = 2axexp(ax^2)$ et $\boxed{df_9 = 2axexp(ax^2)dx}$

Variations infinitésimales **1.** La variation infinitésimale d'énergie dE si la quantité de mouvement passe de p_0 à $p_0 + dp$ à m fixée est :
$\boxed{dE = \frac{dE}{dp} dp = \frac{2p}{2m} dp = \frac{p_0}{m} dp}$ si on la calcule en p_0

2. La variation infinitésimale d'énergie dE si la masse passe de m_0 à $m_0 + dm$ à quantité de mouvement p_0 fixée :
$\boxed{dE = \frac{dE}{dm} dm = \frac{-p_0^2}{2m^2} dm = \frac{-p_0^2}{2m_0^2} dm}$

3. On a $p = \sqrt{2mE}$ et donc $\boxed{dp = \frac{dp}{dm} dm = \sqrt{2E} \frac{dm}{2\sqrt{m_0}}}$

3 Fonctions sinusoïdales

Ecriture d'une fonction **1.** $u(t)$ est une sinusoïde de valeur moyenne $u_{moy} = 2V$, d'amplitude $u_0 = 1V$, de période $T = 20ms$ et qui commence à sa valeur moyenne. Pour toutes ces raisons, on peut la mettre sous la forme :

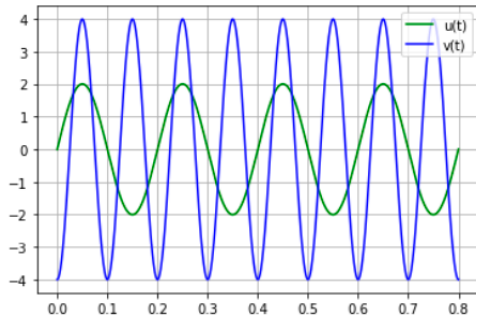
$$\boxed{u(t) = u_{moy} + u_0 sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}$$

Sa valeur moyenne est égale à $\boxed{u_{moy}}$ car la moyenne du *sin* est nulle.

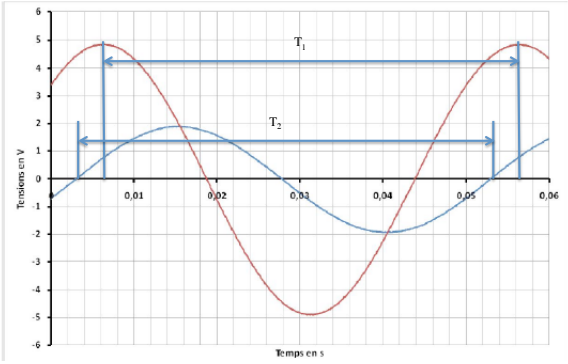
La valeur efficace de sa composante alternative est $\boxed{u_0/\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}}$

2 - On veut tracer une fonction sinusoïdale d'amplitude $u_0 = 2V$ et de période $T = 2ms$, donc :

$u(t) = u_0.sin(\frac{2\pi}{T}t)$, et sur le même schéma un signal sinusoïdal d'amplitude double et de fréquence double du précédent, initialement déphasé d'un quart de période donc : $u(t) = 2u_0.sin(\frac{2\pi}{T/2}(t - \frac{1}{4}.\frac{T}{2}))$, ce qui donne :



Ecriture de deux fonctions



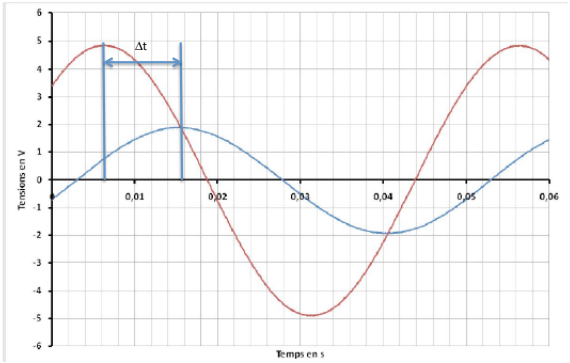
1. Les périodes se lisent sur le graphe : $\boxed{T_1 = 0,05s}$ et $\boxed{T_2 = 0,05s}$. Les deux signaux ont même période. La pulsation associée est :

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,05} = 40\pi = 122rad.s^{-1}}$$

2. Le signal rouge est en avance sur le bleu. Si l'on note Δt l'avance temporelle de rouge par rapport à bleu, on peut mesurer : $\boxed{\Delta t = 0,01s}$.

Et on a donc un déphasage :

$$\boxed{\varphi_{SE} = \frac{2\pi\Delta t}{T} = \frac{2\pi 0,01}{0,05}rad}$$



Il est cohérent d'avoir un déphasage inférieur à $\boxed{\pi/2}$ au vu des deux courbes, car la courbe bleu atteint son maximum avant que la courbe rouge n'atteigne 0.

3. Les amplitudes se lisent directement sur le graphe $\boxed{u_{20} = 5V}$ pour le rouge et $\boxed{u_{10} = 2V}$ pour le bleu.

4. Les deux signaux $u_1(t)$ et $u_2(t)$ correspondants, en prenant comme origine des temps l'instant où $u_2(t)$ est maximale, s'écrivent :

$u_2(t) = u_{20}cos(\frac{2\pi}{T_2}t) = u_{20}cos(\omega_2 t)$

Et $u_1(t) = u_{10}cos(\frac{2\pi}{T_1}(t - t_{m_1})) = u_{20}cos(\omega_1(t - t_{m_1}))$ où t_{m1} est l'instant où 1 est maximale.

Ecritures d'une fonction **1 -** On a une forme générale : $u(t) = u_1 + u_0 sin(\omega t + \varphi)$

On lit que la valeur moyenne est nulle, donc : $\boxed{u_1 = 0}$ donc : $u(t) = u_0 sin(\omega t + \varphi)$

On lit que le maximum vaut $3V$, donc $\boxed{u_0 = 3V}$

On lit que la période vaut : $T = 5s$ donc $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{5}rad.s^{-1}}$

Pour déterminer φ,

- Méthode 1 : on utilise l'instant de première annulation, noté t_0, qui est tel que $u(t_0) = 0$, ce qui implique que $\omega t_0 + \varphi = 0$. On lit sur le graphe que $t_0 \simeq 0,5s$, donc : $\boxed{\varphi = -\omega t_0 \simeq -\frac{2\pi}{5}.0,5 \simeq -0,6}$. On rappelle que φ est sans dimension. On a un signe négatif cohérent avec le fait que la fonction est en retard par rapport à un *sin* normal.
- Méthode 2 : on utilise l'instant t_{max} où le premier maximum est atteint, qui est tel que $u(t_{max}) = u_0$, ce qui implique que $\omega t_{max} + \varphi = \pi/2$. On lit sur le graphe que $t_{max} \simeq 1,7s$, donc : $\varphi = \pi/2 - \omega t_{max} \simeq 1,5 - \frac{2\pi}{5}.1,7 \simeq -0,6$. Ce qui est cohérent avec avant.
- Méthode 3 : on utilise la valeur initiale de $u(t)$: $u(0) = u_0 sin\varphi$. On lit : $u(0) = -1,5$. Donc : $\varphi = sin^{-1}(\frac{u(0)}{u_0}) = sin^{-1}(\frac{-1,5}{3}) =$ $\boxed{\varphi = sin^{-1}(\frac{-1}{2}) = -\pi/6 \simeq -0,5}$, ce qui est cohérent avec ce qui précède.

