Mathématiques : du lycée aux CPGE scientifiques

Lycées Louis-le-Grand et Henri-IV

Introduction

Origine et buts de de document

Lorsqu'on discute avec des lycéens se destinant aux CPGE scientifiques, deux questions reviennent fréquemment.

- Comment un lycéen peut-il se préparer efficacement aux CPGE, ou, plus largement, à des études supérieures scientifiques ?

- Quelles sont les mathématiques accessibles à un lycéen intéressé par la discipline et désirant un peu dépasser le programme de terminale ?

Lors de la réforme des CPGE de 2013, un groupe de professeurs du lycée Louis-le-Grand a élaboré un document pour répondre à ces deux demandes. Ce texte, en libre accès sur le site du lycée depuis 2013, a été largement consulté. La nouvelle réforme du lycée, effective en terminale l'année scolaire 2020-2021, en rendait nécessaire une mise à jour. L'intérêt manifesté par plusieurs professeurs de mathématiques du lycée Henri-IV fait que la nouvelle version, mise en ligne en 2021, a bénéficié du travail d'un groupe de professeurs du secondaire et de CPGE issus des deux établissements, qui espèrent ainsi aider les lycéens à approfondir les mathématiques de l'enseignement secondaire.

Ce document, qui peut être travaillé dès le début de l'année de terminale, voire avant pour certaines parties, n'a pas vocation à se substituer aux cours du lycée, mais plutôt à les compléter. Il peut aussi donner des points de départ pour le « grand oral » du baccalauréat.

Les choix principaux demeurent.

- Permettre au lecteur de revoir une grande partie des notions étudiées au lycée, en spécialité ou en option, dans l'optique de l'enseignement supérieur. À cet effet, le style d'écriture est souvent plus proche du post-bac que de la terminale.

- Insister sur les techniques de calcul, dont une solide maîtrise est indispensable pour la suite des études mathématiques. Nous avons souvent proposé des calculs assez « généraux », plus formateurs que des cas particuliers numériques.

- Offrir un choix d'exercices de difficulté variée, de manière à permettre plusieurs niveaux d'utilisation.

- Ne pas se limiter à un pur entraînement technique, en proposant un nombre important d'énoncés aboutissant à des résultats significatifs.

- Mettre en évidence les liens entre les différentes parties des mathématiques étudiées au lycée, afin de créer autant de synergies que possible.

- Introduire, pour les lecteurs les plus motivés, un certain nombre de compléments, choisis pour leur intérêt conceptuel ou technique, prolongeant les notions étudiées sans nécessiter de développements théoriques trop importants.

- Donner, de façon non systématique, quelques indications historiques sur le matériel présenté.

Mais nous avons opéré un certain nombre de modifications.

- La liste des exercices a été très considérablement augmentée. En particulier, nous avons ajouté aux premiers chapitres une liste substantielle d'exercices destinés à consolider les connaissances et méthodes de base.

- Nous avons ajouté un chapitre d'arithmétique et un chapitre de probabilités.

- Les nouveaux programmes de terminale, plus ambitieux que les anciens, nous ont conduits à aller plus vite sur certains rappels et, symétriquement, à aller un peu plus loin sur quelques points.

Organisation et contenu

Pour ne pas alourdir démesurément le texte, nous n'avons pas visé à l'exhaustivité. Nous avons choisi, dans les programmes de terminale, ce qui nous a semblé le plus formateur en vue des études supérieures : l'analyse, dans une optique assez proche du « calculus » anglo-saxon, les probabilités, les nombres complexes et les équations algébriques, l'arithmétique. Le texte est maintenant découpé en douze chapitres. Les neuf premiers relèvent du programme de la spécialité mathématiques, les trois derniers de celui de l'option mathématiques expertes :

- les chapitres **1** à **4** reprennent des notions de base étudiées pendant les trois années de lycée ;

- les chapitres **5**, **6** et **8** couvrent le cœur du programme d'analyse du lycée (limites, dérivation, intégration) ;

- le chapitre **7** introduit les très naturelles fonctions puissances non entières, qui enrichissent à peu de frais la collection des « fonctions usuelles » ;

- le chapitre **9**, consacré aux probabilités, permet plusieurs interactions avec les chapitres précédents ;

- les chapitres **10** et **11** traitent de deux thèmes fortement liés, les nombres complexes et les équations algébriques ;

- le chapitre **12** est consacré à l'arithmétique des nombres entiers.

Les chapitres sont eux-mêmes divisés en paragraphes. Un paragraphe commence par des rappels (ou parfois des compléments) et/ou des exemples et est suivi d'une liste fournie d'exercices. [1] Les résultats les plus classiques sont signalés par le symbole $(*)$.

La difficulté d'un exercice est repérée par un numéro : ① désigne un exercice a priori sans difficulté, ② un exercice de niveau moyen, ③ un exercice assez difficile, ④ un exercice difficile et ⑤ un exercice très difficile. La difficulté peut résider dans le degré d'initiative nécessaire, dans la technique, dans la généralité de l'énoncé [2], dans le lien à faire entre plusieurs questions, voire avec d'autres exercices (le plus souvent explicitement signalés), ou dans la diversité des notions utilisées. Ces mentions, destinées à vous aider dans votre travail, sont d'une part subjectives, d'autre part relatives : le niveau d'ensemble des exercices proposés est élevé. En particulier, les exercices de niveau ④ et ⑤ dépassent souvent de loin les attendus de terminale.

1. Les rappels de cours sont assez hétérogènes ; ils sont davantage développés dans les chapitres **10, 11, 12**.
2. Un exercice dans lequel on demande d'établir des propriétés relatives à une fonction f « générale » n'est pas forcément plus délicat qu'un exercice qui traite d'une fonction f particulière, mais moins habituel dans l'enseignement secondaire (et en revanche monnaie courante dans le post-bac).

Mode d'emploi : plusieurs parcours possibles

Ce document est très volumineux. Vous ne devez pas viser à en traiter l'intégralité, mais choisir ce qui vous est le plus profitable.

Ainsi, le lecteur désireux d'affermir ses bases aura intérêt à travailler en priorité les chapitres **1** à **8**, à l'exception de **7**, puis éventuellement **10**, en omettant les compléments et en se concentrant sur les exercices de niveau ①, ② et éventuellement ③.

À l'inverse, celui qui, maîtrisant très solidement le programme, désire surtout l'approfondir, pourra se concentrer sur les compléments, les exercices de niveau ③ à ⑤, et privilégier les chapitres (**7** à **12**), de contenu plus riche.