D'après ce qui précède : $\boxed{u(t) = u_0 sin(\omega t + \varphi) = u(t) = u_0 sin(\omega(t - t_0))}$

2 - De même que précédemment : $u(t)$ peut se mettre sous la forme :

$u(t) = u_2 + u_3 cos(\omega' t + \varphi')$

Et $< u(t) >= 0$ donc $u_2 = 0$

De même, on a : $u_3 = 3V$ et $\omega' = \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{5}rad.s^{-1}$

Pour $\varphi' = \varphi - \pi/2$.

Si on note t'_0 l'instant du premier maximum de la fonction, $t'_0 = 1,7s$

On a : $\boxed{u(t) = u_3 cos(\omega'(t - t'_0))}$

Fonction décalée **1 -** Le signal s'écrit sous la forme : $f(t) = S_0 + S_1 sin(\omega t + \varphi)$.

La valeur moyenne est $S_0 = 2V$

La valeur maximale est $S_0 + S_1 = f_{max} = 5$ ce qui donne : $\boxed{S_1 = f_{max} - S_0 = 5 - 2 = 3V}$

La période vaut $T = 3s$ donc : $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3} \simeq 2rad.s^{-1}}$

Pour déterminer φ :

- Méthode 1 : on utilise l'instant de **première annulation du terme variable**, noté t_0, qui est tel que $f(t_0) = S_0 + S_1 sin(\omega t_0 + \varphi) = S_0$, ce qui implique que $\omega t_0 + \varphi = 0$. On lit sur le graphe que $t_0 \simeq 0,2s$, donc : $\boxed{\varphi = -\omega t_0 \simeq -\frac{2\pi}{5}.0,2 \simeq -0,2}$. On rappelle que φ est sans dimension. On a un signe négatif cohérent avec le fait que la fonction est en retard par rapport à un *sin* normal.
- Méthode 2 : on utilise l'instant t_{max} où le premier maximum est atteint, qui est tel que $f(t_{max}) = S_0 + S_1 sin(\omega t_{max} + \varphi) = S_0 + S_1$, ce qui implique que $\omega t_{max} + \varphi = \pi/2$. On lit sur le graphe que $t_{max} \simeq 1s$, donc : $\varphi = \pi/2 - \omega t_{max} \simeq 1,5 - \frac{2\pi}{5}.1 \simeq -0,2$. Ce qui est cohérent avec avant.
- Méthode 3 : on utilise la valeur initiale de $f(t)$: $f(0) = S_0 + S_1 sin\varphi$. On lit : $f(0) = 1,2$. Donc : $\boxed{\varphi = sin^{-1}(\frac{f(0)-S_0}{S_1}) = sin^{-1}(\frac{1,2-2}{3}) \simeq -0,2}$

D'après ce qui précède : $\boxed{f(t) = S_0 + S_1 sin(\omega t + \varphi) = S_0 + S_1 sin(\omega(t - t_0))}$

2 - Si l'on veut écrire la fonction à l'aide d'un *cos*, on a :

$\boxed{f(t) = S_0 + S_1 cos(\omega(t - t_{max}))}$ avec les mêmes notations que précédemment.

Somme de fonctions trigonométriques **1 -** On suppose que $f(t) = x_2 cos(\omega t + \varphi)$. On a :

$f(t) = x_2 cos(\omega t) cos\varphi - x_2 sin(\omega t) sin\varphi$

Les identifications donnent :

$\boxed{x_0 = x_2 cos\varphi \text{ et } x_1 = -x_2 sin\varphi}$

2 - On a ainsi : $x_0^2 + x_1^2 = x_2^2 cos^2\varphi + x_2^2 sin^2\varphi = x_2^2$

Donc $\boxed{x_2 = \sqrt{x_0^2 + x_1^2}}$

3 - Si l'on fait le rapport des deux équations de 1, on a :

$\frac{x_1}{x_0} = -tan\varphi$

Donc

$\boxed{\varphi = tan^{-1}(\frac{-x_1}{x_0}) = -tan^{-1}(\frac{x_1}{x_0})}$

L'instant t_0 pour lequel $f(t)$ est maximale correspond à $f(t_0) = x_2 cos(\omega t_0 + \varphi) = x_2$

Donc : $\omega t_0 + \varphi = 0$ Donc :

$\boxed{t_0 = -\frac{\varphi}{\omega} = \frac{1}{\omega} tan^{-1}(\frac{x_1}{x_0})}$

Si $x_1/x_0 \ll 1$, $t_0 \simeq 0$, ce qui cohérent car :

$f(t) = x_0 cos(\omega t) + x_1 sin(\omega t) \simeq x_0 cos(\omega t)$ qui est bien maximale en 0

Si $x_1/x_0 \gg 1$, $t_0 \simeq \frac{\pi}{2\omega}$, ce qui cohérent car :

$f(t) = x_0 cos(\omega t) + x_1 sin(\omega t) \simeq x_1 sin(\omega t)$ qui est bien maximale en $\frac{\pi}{2\omega}$.

4 Développements limités

Vérification Les développements limités corrects sont : $\frac{1}{1+x} \sim 1-x$; $\frac{1}{a+x} \sim \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2}$; $\frac{1}{(1+x)^{3/2}} \sim 1 - \frac{3x}{2}$; $\frac{1}{(d+x)^4} \sim \frac{1}{d^4} - \frac{4x}{d^5}$

On vérifie notamment sur la deuxième formule que le développement limité ne change pas l'homogénéité d'une formule.

Solution approchée On effectue les développements limités des diverses fonctions : $cosx \sim 1$, $(1-x)^{-2} \sim 1+2x$

donc le développement du terme de gauche donne $k\frac{cos(x)}{(1-x)^2} \sim k\,(1+2x) = x$ donc

$\boxed{x = \frac{k}{1-2k} = \frac{0,1}{0,8} = 0,12}$

On peut comparer cette solution à la solution issue d'une résolution numérique exacte qui est $\boxed{x = 0,13}$. On a un résultat relativement proche : le développement limité est satisfaisant.

Pression dans une classe **1.** L'argument de l'exponentielle ne doit pas avoir de dimension : H est forcément une longueur, car h/H est sans dimension. Sa valeur numérique est de l'ordre de $8km$. C'est beaucoup plus grand que la hauteur de la classe : l'argument de l'exponentielle reste pratiquement nul sur la hauteur de la classe : on peut considérer la pression comme presque constante sur la hauteur de la classe. on peut déterminer une expression approchée au premier ordre de $P(z) - P_0$ par développement limité : $P(z) = P_0 e^{-z/H} \sim P_0\left(1 - \frac{z}{H}\right)$ donc

$\boxed{P(z) - P_0 \sim -P_0 \frac{z}{H}}$

2. L'erreur maximale que l'on commet en considérant la pression uniforme dans l'enceinte est de l'ordre de $-P_0 \frac{z}{H}$ donc en valeur relative de

$\boxed{\frac{-P_0 \frac{z}{H}}{P_0} = \frac{-z}{H}}$

ce qui est complètement négligeable.

Champ de gravité terrestre **1.** Le champ de gravité terrestre est $g(r) = g_0 R_T^2 / r^2$. Pour faire le développement limité à l'ordre 1 de ce champ au voisinage de la surface terrestre, on fait apparaître une grandeur petite devant en utilisant le fait que $r - R_T << R_T$.