Il est conseillé au lecteur de diviser le travail sur un paragraphe en deux temps.

- Étude des rappels, des exemples, éventuellement des compléments. Pour chaque exemple, il est conseillé de refaire complètement (et sans recopier le texte) raisonnements et calculs.

- Résolution d'une partie des exercices.

Ne pas trouver, même en y passant du temps, un exercice de niveau ① ou ②, ne préjuge en rien de votre future réussite en CPGE, ou, plus généralement, dans l'enseignement supérieur. En mathématiques, « sécher » est inévitable et important. D'une part, aboutir après un long travail procure une grande satisfaction. D'autre part, en cas d'échec, le temps passé à chercher permet de progresser et de comprendre réellement une solution ; inversement, lire le corrigé d'un exercice sans s'être réellement engagé dans la recherche ne procure le plus souvent aucun bénéfice.

La première version de ce texte comportait un certain nombre d'erreurs, que des lecteurs nous ont gentiment signalées. Nous trouvons ici l'occasion de les remercier chaleureusement. Malgré nos efforts, la présente mouture contient certainement des coquilles. Vous pouvez nous les signaler en écrivant à l'adresse

`nicolas.emmanuelle.tosel@orange.fr`

Nous espérons que l'étude de ce document vous procurera plaisir et profit.

Ajouté le 19 Juillet 2023.

L'été 2022, un groupe d'élèves de lycée a rédigé les solutions des exercices du présent document. Nous avons un grand plaisir à les remercier tous pour leurs remarquables contributions. Nous tenons particulièrement à distinguer Neil Sherman, qui a joué avec beaucoup d'efficacité et de gentillesse le rôle de chef d'orchestre dans ce travail collaboratif.

Nous avons revu une grande partie des corrigés (plus des trois quarts), et procédé à un certain nombre de révisions. Ces corrigés, ainsi que d'autres, non relus pour l'instant, se trouvent sur l'excellent site CPGE Paradise.

Emmanuelle et Nicolas Tosel

Sommaire

1 Rédaction, modes de raisonnement

Nous rappelons ici quelques notations d'usage courant, des rappels portant sur la rédaction d'un texte mathématique et quelques modes de raisonnement.

1.1 Rédaction, quantificateurs

1.1.1 Vocabulaire et notations utilisés

Pour la commodité du lecteur, on regroupe ici quelques termes et notations d'usage courant.

Ensembles de nombres usuels

Dans tout ce texte, on utilise les notations usuelles ci-après.

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, c'est-à-dire ≥ 1.

- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers relatifs, $\mathbb{Z}^*$ l'ensemble des entiers relatifs non nuls.

- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire des fractions

$$\frac{p}{q}, \qquad p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*.$$

On peut, quitte à simplifier, supposer la fraction irréductible, c'est-à-dire que le seul diviseur commun (positif) à p et q est 1.

- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des nombres réels non nuls, $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls, $\mathbb{R}^{+*}$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

- $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes, $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls.

On a les inclusions :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Les nombres réels non rationnels sont dits irrationnels. Vous rencontrerez dans ce texte plusieurs exemples de nombres irrationnels.

Segments de $\mathbb{R}$

Si a et b sont deux nombres réels, on note $[a, b]$ l'ensemble des réels compris, au sens large, entre a et b.

Cette notation vaut quel que soit l'ordre dans lequel a et b sont rangés. Ainsi :

$$[0, 1] = [1, 0].$$

Les ensembles de la forme $[a, b]$ sont appelés *segments de* $\mathbb{R}$. Noter que les segments de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles fermés et bornés.

Partie entière d'un nombre réel

La *partie entière*, ou *partie entière inférieure* d'un réel x, notée $\lfloor x \rfloor$, désigne le plus grand entier relatif plus petit que x. Autrement dit, $\lfloor x \rfloor$ appartient à $\mathbb{Z}$ et vérifie :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Ainsi :

$$\lfloor 3,8 \rfloor = 3, \qquad \lfloor -4,1 \rfloor = -5.$$

Si x est positif ou nul, $\lfloor x \rfloor$ s'obtient en « enlevant à x sa partie décimale ».

Limites

Pour a et b dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, la notation classique

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

est génératrice d'incorrections : elle conduit à supposer a priori l'existence d'une limite. On lui préfère ici l'écriture

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b.$$

Pour une suite $(u_n)_{n \geq 0}$, « n ne peut tendre que vers $+\infty$ ». On écrit indifféremment

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell, \quad \text{ou : } u_n \longrightarrow \ell.$$

Dérivées successives d'une fonction

Si f est une fonction dérivable sur l'intervalle I, la fonction dérivée de f est notée f'. Si f' est elle-même dérivable sur I, on dit que *f est deux fois dérivable sur I* ; la dérivée $(f')'$ de f' est alors notée f''. On généralise sans peine ; si f est n fois dérivable sur I, sa dérivée n-ième est notée $f^{(n)}$.

Cercle unité (ou cercle trigonométrique)

On appelle ainsi le cercle de centre O et de rayon 1 du plan $\mathbb{R}^2$. Lorsque ce plan est identifié à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, le cercle s'identifie à l'ensemble des complexes de module 1.

Pente d'une droite de $\mathbb{R}^2$

Soit D une droite du plan $\mathbb{R}^2$ non parallèle à l'axe des ordonnées : D admet donc une unique équation de la forme

$$y = ax + b, \qquad \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

On appelle *pente* ou *coefficient directeur* de D le réel a. L'interprétation géométrique est claire : si M_1 et M_2 sont deux points distincts de D de coordonnées respectives (x_1, y_1) et (x_2, y_2), alors

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

i.e.

Cette abréviation du latin « id est » est très employée en mathématiques ; elle signifie « c'est-à-dire ».

Application

Synonyme de « fonction », définie sur un ensemble quelconque et à valeurs dans un ensemble quelconque.

1.1.2 Généralités

La rédaction mathématique obéit à des règles précises qui doivent être rapidement maîtrisées. Voici les plus importantes.

- Un objet mathématique est *déclaré* avant d'être utilisé, en général par le terme « soit » ; la déclaration précise la nature de l'objet (exemples : « soit $\vec{v}$ un vecteur non nul », « soit z un nombre complexe non réel », « soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ » ...).

- Un discours mathématique n'est pas une suite de symboles. L'argumentation est, pour l'essentiel, rédigée en langage ordinaire (et correct), avec des phrases complètes.

En particulier, les quantificateurs et les symboles d'implication $\Rightarrow$ et d'équivalence $\Leftrightarrow$, utiles pour énoncer de manière précise et concise des propriétés, ne doivent pas être employés comme des abréviations à l'intérieur du discours.

- Il est bon d'annoncer ce que l'on va faire, par des locutions du type « Montrons que ».

Bien rédiger s'acquiert essentiellement par l'usage ; les exemples présentés dans la suite devraient vous donner une idée de ce qui est attendu.

1.1.3 Quantificateurs

Les quantificateurs sont évoqués en terminale. Précisons ces notations, dont l'emploi est très commode et que nous utiliserons librement dans la suite.

Le quantificateur universel est noté $\forall$; il signifie « pour tout » ou « quel que soit ». Le quantificateur existentiel est noté $\exists$; il signifie « il existe ». Par exemple, la phrase

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^x > 0$$

signifie que, pour tout réel x, le réel e^x est strictement positif. La phrase :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in \mathbb{R}, \quad y = x^5 - 5x$$

signifie que, pour tout réel y, il existe (au moins) un réel x tel que

$$x^5 - 5x = y,$$

ce que l'on peut établir au moyen d'une étude de fonction (cf paragraphe **6.3.1**).

Les quantificateurs permettent de formuler de manière condensée certaines propriétés. Ainsi, pour une suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$, l'assertion « $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0 » est définie par :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \ \Rightarrow \ |u_n| \leq \varepsilon.$$

Cette définition est intuitivement raisonnable : dès qu'on se fixe un seuil ε, il existe un entier naturel N (dépendant de ε) tel que, pour $n \geq N$, $|u_n|$ soit majoré par ε. De manière plus informelle, étant donné un seuil $\varepsilon > 0$, la suite (u_n) est bornée par ε « à partir d'un certain rang ».

On n'emploie les symboles $\forall$ et $\exists$ que dans des phrases intégralement écrites en langage quantifié et, à vrai dire, le plus souvent dans des définitions. En aucun cas on ne peut mélanger quantificateur et phrase française : les quantificateurs ne sont pas des abréviations. Commencer une démonstration par un quantificateur est une faute grave. Si l'on veut prouver qu'une propriété est vraie pour tout réel x, la rédaction commence en *déclarant* x : « Soit x dans $\mathbb{R}$. » . On montre ensuite que la propriété désirée est vraie pour x.

Dans la suite de ce document, nous utiliserons les quantificateurs uniquement pour formuler rapidement certaines propriétés.

1.2 Le raisonnement par récurrence (1)

Soit $\mathcal{P}_n$ une propriété dépendant de l'entier naturel n. Pour démontrer que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$, on peut procéder de la façon suivante.

- *Initialisation.* On établit la propriété pour $n = 0$.

- *Hérédité.* On fixe un entier n tel que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit vraie. On montre alors que $\mathcal{P}_{n+1}$ est également vraie.

Ces deux points étant acquis, on peut conclure que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n. Le raisonnement présenté est la forme la plus simple de raisonnement par récurrence.

Il se peut que l'on demande de prouver la validité d'une propriété $\mathcal{P}_n$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$; l'initialisation consiste alors en la vérification de $\mathcal{P}_1$.

Le raisonnement par récurrence est un outil essentiel. Dans la plupart des exemples que vous verrez en première année, sa mise en œuvre ne pose pas de difficulté. Il convient en revanche de rédiger soigneusement. En particulier, n étant fixé, aucune quantification relative à l'entier n ne doit apparaître dans la formulation de la propriété $\mathcal{P}_n$: nommer $\mathcal{P}_n$ une propriété de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, ...$$

n'a aucun sens. Il suffit de substituer à n une valeur quelconque (disons 2022) pour s'en convaincre.

Exemples

1. $(*)$ *Somme des carrés des n premiers entiers*
   Pour n dans $\mathbb{N}^*$, la somme des n premiers entiers est donnée par la formule :

   $$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

   sur laquelle nous reviendrons en **2.3**.

   Ici, nous allons montrer par récurrence :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

   Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété

   $$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

   Initialisation. La vérification de $\mathcal{P}_1$ est immédiate

   $$1^2 = 1 = \frac{1.2.3}{6} = 1.$$

   Hérédité. Fixons n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. On a donc :

   $$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

   Alors :

   $$1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) + (n+1)^2,$$

d'où, grâce à $\mathcal{P}_n$:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6}\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right).$$

Mais :

$$n(2n+1) + 6(n+1) = 2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3).$$

En fin de compte :

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

C'est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.

2. *Une inégalité*

Montrons par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Initialisation. On a $2 - \dfrac{1}{1} = 1$ donc :

$$1 \leq 2 - \frac{1}{1}.$$

La propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité. Fixons n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. On a donc :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

En ajoutant $1/(n+1)^2$ aux deux membres de l'inégalité, il vient :

$$(1) \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Notons maintenant que :

$$2 - \frac{1}{n+1} - \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n(n+1)^2} \geq 0.$$

Il en résulte que le membre de droite de (1) est majoré par

$$2 - \frac{1}{n+1}.$$

Il en est a fortiori de même du membre de gauche, ce qui signifie que l'on a :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}.$$

C'est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.

3. *Une remarque*

Pour un énoncé « ouvert » du type « Calculer u_n en fonction de n », il est pertinent, si le résultat n'apparaît pas immédiatement, de commencer par *deviner* le résultat avant de l'établir par récurrence. Voici un exemple. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R}\,; \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = {u_n}^2.$$

On cherche à calculer u_n. On observe que

$$u_1 = {u_0}^2, \quad u_2 = {u_1}^2 = {u_0}^4, \quad u_3 = {u_2}^2 = {u_0}^8.$$

Il semble donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = {u_0}^{2^n}.$$

La démonstration est alors immédiate. La propriété $\mathcal{P}_0$ est vérifiée car $2^0 = 1$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Alors

$$u_{n+1} = {u_n}^2 = \left({u_0}^{2^n}\right)^2 = {u_0}^{2^n\times 2} = {u_0}^{2^{n+1}}.$$

Exercice 1 (② Sommes des cubes des n premiers entiers $*$)**.** *Montrer que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$ [3]

Exercice 2 (②)**.** *Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier impair λ_n tel que*

$$5^{2^n} = 1 + \lambda_n 2^{n+2}.$$

Les suites arithmético-géométriques, qui généralisent simultanément les suites arithmétiques et les suites géométriques, sont d'usage assez courant ; elles constituent une des rares familles de suites obéissant à une récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ dont on peut expliciter le terme général. L'exercice ci-après résume leur étude.