$g(r) = \frac{g_0 R_T^2}{r^2} = \frac{g_0 R_T^2}{(R_T + r - R_T)^2} = \frac{g_0 R_T^2}{R_T^2\left(1 + \frac{r-R_T}{R_T}\right)^2} \sim \frac{g_0 R_T^2}{R_T^2}\left(1 - 2\frac{r-R_T}{R_T}\right) = g_0\left(1 - 2\frac{r-R_T}{R_T}\right)$

$\boxed{g(r) \sim g_0\left(1 - 2\frac{r-R_T}{R_T}\right)}$

2. On approxime une fonction en r^{-2} par sa fonction tangente. Or vu la courbure de r^{-2}, sa tangente est sous la courbe : on a donc tendance à sous-estimer la norme de $g(r)$ en en faisant le développement limité à l'ordre 1.

Rayonnement d'un corps En utilisant la formule de Taylor, on a :

$P = S\sigma(T^4 - T_0^4) \sim 4S\sigma T_0^3 (T - T_0)$

L'autre méthode consiste à poser :

$T = T_0 + T - T_0 = T_0(1 + \frac{T-T_0}{T_0})$
ce qui donne :
$S\sigma(T^4 - T_0^4) = S\sigma(T_0^4(1 + \frac{T-T_0}{T_0})^4 - T_0^4)$
$\sim S\sigma(T_0^4(1+4\frac{T-T_0}{T_0}) - T_0^4) = S\sigma(T_0^4 + 4T_0^3(T-T_0) - T_0^4)$

$$\boxed{\sim 4S\sigma T_0^3(T - T_0)}$$

La mission Darwin **1.** On a la relation :

$$0 = -\frac{GM_S}{d^2} + \frac{GM_T}{(D-d)^2} + \Omega^2 d$$

L'expression de la vitesse angulaire donne, si on la réinjecte dans cette équation :

$$0 = -\frac{GM_S}{d^2} + \frac{GM_T}{(D-d)^2} + \frac{GM_S}{D^3} d$$

qui peut se réécrire :

$$0 = -\frac{1}{d^2} + \frac{\alpha}{(D-d)^2} + \frac{d}{D^3}$$

puis :

$$0 = -1 + \frac{\alpha x^2}{(1-x)^2} + x^3$$

2. On peut simplifier cette équation si $1 - x = \varepsilon << 1$, elle devient :

$$0 = -1 + \frac{\alpha\,(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^2} + (1-\varepsilon)^3$$

qui devient, après développement limité à l'ordre 1 :

$$0 = -1 + \frac{\alpha\,(1)^2}{\varepsilon^2} + (1 - 3\varepsilon) = \frac{\alpha}{\varepsilon^2} + (-3\varepsilon)$$

donc $\frac{\alpha}{\varepsilon^2} = 3\varepsilon$ donc
$\boxed{\varepsilon = \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{1/3}}$

ce qui donne numériquement quelque chose de très proche de la solution numérique.

5 Equations différentielles d'ordre 1

Quelques outils de base Cf. cours.

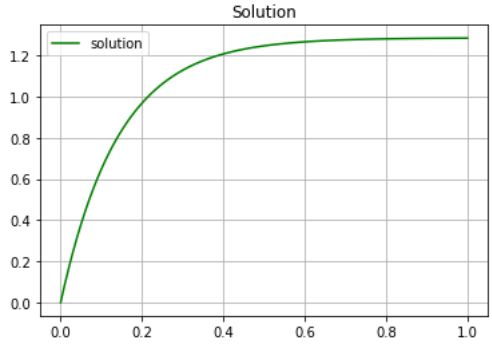
Phase d'accélération d'un TGV, modèle simple **1.** On peut retrouver ces caractéristiques par une résolution analytique :

- La solution de $m\frac{dv}{dt} = F_0 - bv$ est la somme de la solution particulière $v_P = F_0/b$ et de la solution de l'équation homogène associée $v_H = ke^{-t/\tau'}$ avec $\tau' = m/b$. On a donc : $v = \frac{F_0}{b} + ke^{-t/\tau'}$
- Si $v(0) = 0$, cela implique $0 = \frac{F_0}{b} + k$ donc $k = -\frac{F_0}{b}$, ce qui donne $v = \frac{F_0}{b}(1 - e^{-t/\tau'})$

2 - Si $v(0) = v_0$, cela implique $v_0 = \frac{F_0}{b} + k$ donc $k = v_0 - \frac{F_0}{b}$, ce qui donne

$$\boxed{v = \frac{F_0}{b} + (v_0 - \frac{F_0}{b})e^{-t/\tau'}}$$

Toutes ces évolutions sont cohérentes avec les analyses qualitatives, et notamment avec le fait que le temps typique d'évolution n'est pas une fonction des conditions initiales.



Comportement de la membrane d'un axone **1.** D'après les graphes, on peut proposer comme expression pour $V(t)$:

$$V(t) = V_f + (V_m - V_f)e^{-t/\tau}$$

où V_m est la valeur initiale, V_f la valeur finale et τ le temps typique d'évolution de l'exponentielle.

2. L'équation différentielle vérifiée par $V(t)$ dans cette partie est donc forcément de la forme :

$$\tau\frac{dV}{dt} + V = V_f$$

avec $V(t = 0) = V_m$ comme condition initiale.

3. Si la dépolarisation est stoppée à une date $t_S = 3\tau$, la valeur de $V(t)$ est alors : $V(t_S) = V_f + (V_m - V_f)e^{-t_S/\tau}$

Si $V(t)$ est alors régie par la même équation que précédemment, mais sans second membre, on a :

$$\boxed{\tau\frac{dV}{dt} + V = 0 \text{ avec } V(t_s) = V(t_s)}$$

On a une solution de la forme $V(t) = \lambda e^{-t/\tau}$. Mais comme on a une condition initiale en t_s, il vaut mieux l'écrire sous la forme : $V(t) = \lambda e^{-(t-t_s)/\tau}$

Et on utilise alors la condition initiale, ce qui donne :
$V(t_s) = \lambda$
Et donc :

$$\boxed{V(t) = V(t_s)e^{-(t-t_s)/\tau}}$$

Numériquement : A l'aide du graphe, on voit qu'en régime permanent, l'augmentation de ddp vaut : $V_f - V_m = 10mV$. Le temps typique de mise en place de cette ddp est de l'ordre de $\tau = 1ms$ d'après le graphe.

Equations non-linéaires

Evolution d'une étoile double **1 -** Pour résoudre, on sépare les variables :

$R^3 dR = -k dt$

Pour on identifie les intégrales à bornes correspondantes :

$\int_{R'=R_0}^{R} R'^3 dR' = -k \int_{t'=0}^{t} dt'$

Ce qui donne : $\frac{R^4}{4} - \frac{R_0^4}{4} = -kt$

Ce qui donne : $R = \left(R_0^4 - 4kt\right)^{1/4} = R_0 \left(1 - \frac{4kt}{R_0^4}\right)^{1/4}$

On a donc une trajectoire spirale.

2 - Le temps $\tau_{1/2}$, tel que $R(\tau_{1/2}) = R_0/2$ est donné par :

$$\boxed{R(\tau_{1/2}) = R_0/2 = R_0 \left(1 - \frac{4k\tau_{1/2}}{R_0^4}\right)^{1/4}}$$

Collapse d'étoiles et ondes gravitationnelles **1 -** Si l'énergie mécanique diminue, la distance $d(t)$ diminue. Les étoiles décrivent une évolution spirale l'une vers l'autre. On a

$\frac{df}{dt} = K f^{11/3}$

On voit sur le graphe suivant que f est croissante, donc :

$$\boxed{K > 0}$$

par ailleurs, f est une fonction décroissante de la distance qui est une fonction décroissante du temps, donc, il est logique que f soit une fonction croissante du temps.