Exercice 3 (③ Suites arithmético-géométriques $*$)**.** *Soient a et b deux réels, $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = au_n + b.$$

On se propose de calculer u_n en fonction de n et u_0.

a) Traiter le cas $a = 1$.

On suppose désormais $a \neq 1$.

b) Résoudre l'équation $x = ax+b$. On note ℓ la solution. Dans la question suivante, il est inutile (voire toxique) de remplacer ℓ par sa valeur ; seule est utile l'équation

$$\ell = a\ell + b.$$

c) On pose, pour n dans $\mathbb{N}$:

$$v_n = u_n - \ell.$$

Montrer que $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique. Conclure.

d) À quelles conditions portant sur a et u_0 la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est-elle convergente ?

3. On notera la curiosité suivante : la somme des cubes des n premiers entiers est égale au carré de la somme des n premiers entiers.

Exercice 4 (③). *La suite réelle $(t_n)_{n\geq 0}$ est définie par $t_0 = 1$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad t_{n+1} = \frac{\sqrt{t_n}}{e}.$$

En appliquant l'exercice précédent à la suite $(\ln(t_n)_{n\geq 0})$, exprimer t_n en fonction de n et étudier la convergence de $(t_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 5 (③). *La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est définie par $x_0 = 1$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = x_0 + x_1 + \cdots + x_n.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer x_n en fonction de n.

Exercice 6 (④). *Soit $c \in \mathbb{R}^{+*}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+cx^2}}$. Calculer $f(f(x)), f(f(f(x)))$ et généraliser.*

1.3 Le raisonnement par récurrence (2)

On rencontre fréquemment des récurrences un petit peu plus compliquées. Ainsi, l'hérédité peut consister en la preuve du fait que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ impliquent $\mathcal{P}_{n+2}$, voire en la preuve du fait que les propriétés $\mathcal{P}_0, \ldots, \mathcal{P}_n$ impliquent $\mathcal{P}_{n+1}$ (« récurrence forte »). La rédaction doit évidemment être adaptée. Par exemple, dans la première situation (« récurrence à deux termes »), l'initialisation doit comporter la vérification de $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$.

Exemples

1. (∗) *Suite de Fibonacci*
   La suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$ est définie par :

   $$F_0 = 0, \quad F_1 = 1\ ; \quad \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

   Cette suite, introduite par Fibonacci au treizième siècle, possède de nombreuses propriétés. Nous allons montrer que F_n est donné par une formule relativement simple. Posons

   $$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

   Nous n'utiliserons pas ces expressions, mais le fait que α et β sont racines de l'équation du second degré :

   $$x^2 - x - 1 = 0.$$

   Pour n dans $\mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n$ la propriété :

   $$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}.$$

   La définition de $(F_n)_{n\geq 0}$ suggère d'établir $\mathcal{P}_n$ par une récurrence à deux termes.

   Initialisation. Les propriétés $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vérifiées. En effet :

   $$\frac{\alpha^0 - \beta^0}{\sqrt{5}} = 0 = F_0, \qquad \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{5}} = 1 = F_1.$$

Hérédité. Soit n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ soient vraies. Alors :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+1} + \alpha^n - \beta^{n+1} - \beta^n\right).$$

Mais :

$$\alpha^{n+1} + \alpha^n = \alpha^n \times (\alpha + 1) = \alpha^n \times \alpha^2 = \alpha^{n+2}.$$

De même :

$$\beta^{n+1} + \beta^n = \beta^{n+2}.$$

Finalement :

$$F_{n+2} = \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\sqrt{5}}.$$

La propriété $\mathcal{P}_{n+2}$ est démontrée.

Remarques

(a) *Démonstration et explication*

Le raisonnement par récurrence est un outil très efficace pour établir des formules données. Comme l'illustre cet exemple, une démonstration n'est pas forcément une explication et il est légitime de se demander « d'où vient » la formule précédente. L'exercice 11 permet de mieux comprendre le résultat.

(b) *À quoi peut servir l'expression obtenue ?*

D'abord, à rendre plus ou moins immédiate la démonstration de formules algébriques relatives à la suite $(F_n)_{n\geq 0}$, sans pour autant en donner systématiquement la meilleure approche.

Ensuite, à donner le comportement asymptotique (c'est-à-dire lorsque n tend vers $+\infty$) de $(F_n)_{n\geq 0}$: $(F_n)_{n\geq 0}$ est différence de deux suites géométriques de raisons respectives $\alpha > 1$ et $\beta \in]-1, 0[$. Lorsque n tend vers $+\infty$, F_n se comporte « à peu près » comme la suite géométrique $\left(\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}\right)_{n\geq 0}$, ce que la notion de suites équivalentes, étudiée en première année post-bac permettra de préciser. Nous prouverons en **5.3** un résultat de même nature :

$$(1) \qquad \frac{F_{n+1}}{F_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha.$$

Il est clair que l'apparition de α dans (1) ne peut suivre immédiatement de la définition de $(F_n)_{n\geq 0}$.

En revanche, « à cause du $\sqrt{5}$ », l'expression de F_n n'est pas directement adaptée à la démonstration de résultats « arithmétiques » relatifs à la suite $(F_n)_{n\geq 0}$.

2. $(*)$ *Existence de la décomposition d'un entier en produit de nombres premiers*

Montrons que tout entier $n \geq 2$ est produit de nombres premiers. L'assertion $\mathcal{P}_n$ est donc « n est produit de nombres premiers ».

Initialisation. Puisque $2 = 2$, $\mathcal{P}_2$ est vraie.

Hérédité. Soit maintenant $n \geq 2$. Supposons $\mathcal{P}_k$ vraie pour tout k de $\{2, \ldots, n\}$ et montrons que $n + 1$ est produit de nombres premiers. Deux cas se présentent.

- L'entier $n + 1$ est premier, donc produit de nombres premiers.

- L'entier $n+1$ n'est pas premier ; il peut donc s'écrire $n+1 = ab$ où a et b sont deux éléments de $\{2, \ldots, n\}$. On applique $\mathcal{P}_a$ et $\mathcal{P}_b$: a et b sont produits de nombres premiers, il en est donc de même de leur produit $n+1$.

L'assertion $\mathcal{P}_{n+1}$ est établie.

Remarque *Unicité de la décomposition en facteurs premiers*

Il est beaucoup plus difficile d'établir, qu'à l'ordre des facteurs près, il n'y a qu'une décomposition d'un entier $n \geq 2$ en produit de facteurs premiers ; on trouvera la démonstration en **12.6**.