On a :

$\frac{df}{f^{11/3}} = K dt$

ce qui donne :

$\frac{3}{8}\left(\frac{1}{f_0^{8/3}} - \frac{1}{f^{8/3}}\right) = Kt$

Ce qui donne :

$f = \frac{1}{\left(\frac{1}{f_0^{8/3}} - \frac{8Kt}{3}\right)^{3/8}}$

Donc :

$$\boxed{f = \frac{f_0}{\left(1 - f_0^{8/3}\frac{8Kt}{3}\right)^{3/8}} \text{ ce qui donne une évolution de la la même forme que l'évolution expérimentale.}}$$

2 - On a : $f = \frac{f_0}{\left(1 - f_0^{8/3}\frac{8Kt}{3}\right)^{3/8}}$

Donc : $ln\frac{f}{f_0} = ln\left(1 - f_0^{8/3}\frac{8Kt}{3}\right)^{-3/8} = -\frac{3}{8} ln\left(1 - f_0^{8/3}\frac{8Kt}{3}\right)$

Quand t est petit, on peut faire un développement limité de l'expression précédente, ce qui donne :

$ln\frac{f}{f_0} \simeq -\frac{3}{8}\left(-f_0^{8/3}\frac{8Kt}{3}\right) = f_0^{8/3} Kt$

$$\boxed{lnf \text{ doit donc avoir une allure linéaire pour les petits temps, ce qui est le cas expérimentalement.}}$$

3 - On a : $\frac{df}{f^{11/3} dt} = K$

Donc : $\frac{[f]}{\left[f^{11/3}\right][t]} = [K]$

Donc : $[K] = \frac{s^{-1}}{s^{-11/3} s} = s^{5/3}$

On admet que la constante K de l'équation précédente ne dépend que de M, G et c donc :

$[K] = G^\alpha M^\beta c^\gamma = \left(kg^{-1}m^3 s^{-2}\right)^\alpha (kg)^\beta (m.s^{-1})^\gamma$

$[K] = \left(kg^{-\alpha} m^{3\alpha} s^{-2\alpha}\right)(kg^\beta)(m^\gamma . s^{-\gamma}) = s^{5/3}$

Donc, par identification, on a :

$-\alpha + \beta = 0$

$3\alpha + \gamma = 0$

$-2\alpha - \gamma = 5/3$

Donc si l'on somme les deux dernières équations, on a :

$\alpha = 5/3$

$\gamma = -5$

$\beta = 5/3$

Finalement, on a :

$$\boxed{K = \frac{G^{5/3} M^{5/3}}{c^5}}$$

4 - On reprend l'expression approchée aux temps courts :

$ln\frac{f}{f_0} \simeq f_0^{8/3} Kt = f_0^{8/3} \frac{G^{5/3} M^{5/3}}{c^5} t$

Donc la pente de $ln\frac{f}{f_0}$ est : $f_0^{8/3} \frac{G^{5/3} M^{5/3}}{c^5}$

Numériquement, on a une pente de $p \simeq \frac{ln2}{8} \simeq 0,1$

Donc : $f_0^{8/3} \frac{G^{5/3} M^{5/3}}{c^5} = p$ donne : $M = \left(\frac{pc^5}{f_0^{8/3} G^{5/3}}\right)^{3/5}$

Numériquement :

$$\boxed{M = \left(\frac{pc^5}{f_0^{8/3} G^{5/3}}\right)^{3/5} \simeq \left(\frac{0,1.\left(3.10^8\right)^5}{50^3 (7.10^{-11})^{5/3}}\right)^{3/5} \simeq 10^{33} kg}$$

C'est environ 10^3 fois la masse du Soleil. C'est énorme !

Analyse qualitative

Modèle de l'accélération d'un TGV **1** - On a l'équation différentielle $m\frac{dv}{dt} = F_0 - kv^2$

Si la vitesse initiale est nulle :

- A $t = 0$, la vitesse est nulle pendant un moment, par continuité, donc l'équation différentielle se simplifie en : $m\frac{dv}{dt} \sim F_0$
- Donc $v(t) \sim F_0 t/m + constante$
- Or à $t = 0$ la vitesse est nulle, donc la constante d'intégration est nulle (si on écrit l'équation précédente à $t = 0$)
- Donc la vitesse croît linéairement avec une pente F_0/m
- Pour des temps suffisamment longs, la vitesse croît et donc les deux termes de l'équation vont finir par se compenser et on aura une situation d'équilibre dynamique avec une vitesse limite définie par : $m\frac{dv}{dt})_{v_l} = 0 = F_0 - kv_{lim}^2$ donc $v_{lim} = (F_0/k)^{1/2}$
- Le temps typique pour passer de la vitesse nulle à cette vitesse limite est de l'ordre du temps nécessaire pour atteindre v_{lim} avec une pente de F_0/m, c'est-à-dire $\tau \sim v_{lim}/(F_0/m)$ donc $\tau \sim (F_0/k)^{1/2}/(F_0/m)$

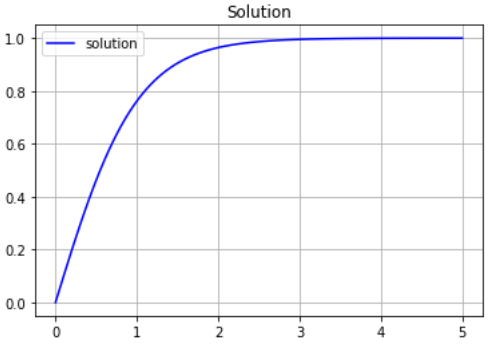
Remarque la solution particulière ne dépend pas des conditions initiales

Bonus On peut faire une résolution analytique de l'équation :

On a l'équation différentielle, d'après le PFD : $m\frac{dv}{dt} = F_0 - kv^2$

— On sépare les variables et on met l'équation sous la forme : $m\frac{dv}{F_0-kv^2} = dt$
— que l'on peut réécrire sous la forme : $\frac{dX}{1-X^2} = Edt$
— On sait de plus que $\int \frac{dX}{1-X^2} = \frac{1}{2}ln\frac{1+X}{1-X}$

On calcule cette primitive entre $X(t=0)$ et $X(t)$:
— si on est dans le cas où $v(t=0)=0$, on a : $X(t=0)=0$ donc : $\frac{1}{2}ln\frac{1+X}{1-X} = Et$
— sinon, il faut calculer $X(t=0)$ sachant que $v(t=0)=v_0$



On peut en déduire l'expression de :

$$v(t) = v_{lim}tanh(Et)$$

Base Jump et C_x **1.** On écrit que la vitesse limite correspond à la situation de compoensation des deux forces qui s'exercent sur l'homme : le poids et la force de frottement, ce qui donne :

$0 = C_xS\rho_{air}\frac{v_{lim}^2}{2} - mg$ Donc

$$C_x = \frac{2mg}{S\rho_{air}v_{lim}^2}$$

Numériquement, on a : $C_x = \frac{2mg}{S\rho_{air}v_{lim}^2} = \frac{2.80.10^1}{1.1.60^2} = \frac{1,6.10^3}{3,6.10^3} \sim 0,3$, ce qui est très proche des valeurs typiques de C_x (c'est le C_x d'une sphère)

2. Le temps mis pour atteindre sa vitesse limite est le temps caractéristique qui intervient dans l'équation différentielle : $m\frac{dv}{dt} = -C_xS\rho_{air}\frac{v^2}{2} + mg$

Si l'homme part avec une vitesse initiale nulle, l'accélération initiale est $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} = g$

Le temps typique est le temps mis pour passer d'une vitesse nulle à sa vitesse limite avec l'accélération initiale, ce qui donne :

$$\tau = \frac{v_{lim}-0}{g} = \frac{\sqrt{\frac{2mg}{C_xS\rho_{air}}}}{g} = \sqrt{\frac{2m}{C_xSg\rho_{air}}}$$

$$\text{Numériquement : } \tau = \frac{v_{lim}-0}{g} = \frac{60-0}{10} = 6s$$

Modèle d'atterrissage sur Mars **1.** Pendant l'atterrissage, l'altitude décroît, donc les courbes sont parcourues de la droite vers la gauche. Pour toutes les sondes, la vitesse décroît aux alentours de $z_0 = 50km$. On peut supposer Identifier l'altitude z_0 en deça de laquelle on ne peut pas négliger les frottements de l'air.

2. La dimension du terme b est telle que la forme précédente soit homogène à une force : $N = kg.m.s^{-2} = [b]\,m^3.s^{-3}$ donc $[b] = kg.m^{-2}s$. b est un facteur lié à l'intensité des frottements à une vitesse donnée, il dépend de la surface transverse de la sonde, de la masse volumique de l'atmosphère :
— avoir un grand b signifie subir beaucoup de frottements
— au contraire avoir un petit b signifie subir peu de frottements

3. L'équation différentielle vérifiée par la vitesse $v(t)$ est $m\dot{v} = mg_m - bv^3$, la condition initiale sur la vitesse est $v(t=0) = v_0$.

Pour prévoir le comportement et l'allure de $v(t)$, on analyse l'équation différentielle aux temps courts et aux temps longs.

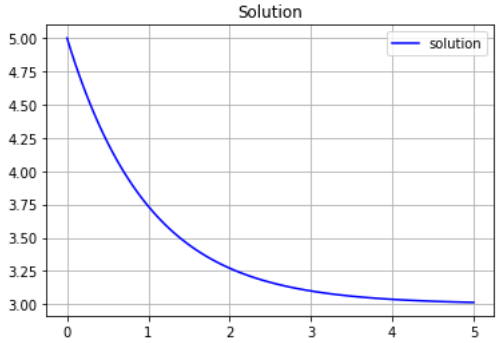
Aux temps courts, l'équation peut se simplifier en : $m\dot{v}(t\sim 0) \sim mg_m - bv_0^3$. Ce qui donne : $\dot{v} \sim g - \frac{bv_0^3}{m}$ et $v \sim \left(g - \frac{bv_0^3}{m}\right)t$: on a une évolution linéaire de la vitesse avec une pente $g_m - \frac{bv_0^3}{m}$

Aux temps longs, la vitesse est importante, la force de frottement non-négligeable et comme l'équation est une équation de relaxation, la solution va tendre vers une valeur limite qui correspond à l'annulation de l'accélération : $m\dot{v} = mg_m - bv_{lim}^3 \sim 0$ donc $v_{lim} = \left(\frac{mg_m}{b}\right)^{1/3}$

Entretemps, la vitesse a crû jusqu'à cette vitesse limite et la force de frottement aussi, jusqu'au moment d'équilibre dynamique où elle est parvenue à équilibrer le poids.

Le temps typique τ' d'évolution correspond au temps mis par la vitesse pour passer de v_0 à v_{lim} avec une pente typique de l'ordre de $g_m - \frac{bv_0^3}{m}$, donc $\tau' = \frac{v_{lim}-v_0}{g_m-\frac{bv_0^3}{m}}$.

L'allure du graphe est donc :



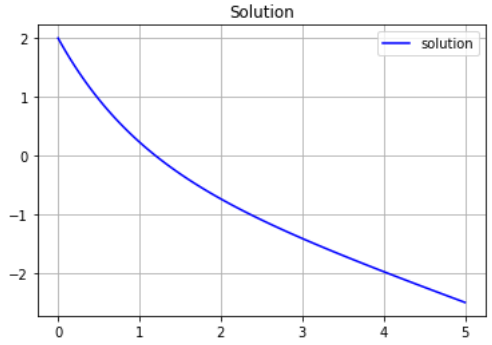
Bonus : on peut retrouver la forme de la courbe de l'énoncé. Il faut prendre garde que la vitesse est dirigée vers le bas et que ce que l'on a noté $v(t)$ est la norme de la vitesse. Ainsi, la relation mathématique exacte est $\frac{dz}{dt} = v_z = -v$. Donc $z(t)$ est l'opposé de la primitive de $v(t)$.

Ainsi, à la fin de l'évolution $v(t)$ est constante et égale à sa valeur limite, v_l et donc l'altitude décroît de manière affine : $z(t) = -v_l t + cste$

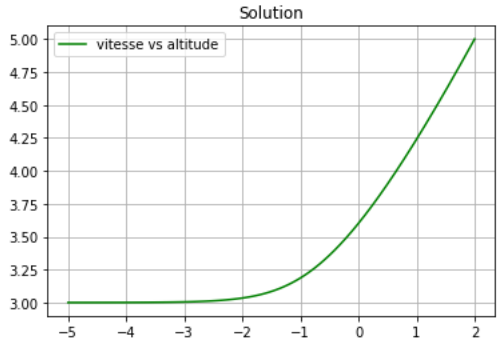
Au début de l'évolution, $v(t)$ décroît et donc la diminution de $z(t)$, initialement rapide, décroît pour atteindre le régime affine vu précédemment.

Enfin, $z(t=0) = z_0$.

On peut donc s'attendre à une évolution de la forme :



On peut donc prévoir pour $v(z)$:



Ce qui est en accord avec le graphe étudié.

6 Equations différentielles d'ordre 2

Levitron **1.** La solution particulière est une constante, car le second membre est une constante quand on réécrit l'équation sous la forme : $\ddot{z} + \alpha^2 z = \beta$. On cherche une constante, donc $\ddot{z_P} = 0$, ce qui donne : $z_P = \frac{\beta}{\alpha^2}$

La solution de l'équation homogène associée vérifie : $\ddot{z}_H + \alpha^2 z_H = 0$ et est donc de la forme : $z_H = \lambda cos\alpha t + \mu sin\alpha t$

On a donc : $z(t) = \lambda cos\alpha t + \mu sin\alpha t + \frac{\beta}{\alpha^2}$

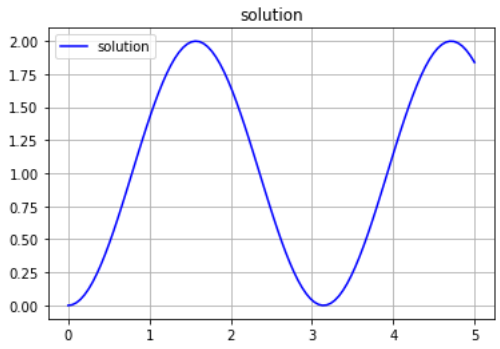
Or, on sait que : $z(t=0) = 0$ donc $z(t=0) = 0 = \lambda + \frac{\beta}{\alpha^2}$

de plus $\dot{z}(t=0) = 0 = \mu\alpha$

Donc finalement :

$$z(t) = \frac{\beta}{\alpha^2}(1 - cos\alpha t)$$

2. L'allure de $z(t)$ est donc :



Où l'on vérifie la continuité de $z(t)$ et la nullité de la pente initiale.