Exercice 7 (①). *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :*

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 5 \qquad et \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 2^n + 3^n.$$

Exercice 8 (②). *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :*

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2 \quad et \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1} = \frac{{u_n}^2}{u_{n-1}}.$$

« Deviner » une formule donnant u_n en fonction de n, puis la démontrer par récurrence.

Exercice 9 (③). *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :*

$$u_0 = 0\,; \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} + u_n = n.$$

Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 10 (③). *La suite $(F_n)_{n\geq 0}$ est celle de l'exemple 1. Pour n dans $\mathbb{N}$, on pose :*

$$\Delta_n = F_n F_{n+2} - {F_{n+1}}^2.$$

a) Calculer Δ_n pour quelques valeurs de n. Deviner une formule donnant Δ_n et démontrer cette formule par récurrence.

b) Calculer directement Δ_n à partir de la formule obtenue dans l'exemple 1. Pour faciliter les calculs, mieux vaut ne pas remplacer tout de suite α et β par leurs expressions.

Dans les deux exercices suivants, on donne une méthode générale pour expliciter les suites vérifiant une récurrence du type Fibonacci. Cette étude est complétée dans l'exercice 435 de **11.4**.

Exercice 11 (④ Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 $*$). *Soient a et b deux nombres réels. On suppose que l'équation $x^2 = ax + b$ admet deux racines réelles distinctes λ et μ. On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

a) Montrer que, pour α et β dans $\mathbb{R}$, la suite $\left(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n\right)_{n\geq 0}$ appartient à $\mathcal{E}$.

b) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ un élément de $\mathcal{E}$. Vérifier qu'il existe deux nombres réels α et β tels que

$$\alpha + \beta = u_0 \qquad et \qquad \alpha\lambda + \beta\mu = u_1.$$

c) Avec les notations de b), montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n.$$

d) Retrouver le résultat de l'exercice 7.

Exercice 12 (④ Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2, suite)**.** *Soient a et b deux nombres réels, avec $b \neq 0$. On suppose que l'équation $x^2 = ax + b$ admet une unique racine réelle λ, nécessairement non nulle. On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

a) Montrer que, pour α et β dans $\mathbb{R}$, la suite $(\alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n)_{n\geq 0}$ appartient à $\mathcal{E}$.

b) En reprenant la méthode de l'exercice précédent, montrer que, si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est un élément de $\mathcal{E}$, il existe deux nombres réels α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n.$$

L'exercice suivant sera utilisé en **7.3**.

Exercice 13 (④)**.** *Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ contenant 1 et telle que :*

$$i)\ \forall n \in A, \quad 2n \in A \qquad et \qquad ii)\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n+1 \in A \ \Rightarrow\ n \in A.$$

a) Montrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \qquad 2^m \in A.$$

b) Montrer que $A = \mathbb{N}^*$.

Exercice 14 (④ Fractions égyptiennes)**.** *On se propose de montrer que tout rationnel de $]0,1[$ s'écrit comme somme d'inverses d'entiers naturels deux à deux distincts. Ce type d'écriture, utilisé par les égyptiens dans l'Antiquité, n'a pas un très grand intérêt, mais la preuve du résultat est un bon exemple de raisonnement par récurrence.*

a) Soit x un rationnel de $]0,1[$. On écrit donc

$$x = \frac{m}{n}, \qquad (m,n) \in {\mathbb{N}^*}^2, \quad m < n.$$

On effectue la division euclidienne de n par m :

$$n = qm + r, \qquad q \in \mathbb{N}^*, \quad r \in \{0, \ldots, m-1\}.$$

On suppose que x n'est pas l'inverse d'un entier, i.e. que m ne divise pas n ou encore que $r \neq 0$.

Montrer que $x - \dfrac{1}{q+1}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{m'}{n'}, \qquad n' \in \mathbb{N}^*, \quad m' \in \{1, \ldots, m-1\}.$$

b) En utilisant une hypothèse de récurrence judicieuse, démontrer la propriété voulue.

c) Constater que la démonstration précédente fournit en fait un algorithme de décomposition. Appliquer cet algorithme à $x = \dfrac{5}{17}$.

Exercice 15 (⑤)**.** *La suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *est définie par* $u_0 = 1$ *et :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = u_{\lfloor n/2 \rfloor} + u_{\lfloor n/3 \rfloor} + u_{\lfloor n/6 \rfloor}.$$

a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geq n + 1.$$

b) Trouver $C > 0$ *tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n \leq Cn.$$

Exercice 16 (⑤)**.** *Soit*

$$S = \{2^k 3^\ell \ ; \ (k, \ell) \in \mathbb{N}^2\}.$$

Montrer que tout élément de $\mathbb{N}^*$ *peut s'écrire* $s_1 + \cdots + s_m$ *où* $m \in \mathbb{N}^*$*, où les* s_i *sont dans* S *et où, pour tout couple* (i, j) *d'éléments distincts de* $\{1, \ldots, m\}$*,* s_i *ne divise pas* s_j*.*

1.4 Le raisonnement par l'absurde

Pour établir une propriété $\mathcal{P}$, on peut *raisonner par l'absurde*, c'est-à-dire supposer que $\mathcal{P}$ est fausse et arriver à une contradiction. Les deux exemples proposés remontent à l'Antiquité.

Exemples

1. (∗) *Irrationnalité de* $\sqrt{2}$
   Montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel. En raisonnant par l'absurde, on suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel. On peut donc écrire :
   $$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$
   où p et q sont des éléments de $\mathbb{N}^*$ et où la fraction $\dfrac{p}{q}$ est irréductible. En élevant au carré, il vient :
   $$2\, q^2 = p^2.$$
   Par conséquent, p^2 est pair. Or, le carré d'un entier impair est impair, comme le montre la formule :
   $$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$
   Il s'ensuit que p est pair et s'écrit donc $2p'$ où $p' \in \mathbb{N}^*$. On a donc :
   $$q^2 = 2\, p'^2,$$
   égalité qui montre que q^2 est pair, donc que q est pair. Les deux entiers p et q admettent 2 comme diviseur commun, ce qui contredit l'hypothèse.