La période du mouvement est : $T = \frac{2\pi}{\alpha}$

3.

Avec les conditions initiales : $z(t=0) = \beta/\alpha^2$ et $\dot{z}(t=0) = v_0$, on a toujours la même forme de solution générale : $z(t) = \lambda cos\alpha t + \mu sin\alpha t + \frac{\beta}{\alpha^2}$

Mais les conditions imposent à présent :

$z(t=0) = \beta/\alpha^2 = \lambda + \frac{\beta}{\alpha^2}$ donc $\lambda = 0$

et $\dot{z}(t=0) = v_0 = \mu\alpha$

Donc :

$$z(t) = \frac{v_0}{\alpha} sin\alpha t + \frac{\beta}{\alpha^2}$$

Ces nouvelles conditions ne modifient pas la période des oscillations.

4. On a une équation $\ddot{z} = \alpha^2 z - \beta$, donc avec une solution en exponentielle réelle : le comportement du système est instable.

Plus précisément, on a :

$z(t) = z_P + z_H = \beta/\alpha^2 + \lambda e^{\alpha t} + \mu e^{-\alpha t}$

où, puisque l'on donne des conditions initiales séparées, sur la position et la vitesse, il vaut mieux utiliser :

$z(t) = z_P + z_H = \beta/\alpha^2 + \lambda' cosh\alpha t + \mu' sinh\alpha t$

Avec les conditions initiales, cela donne :

$z(t=0) = \beta/\alpha^2 = \beta/\alpha^2 + \lambda'$ donc $\lambda' = 0$

Et $\dot{z}(t=0) = -v_0 = \alpha\mu'$ donc $:-\frac{v_0}{\alpha} = \mu'$

et finalement :

$$z(t) = \beta/\alpha^2 - \frac{v_0}{\alpha} sinh\alpha t$$

Le temps typique d'évolution est celui qui intervient pour adimensionner le *sinh*, donc :

$$\tau = 1/\alpha$$

Pratique de la résolution **Equation 1 :**

$y" + 9y = 0$ a pour solution $y = \lambda cos3t + \mu sin3t$

avec $y(t=0) = 0$, on a : $y(t=0) = 0 = \lambda$ et $y'(t=0) = 1 = 3\mu$, ce qui donne $\mu = 1/3$ et donc finalement :

$$y = \frac{1}{3} sin3t$$

Qui correspond à une fonction sinusoïdale de pulsation 3 et donc de période $T = \frac{2\pi}{3} s$ et d'amplitude 1/3

Equation 2 :

$y" - 9y = 0$ a pour solution $y = \lambda e^{3t} + \mu e^{-3t}$

avec $y(t=0) = 0$, on a : $y(t=0) = 0 = y = \lambda + \mu$ et $y'(t=0) = 1 = 3\lambda - 3\mu$, ce qui donne $\lambda = -\mu$ et $1 = 3\lambda + 3\lambda = 6\lambda$ et donc finalement

$$y = \frac{1}{6} e^{3t} - \frac{1}{6} e^{-3t}$$

Qui correspond à une fonction qui débute en 0 avec une pente de 1 et qui diverge en l'infini.

Equation 3 :

$y" - 9y = 1$ a pour solution $y = y_H + y_P = \lambda e^{3t} + \mu e^{-3t} + 1/9$

avec $y(t=0) = 0$, on a : $y(t=0) = 0 = \lambda + \mu + 1/9$, ce qui donne $\mu = -1/9 - \lambda$

et $y'(t=0) = 1 = 3\lambda - 3\mu$

$1 = 3\lambda - 3(-1/9 - \lambda) = 6\lambda + 1/3$

Donc : $\lambda = 1/9$ et $\mu = -2/9$

et donc finalement

$$\boxed{y = \frac{1}{9}e^{3t} - \frac{2}{9}e^{-3t} + \frac{1}{9}}$$

Qui correspond à une fonction qui débute en 0 avec une pente de 1 et qui diverge en l'infini.

Equation 4 :

$y" + y' + 9y = 0$ et donc une pulsation propre $\omega_0 = 3$ et un facteur de qualité tel que $\frac{\omega_0}{Q} = 1$ donc $Q = 3$

Donc $Q > 1/2$ donc on est en régime pseudopériodique et on a donc une solution de la forme :

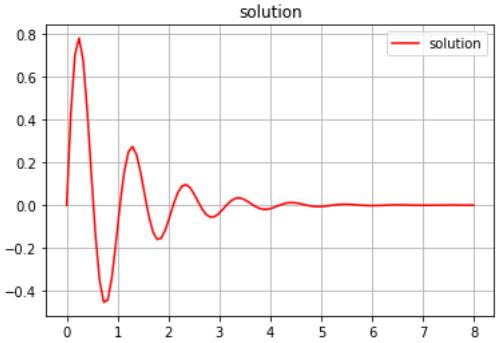
$y = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(\lambda cos\Omega t + \mu sin\Omega t\right)$

avec $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

Avec $y(t=0) = 0$, on a : $0 = \lambda$ et $y'(t=0) = \mu\Omega = 1$ et donc $\mu = 1/\Omega$

ce qui donne finalement :

$$\boxed{y = \frac{1}{\Omega}e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}sin\Omega t}$$



Equation 5 :

On cherche d'abord l'équation homogène associée à $y" + y' + 9y = 1$, qui est $y" + y' + 9y = 0$ dont la solution est, comme on l'a vu précédemment : $y_H = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(\lambda cos\Omega t + \mu sin\Omega t\right)$

avec $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

La solution particulière de l'équation est une constante puisque le second membre est une constante et on obtient simplement $y_P = 1/9$

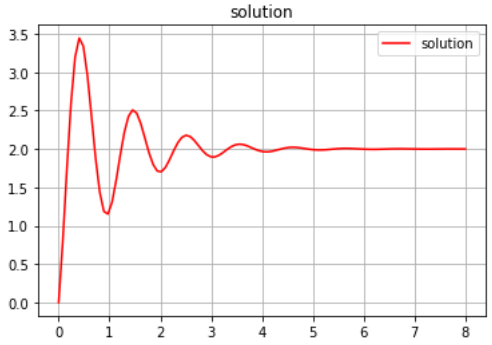
la solution générale est donc : $y = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(\lambda cos\Omega t + \mu sin\Omega t\right) + 1/9$

Avec $y(t=0) = 0$, on a : $0 = y(0) = \lambda + 1/9$ et donc $\lambda = -1/9$

$y'(t=0) = 1 = -\frac{\omega_0}{2Q}\lambda + \mu\Omega$ ce qui permet de déterminer $\mu = \frac{1 - \frac{\omega_0}{2Q}1/9}{\Omega}$

Donc finalement :

$$\boxed{y = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(\frac{-1}{9}cos\Omega t + \frac{1 - \frac{\omega_0}{2Q}1/9}{\Omega}sin\Omega t\right) + 1/9}$$



Equation 6 :

Pour l'équation $y" + 6y' + 9y = 0$

on a une pulsation propre $\omega_0 = 3$ et un facteur de qualité tel que $\frac{\omega_0}{Q} = 6$ donc $Q = 1/2$

Donc $Q = 1/2$ donc on est en régime critique et on a donc une solution de la forme :

$y = (\lambda + \mu t)\, e^{-\omega_0 t} = (\lambda + \mu t)\, e^{-3t}$

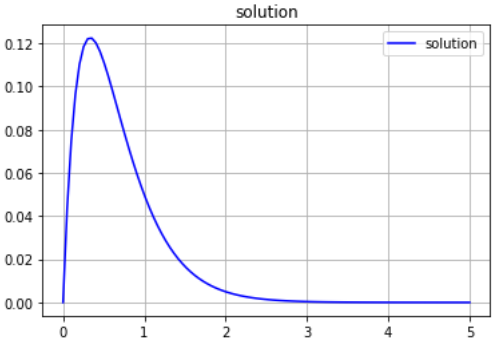
la solution générale est donc : $y = (\lambda + \mu t)\, e^{-3t}$

Avec $y(t=0) = 0$, on a : $0 = y(0) = \lambda$ et donc $\lambda = 0$

$y'(t=0) = 1 = \mu$ ce qui permet de déterminer $\mu = 1$

Donc finalement :

$$\boxed{y = te^{-3t}}$$



Equation 7 :

Pour l'équation $y" + 7y' + 9y = 0$

on a une pulsation propre $\omega_0 = 3$ et un facteur de qualité tel que $\frac{\omega_0}{Q} = 7$ donc $Q = 3/7$

Donc $Q < 1/2$ donc on est en régime apériodique et on a donc une solution de la forme :

$y = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$

Avec $y(t=0) = 0$, on a : $0 = y(0) = y = \lambda + \mu$ et donc $\lambda = -\mu$

$y'(t=0) = 1 = r_1\lambda + r_2\mu$ ce qui permet de déterminer $1 = \lambda\left(r_1 - r_2\right)$ donc $\lambda = \frac{1}{(r_1 - r_2)}$

Donc finalement :

$$\boxed{y = \frac{1}{(r_1 - r_2)}e^{r_1 t} - \frac{1}{(r_1 - r_2)}e^{r_2 t}}$$

Vérifications 1 - On a : $\dot{u}(t) = -\omega u_0 sin(\omega t)$, $\dot{u}(t=0) = 0$, $\ddot{u}(t) = -\omega^2 u_0 cos(\omega t)$ et $\ddot{u}(t=0) = -\omega^2 u_0$. On a un lien simple entre $\ddot{u}$ et u : $\ddot{u}(t) = -\omega^2 u_0 cos(\omega t) = -\omega^2 u(t)$

2 - L'équation $m\ddot{x} + kx = 0$ peut se réécrire :

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Si l'on teste une solution de la forme :

$x = Acos(\omega_0 t)$, on a : $\ddot{x} = -\omega_0^2 Acos(\omega_0 t)$

qui vérifie bien : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ donc $x = Acos(\omega_0 t)$ est bien solution de cette équation.

Cependant, si on précise qu'on cherche une solution qui vérifie en plus la condition initiale $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0 \neq 0$, la solution précédente : $x = Acos(\omega_0 t)$, pour laquelle on a : $\dot{x} = -\omega_0 Asin(\omega_0 t)$ donne : $\dot{x}(0) = 0$, ce qui ne vérifie pas la condition initiale.

Ainsi, une fonction peut tout à fait être solution de l'équation différentielle et ne pas convenir si l'on cherche une solution de l'équation différentielle qui vérifie une condition initiale donnée. C'est pour cette raison qu'il faut **toujours donner la solution de l'équation différentielle la plus générale qui soit.**

Si l'on cherche à présent une solution de la forme $x = Asin(\omega_0 t)$, on a :

$\ddot{x} = -\omega_0^2 Asin(\omega_0 t)$

qui vérifie bien : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ donc $x = Asin(\omega_0 t)$ est bien solution de cette équation.

Cependant, si on précise qu'on cherche une solution qui vérifie en plus la condition initiale $x(t = 0) = x_0 \neq 0$, la solution précédente : $x = Asin(\omega_0 t)$ donne : $x(0) = 0$, ce qui ne vérifie pas la condition initiale.

On retrouve le fait qu'une fonction peut tout à fait être solution de l'équation différentielle et ne pas convenir si l'on cherche une solution de l'équation différentielle qui vérifie une condition initiale donnée. C'est pour cette raison qu'il faut **toujours donner la solution de l'équation différentielle la plus générale qui soit.**

Vérifions qu'une solution de la forme $x = Acos(\omega_0 t) + Bsin(\omega_0 t)$ convient : on a :

$\ddot{x} = -\omega_0^2 Acos(\omega_0 t) - \omega_0^2 Bsin(\omega_0 t) = -\omega_0^2 x$

et l'équation est donc bien vérifiée quels que soient A et B. Mais en plus, il est possible qu'une telle solution vérifie les conditions initiales $x(t = 0) = x_0$ et $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$. En effet, il suffit pour cela que $x = Acos(\omega_0 t) + Bsin(\omega_0 t)$ soit telle que :

$x(t = 0) = A = x_0$

et $\dot{x}(t = 0) = \omega_0 B = \dot{x}_0$

Ainsi la fonction $x(t) = x_0 cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} sin(\omega_0 t)$ est bien solution de l'équation différentielle et satisfait aux conditions initiales sur $x(t)$ et $\dot{x}(t)$.

3 - Vérifions que $x = \lambda e^{rt}$ est solution de l'équation différentielle $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ si r vérifie une équation caractéristique que l'on précisera. Réinjectons cette solution :

$\dot{x} = \lambda r e^{rt}$ et $\ddot{x} = \lambda r^2 e^{rt}$

Donc : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \lambda r^2 e^{rt} + \omega_0^2 \lambda e^{rt} = 0$

Peut être vérifiée quel que soit λ si $r^2 + \omega_0^2 = 0$ est vérifiée : cette dernière équation est l'équation caractéristique de l'équation différentielle.

Si l'on prend simplement une des deux racines, $r_1 = j\omega_0$, on a : $x = \lambda e^{j\omega_0 t}$ qui vérifie l'équation différentielle. Mais cette solution impose :

$x(t = 0) = \lambda = x_0 \in \mathbb{R}$ et

$\dot{x}(t = 0) = j\lambda\omega_0$ qui ne peut pas vérifier $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0 \in \mathbb{R}$.

Si l'on prend une combinaison linéaire de la forme : $x = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$,

on a : $x = \lambda e^{j\omega_0 t} + \mu e^{-j\omega_0 t}$

On a : $x(t = 0) = x_0 = \lambda + \mu$

et $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0 = j\omega_0\lambda - j\omega_0\mu$

Ainsi donc : $\mu = x_0 - \lambda$

Donc : $\dot{x}_0 = j\omega_0\lambda - j\omega_0(x_0 - \lambda)$

Donc : $\dot{x}_0 + j\omega_0 x_0 = 2j\omega_0\lambda$

Donc : $\lambda = \frac{\dot{x}_0 + j\omega_0 x_0}{2j\omega_0}$

Et $\mu = x_0 - \lambda = x_0 - \frac{\dot{x}_0 + j\omega_0 x_0}{2j\omega_0}$

Donc : $\mu = \frac{j\omega_0 x_0 - \dot{x}_0}{2j\omega_0}$

Ce qui donne :

$x = \frac{\dot{x}_0 + j\omega_0 x_0}{2j\omega_0} e^{j\omega_0 t} + \frac{j\omega_0 x_0 - \dot{x}_0}{2j\omega_0} e^{-j\omega_0 t}$

Or : $e^{j\omega_0 t} = cos\omega_0 t + jsin\omega_0 t$

Donc :

$x = \frac{\dot{x}_0 + j\omega_0 x_0}{2j\omega_0}(cos\omega_0 t + jsin\omega_0 t) + \frac{j\omega_0 x_0 - \dot{x}_0}{2j\omega_0}(cos\omega_0 t - jsin\omega_0 t)$

qui se met sous la forme :

$x = x_0 cos\omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} sin\omega_0 t$

Vérifions qu'une solution de la forme $x(t) = Acos(\omega_0 t) + Bsin(\omega_0 t)$ est bien solution :

$\ddot{x} = -\omega_0^2 Acos(\omega_0 t) - \omega_0^2 Bsin(\omega_0 t)$

Donc : $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$ donc cette fonction vérifie bien l'équation différentielle : elle est solution.