   Les preuves d'irrationalité reposent en général sur un raisonnement par l'absurde, ce qui est compréhensible, l'irrationalité étant définie par une propriété « négative ». On trouvera des exemples analogues dans les exercices de ce paragraphe et des exemples un peu plus élaborés plus loin (**8.7, 10.10, 12.5, 12.6**).
2. (∗) *Existence d'une infinité de nombres premiers*
   Montrons que l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est infini. On suppose par l'absurde que $\mathcal{P}$ est fini et on écrit
   $$\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_r\}, \qquad p_1 < \cdots < p_r.$$

Posons

$$N = p_1 \times \cdots \times p_r + 1$$

et considérons p un diviseur premier de N. Par hypothèse, p est l'un des p_i et divise donc $p_1 \times \cdots \times p_r = N - 1$. Il s'ensuit que p divise $N - (N - 1) = 1$, contradiction.

Variante. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + n! \geq 2$. Soit p un diviseur premier de $n! + 1$. Alors $p > n$, sans quoi p diviserait $n!$ (car p apparaît dans le produit d'entiers définissant $n!$) et $n! + 1$, donc $(n!+1) - n! = 1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un nombre premier strictement supérieur à n, ce qui établit le résultat.

Exercice 17 (②). *Soient a, b, c, d des nombres rationnels tels que*

$$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}.$$

Montrer que $a = c$ et $b = d$.

Exercice 18 (②). *Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel. Généraliser.*

Exercice 19 (②). *Montrer que $\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$ est irrationnel.*

Exercice 20 (② Caractère rationnel ou irrationnel d'une somme). *a) Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est irrationnelle.*

b) Montrer que le produit d'un nombre rationnel non nul et d'un nombre irrationnel est irrationnel.

c) Trouver deux nombres irrationnels dont la somme soit rationnelle, deux nombres irrationnels dont la somme soit irrationnelle. Même question avec le produit.

Exercice 21 (②). *Montrer que $\sqrt{6}$ est irrationnel, puis en déduire que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.*

1.5 Le raisonnement par analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse est utilisé pour déterminer les solutions d'un problème donné lorsqu'une rédaction « par équivalence » est impossible ou simplement délicate. Dans la première partie (analyse), on détermine les propriétés d'une éventuelle solution, de manière à limiter sévèrement les possibilités. La seconde partie (synthèse) consiste à déterminer, parmi les solutions fournies par l'analyse, lesquelles sont effectivement solution du problème initial.

Dans les cas d'existence et unicité, l'analyse fournit souvent une solution unique ; la synthèse se réduit alors à la vérification du fait que la solution déterminée par l'analyse convient effectivement.

Exemples

1. (∗) *Décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire*
   Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On va montrer qu'existe un unique couple (p, i) de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

   - p est paire, i est impaire ;

   - $f = p + i$.

Analyse. Supposons donc que f s'écrive $p+i$ avec p paire et i impaire. Fixons x dans $\mathbb{R}$. En testant sur x et $-x$ l'égalité des fonctions f et $p+i$, il vient :

$$f(x) = p(x) + i(x), \qquad f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x).$$

En faisant la somme et la différence de ces deux égalités, il vient :

$$p(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right), \qquad i(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right).$$

Synthèse. Définissons deux fonctions p et i en posant, pour x dans $\mathbb{R}$:

$$p(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right), \qquad i(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right).$$

On vérifie immédiatement que p est paire, i impaire et que $f = p + i$.

2. $(*)$ *Une équation fonctionnelle*

On appelle *équation fonctionnelle* la recherche des fonctions vérifiant certaines conditions. Voici un exemple très classique : on cherche les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$(1) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Noter qu'il y a ici deux conditions : la dérivabilité et la relation (1).

Analyse. Soit f une éventuelle solution. Fixons y et dérivons par rapport à x. Il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x+y) = f'(x).$$

Prenons maintenant $x = 0$, ce qui est possible puisque l'égalité précédente est vraie pour tout x. Il vient, pour tout y de $\mathbb{R}$:

$$f'(y) = f'(0).$$

Ainsi, f' est constante, donc f est affine, c'est-à-dire de la forme :

$$x \mapsto ax + b.$$

Synthèse. Soit f une fonction affine. On dispose de deux réels a et b tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = ax + b.$$

Cherchons si f est solution du problème. D'abord, f est dérivable. Ensuite, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f(x+y) = a(x+y) + b \quad \text{et} \quad f(x) + f(y) = ax + b + ay + b = a(x+y) + 2b.$$

Pour que ces deux expressions soient égales, il faut et il suffit que b soit nul. En conclusion, les solutions du problème sont les fonctions linéaires :

$$x \mapsto ax, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Remarque *Amélioration du résultat*

Une démonstration un peu plus compliquée, proposée dans l'exercice 24, établit qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (1) et continue sur $\mathbb{R}$ est de la forme $x \longmapsto ax$. Comme la continuité est une propriété plus faible que la dérivabilité, ce résultat améliore celui démontré ici. La caractérisation des fonctions linéaires ainsi obtenue remonte à Cauchy (environ 1820).

Exercice 22 (③ Caractérisation du logarithme $*$)**.** *Trouver les fonctions f de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables et telles que*

$$\forall (x,y) \in {\mathbb{R}^{+*}}^2, \qquad f(xy) = f(x) + f(y).$$

Exercice 23 (③)**.** *On se propose de déterminer les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) + f(x-y) = 2\left(f(x) + f(y)\right).$$

Dans a) et b), f est une fonction solution.

a) Calculer $f(0)$. Montrer que f est paire.

b) Montrer que f'' est constante.

c) Conclure.

Exercice 24 (④ Caractérisation des fonctions linéaire, suite $*$)**.** *Dans cet exercice, f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

a) Calculer $f(0)$ et montrer que f est impaire.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer $f(nx)$ en fonction de n et $f(x)$.

c) Soit $a = f(1)$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \qquad f(x) = ax.$$

d) Expliquer pourquoi tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.

e) Conclure que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = ax.$$

2 Calculs algébriques

Les mathématiques actuelles reposent sur le formalisme du calcul algébrique (« littéral »), également utile en physique, et dont la mise au point a été très lente. On rappelle ici les techniques étudiées au lycée et on introduit les symboles $\sum$ et $\prod$. On insiste sur l'exemple très courant des *sommes et produits télescopiques*.

2.1 Généralités et rappels

Au delà des règles de calcul élémentaires (distributivité, calcul sur les puissances, les logarithmes...), il faut connaître par cœur les résultats suivants.

- Les identités remarquables : $(a+b)^2, (a-b)^2, (a+b)(a-b), (a+b)^3, (a-b)^3$. [4]

- La somme des n premiers entiers :

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

à partir de laquelle on retrouve la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique quelconque.

- La somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique $(a^k)_{k\geq 0}$ pour $a \neq 1$:

$$1+a+a^2+\cdots+a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1},$$

à partir de laquelle on retrouve la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique quelconque.

- La factorisation :

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}),$$

qui est une conséquence de la formule précédente. Noter que, si n est impair, alors $(-1)^n = -1$ et on a également la factorisation :

$$a^n + b^n = a^n - (-b)^n = (a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

- Pour le calcul avec les radicaux, il peut être utile d'utiliser la *quantité conjuguée* : par exemple, si a et b sont des nombres rationnels non tous deux nuls et si on veut écrire $x = \dfrac{1}{a+b\sqrt{2}}$ sous la forme $c+d\sqrt{2}$ avec c et d rationnels, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $a-b\sqrt{2}$ et on obtient

$$x = \frac{a}{a^2-2b^2} - \frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}.$$

Variante de la même idée : pour $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1}-\sqrt{x}.$$

4. Voir aussi la formule du binôme en **9.3**.

Exercice 25 (①). *Si a, b, c, d sont des nombres réels non nuls, simplifier les fractions*

$$A = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}, \quad B = \frac{\frac{a}{b}}{c}, \quad C = \frac{a}{\frac{b}{c}}.$$

Exercice 26 (①). *a) Exprimer simplement* $\ln(56) - \ln(7) + \ln(4)$.

b) Montrer que $\ln(\sqrt{216}) = \dfrac{3}{2}\ln(6)$.

c) Écrire le plus simplement possible $\ln(49) + \ln(21) - \ln(3\sqrt{7})$.

Exercice 27 (①). *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels, $b_1, \ldots, b_n$ des nombres réels non nuls. On suppose que tous les nombres $\dfrac{a_i}{b_i}$, $1 \leq i \leq n$, sont égaux. Montrer que ces nombres sont également égaux à $\dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{b_1 + \cdots + b_n}$.*

Exercice 28 (①). *Montrer que* $2\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$.

Exercice 29 (①). *Soit $\mathbb{K}$ l'ensemble des nombres réels de la forme $a + b\sqrt{2}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$. Montrer que, si x et y sont dans $\mathbb{K}$, il en est de même de $x - y$, xy et, si $x \neq 0$, de $\dfrac{1}{x}$.*

Exercice 30 (①). *Soient x, y, z trois nombres réels. Vérifier que*

$$(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 3\,(x + y)\,(y + z)\,(z + x).$$

Exercice 31 (②). *Soit n le produit de quatre éléments de $\mathbb{N}^*$ consécutifs. Montrer que $n + 1$ est le carré d'un entier.*

Exercice 32 (②). *Soient x et y deux nombres réels. En complétant un carré, donner une factorisation de $x^4 + 4y^4$.*

Exercice 33 (③). *Soit*

$$a = \sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{152}{27}}} - \sqrt[3]{-1 + \sqrt{\frac{152}{27}}}.$$

Montrer que $a^3 + 5a$ est un nombre entier. [5]

Exercice 34 (③). *Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, soit*

$$E = x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2.$$

Factoriser E en un produit de quatre facteurs.

Exercice 35 (④). *a) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $(x + 3)^2 + x^2 - (x + 1)^2 - (x + 2)^2$.*

b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) \in \{-1, 1\}^m$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i i^2.$$

5. Le lecteur trouvera une explication satisfaisante dans l'exercice 440 de **11.5**.

2.2 Le symbole $\sum$

La *somme* des nombres (réels ou complexes) $a_1, \ldots, a_n$ est notée :

$$(1) \qquad a_1 + \cdots + a_n$$

ou, d'une manière plus compacte et dénuée de toute ambiguïté :

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

On définit plus généralement, pour m entier de $\{1, \ldots, n\}$:

$$(3) \qquad \sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + \cdots + a_n.$$

Cette somme comporte $n - m + 1$ termes.

Dans les expressions (2) et (3), la lettre k, appelée *indice*, est une *variable muette*, ce qui signifie que l'on peut changer son nom sans changer la somme : la somme (1) peut être notée :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

C'est la même situation qu'en intégration. En effet, dans l'écriture

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

la variable t est muette. La sommation est d'ailleurs la version « discrète » de l'intégration.

Les notations ont une importance centrale en mathématiques ; il suffit pour s'en convaincre d'essayer de faire une multiplication en chiffres romains. Le symbole $\sum$ et la notation indexée ont représenté un très grand progrès pour noter efficacement des sommes de longueur arbitraire et il est nécessaire de s'y habituer rapidement. Cependant, il ne faut pas hésiter à revenir à une écriture du type (1) en cas de besoin : pour un calcul non immédiat, il est souvent préférable de calculer, au moins au brouillon, avec des points de suspension.

Exemples

1. $(*)$ *Un premier exemple*
   La somme
   $$\sum_{k=0}^{n} 3$$
   vaut $3(n+1)$: on somme $n+1$ termes, tous égaux à 3.
2. $(*)$ *Linéarité de la somme*
   Si $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ et $(b_k)_{1\leq k\leq n}$ sont deux suites finies de nombres complexes, si λ et μ sont deux nombres complexes, alors :
   $$\sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k + \mu \sum_{k=1}^{n} b_k.$$
   En effet, le membre de gauche vaut
   $$(\lambda a_1 + \mu b_1) + \cdots + (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda(a_1 + \cdots + a_n) + \mu(b_1 + \cdots + b_n).$$
   Cette propriété d'usage constant, est appelée *linéarité de la somme*.

3. (∗) *Progressions arithmétiques*
   La formule :
   $$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$
   se réécrit
   $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

4. (∗) *Progressions géométriques*
   La formule donnant la somme d'une progression géométrique se réécrit :
   $$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1},$$
   pour a nombre complexe différent de 1 et n dans $\mathbb{N}$.

5. (∗) *Nombres harmoniques*
   Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on définit le *n-ième nombre harmonique* H_n par :
   $$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
   Les nombres H_n interviennent très fréquemment en mathématiques. On ne dispose pas de formule simple « non sommatoire » pour H_n. Mais nous verrons dans le paragraphe **8.9** comment estimer H_n en comparant la somme à une intégrale.

Exercice 36 (①)**.** *Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Donner une expression simple de la somme $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ des n premiers entiers impairs.*

Exercice 37 (②)**.** *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. On suppose que*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{n^2 + n}{3}.$$
Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer u_n.