Mais par ailleurs, les constantes d'intégration A et B sont telles qu'elle peut aussi vérifier les conditions initiales : $x(t = 0) = x_0$ et $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$

En effet, avec $x(t) = Acos(\omega_0 t) + Bsin(\omega_0 t)$, on a :

$x(t = 0) = A = x_0$ qui est possible.

Et $\dot{x}(t = 0) = -\omega_0 B = \dot{x}_0$ qui est aussi possible. Et la solution qui vérifie les conditions initiales est donc :

$x = x_0 cos\omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} sin\omega_0 t$

4 - On a : $u(t) = Acos(\omega_0 t) + Bsin(\omega_0 t)$

Donc :

$u(t = 0) = A$

$\dot{u}(t) = -\omega_0 Asin(\omega_0 t) + \omega_0 Bcos(\omega_0 t)$, $\dot{u}(t = 0) = \omega_0 B$.

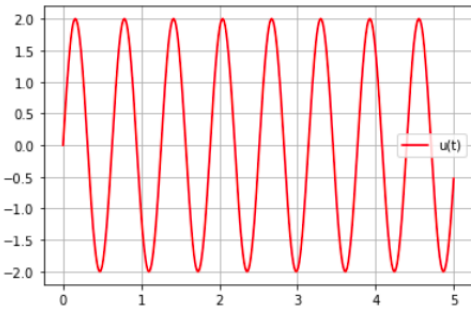
Sachant que $u(t = 0) = 0 = A$

et $\dot{u}(t = 0) = \dot{u}_0 = \omega_0 B$,

on en déduit $A = 0$ et $B = \frac{\dot{u}_0}{\omega_0}$

Donc : $u = \frac{\dot{u}_0}{\omega_0} sin\omega_0 t$

L'allure de cette fonction est :



5 - On a :

$u(t = 0) = A$

ensuite, on a (il faut faire la dérivée d'une somme de deux produits, ce qui donne quatre termes) :

$\dot{u}(t) = -e^{-\frac{t}{\tau}} A\Omega sin\Omega t - \frac{A}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} cos\Omega t + e^{-\frac{t}{\tau}} B\Omega cos\Omega t - \frac{B}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} sin\Omega t$

Si on évalue cette fonction en $t = 0$, on a :

$\dot{u}(t=0) = -\frac{A}{\tau} + B\Omega$.

Sachant que $u(t=0) = 0 = A$

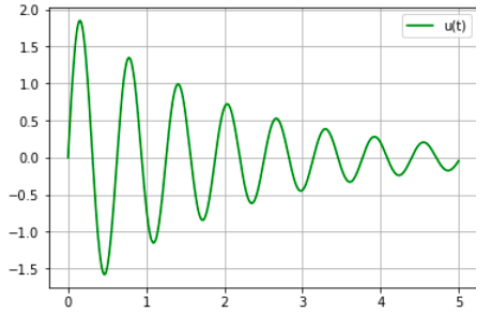
et $\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 = -\frac{A}{\tau} + B\Omega$

ce qui donne : $A = 0$ et $B = \frac{\dot{u}_0}{\Omega}$

La fonction recherchée est donc :

$$u(t) = \frac{\dot{u}_0}{\Omega} e^{-\frac{t}{\tau}} (sin\Omega t)$$

Dont l'allure est :



6 - On a : $u(t=0) = A + B$

ensuite : $\dot{u}(t) = -\frac{A}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{B}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}}$

donc : $\dot{u}(t=0) = -\frac{A}{\tau_1} - \frac{B}{\tau_2}$.

Sachant que $u(t=0) = 0 = A + B$

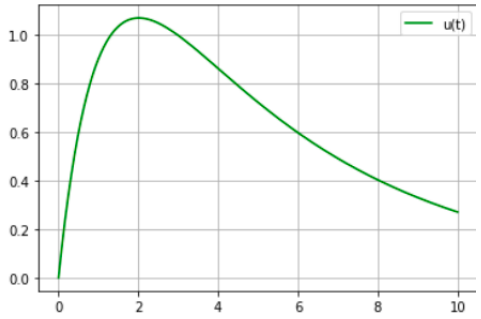
et $\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 = -\frac{A}{\tau_1} - \frac{B}{\tau_2}$

La première équation donne : $B = -A$, qui, réinjectée dans la deuxième donne : $\dot{u}_0 = -\frac{A}{\tau_1} + \frac{A}{\tau_2}$ ce qui donne : $A = \frac{\dot{u}_0 \tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}$

Donc : $B = -\frac{\dot{u}_0 \tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}$

Donc la fonction étudiée est : $$u(t) = \frac{\dot{u}_0 \tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \left(e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$$

La fonction est nulle à $t = 0$, puis croissante si $\dot{u}_0 > 0$, elle atteint un max puis tend vers 0 :



Evolution de la profondeur d'un flotteur **1 -** La date t_0 à laquelle a lieu la perturbation est $t_0 = 0,5s$.

La position initiale est : $z(t_0) = -10mm$

La pente initiale est : $\dot{z}(t_0) = \frac{-4+10}{0,1} \simeq 6.10^1 mm.s^{-1}$

Le décrément logarithmique est :

$$\delta = ln(\frac{z_{max,1}}{z_{max,2}}) \simeq ln(\frac{3,8}{1}) \simeq 1,3$$

La pseudopériode est :

$$T \simeq 1,3 - 0,8 = 0,5s$$

2 - Le facteur de qualité :

$Q \simeq \frac{\pi}{\delta} \simeq \frac{\pi}{1,3} \simeq 2$, ce qui est cohérent avec l'estimation du nombre d'oscillations visibles.

Le temps typique de décroissance est donné par :

$$\tau \simeq \frac{T}{\delta} \simeq \frac{0,5}{1,3} \simeq 0,4s$$

Signal d'ondes gravitationnelles **1 -** On a :

$$f(t=0) = -2u_{SI} \text{ et } \dot{f}(t=0) = 0$$

2 - La pseudopériode est environ : $T = \frac{5.10^{-2}}{3} \simeq 1,6.10^{-2}s$

Le décrément logarithmique vaut environ :

$$\delta \simeq ln(\frac{1,5}{0,7}) \simeq ln(2) \simeq 0,4$$

Le facteur de qualité Q est donc :

$$Q \simeq \frac{\pi}{0,4} \simeq 6$$

Le temps typique de décroissance est donc :

$$\tau = \frac{T}{\delta} = \frac{1,6.10^{-2}}{0,4} \simeq 4.10^{-2}s$$

On a $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \simeq \omega_0$

Donc :

$$\xi = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{2\pi}{QT_0} \simeq \frac{6}{6.1,6.10^{-2}} \simeq 6.10^1 u_{SI}$$