Exercice 38 (③ Moyenne dans la table de Pythagore)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On trace la table de multiplication des entiers entre 1 et n. On obtient donc un tableau carré comportant n^2 entiers naturels. Quelle est la moyenne de ces entiers ?*

Exercice 39 (① Somme d'une série géométrique ∗)**.** *Soit $x \in]-1, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$. Montrer que*
$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-x}.$$

Exercice 40 (③). *a) En utilisant la formule de la progression géométrique et la dérivation, calculer, pour x réel et n dans $\mathbb{N}^*$:*

$$\sum_{k=0}^{n} kx^k.$$

On distinguera le cas $x = 1$.

b) Si $x \in]-1, 1[$, déterminer la limite de la somme précédente lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 41 (②). *On pose, pour n dans $\mathbb{N}^*$: $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$. Simplifier $u_{n+1} - u_n$ et en déduire la monotonie de $(u_n)_{n\geq 1}$.*

Exercice 42 (③). *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer en fonction de n la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n^2} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$.*

Exercice 43 (③). *On note H_n le n-ième nombre harmonique, introduit dans l'exemple 5 ci-dessus. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$,*

$$\sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n - n.$$

Exercice 44 (④). *Trouver les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels strictement positifs telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} {u_k}^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k \right)^2.$$

2.3 Complément : sommes télescopiques

En général, une somme ne peut pas s'exprimer de façon simple. Les cas où une simplification est possible n'en sont que plus précieux. Une situation intéressante est celle des *sommes télescopiques*. Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles ou complexes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = b_{n+1} - b_n.$$

On a alors

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = (b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) + \cdots + (b_{n+1} - b_n).$$

Les termes $b_1, b_2, \ldots, b_n$ se simplifient. Il reste la formule suivante, que l'on peut évidemment démontrer par récurrence sur n :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = b_{n+1} - b_0.$$ [6]

Résumons : pour toute suite réelle ou complexe, $(b_k)_{k\geq 0}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_0.$$

6. La récurrence est cachée par l'écriture de la somme avec les points de suspension.

Exemples

1. (∗) *Somme d'une progression arithmétique par télescopage*
   On a
   $$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad (k+1)^2 - k^2 = 2k+1.$$
   Soit $n \in \mathbb{N}$. En sommant les égalités précédentes pour k entre 0 et n, on obtient :
   $$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2.$$
   Cette égalité équivaut à :
   $$\sum_{k=0}^{n} 2k = n^2 + n = n(n+1),$$
   c'est-à-dire, après division par 2, et en notant que $k = 0$ n'apporte aucune contribution, à la formule connue
   $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. (∗) *Une somme télescopique classique*
   On a :
   $$(1) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, \qquad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$
   Par télescopage, on en déduit, pour n entier ≥ 1 :
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$
   En particulier
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$
   La *décomposition des fractions rationnelles en éléments simples* étudiée en CPGE est une généralisation puissante de l'identité (1).

   Nous allons profiter de l'occasion pour retrouver la majoration vérifiée par récurrence dans l'exemple 2 de **1.2**. Soit n un entier ≥ 2. On a :
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}.$$
   Or, pour $k \geq 2$:
   $$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}.$$
   Par suite :
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)},$$
   d'où :
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

On retrouve la majoration :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Exercice 45 (③)**.** *a) Si n est dans $\mathbb{N}^*$, simplifier la somme*

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Quelle est la limite de cette expression lorsque n tend vers $+\infty$?

b) Si n est un entier ≥ 2, simplifier la somme

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

Quelle est la limite de cette expression lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 46 (④)**.** *Déterminer trois réels a, b, c tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\}, \qquad \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}.$$

En déduire, pour n dans $\mathbb{N}^*$, une expression simple de

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

Quelle est la limite de $(U_n)_{n\geq 1}$ lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 47 (③ Somme des premiers carrés par télescopage $*$)**.** *a) Trouver trois réels a, b, c tels que, si :*

$$P \ : x \in \mathbb{R} \mapsto ax^3 + bx^2 + cx,$$

on ait

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) - P(x-1) = x^2.$$

En déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

b) Adapter cette méthode pour calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Remarque *Somme des puissances p-ièmes des n premiers entiers naturels*

On a rencontré dans les pages précédentes les trois formules :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Pour p et n dans $\mathbb{N}^*$, soit plus généralement

$$S_{p,n} = \sum_{k=1}^{n} k^p$$

la somme des puissances p-ièmes des n premiers entiers. Au début du dix-septième siècle, Johann Faulhaber a généralisé les formules précédentes et prouvé que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme F_p tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_{p,n} = F_p(n).$$

Le terme de plus haut degré de F_p est $\dfrac{X^{p+1}}{p+1}$, ce qui est cohérent avec les résultats obtenus pour $p = 1, p = 2, p = 3$. Nous démontrerons ces résultats (qui n'exigent pas beaucoup de connaissances) en **11.2**.[7] Nous définirons à cet effet les *polynômes de Bernoulli*, introduits par Jacob Bernoulli vers 1650, qui interviennent dans beaucoup d'autres questions mathématiques.

Exercice 48 (③ Récurrence géométrique non homogène)**.** *Soient $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle, a un réel différent de 0 et de 1, $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = au_n + v_n.$$

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u'_n = \frac{u_n}{a^n}.$$

a) Si $n \in \mathbb{N}$, simplifier $u'_{n+1} - u'_n$.

b) En déduire une expression sommatoire de u'_n, puis de u_n.

Exercice 49 (②)**.** *Donner une forme simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k \times k!)$. On pourra utiliser l'égalité :*

$$k \times k! = (k+1)! - k!.$$

Exercice 50 (②)**.** *Par une méthode analogue à celle de l'exercice précédent, donner une forme simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.*

Exercice 51 (③)**.** *Pour j dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}$, on pose :*

$$H_j(x) = x(x+1)\dots(x+j-1).$$

a) Pour j dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}$, calculer $H_{j+1}(x) - H_{j+1}(x-1)$.

b) En déduire, pour j et n dans $\mathbb{N}^*$, la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} H_j(k)$.

c) Retrouver les sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ à l'aide de la question b).

7. Vous pouvez vous y essayer seul en écrivant un système et en identifiant les coefficients des polynômes.

Exercice 52 (④ Une somme de coefficients binomiaux $*$)**.** *Soient r et n deux entiers naturels tels que $r \leq n$,*

$$S_{r,n} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r}.$$

a) En utilisant la relation de Pascal :

$$\binom{k+1}{r+1} = \binom{k}{r} + \binom{k}{r+1},$$

valable pour k et n dans $\mathbb{N}$ avec $r+1 \leq k$, exprimer $S_{r,n}$ comme un coefficient binomial.

b) Retrouver le résultat obtenu en employant un raisonnement combinatoire.

2.4 Le symbole $\prod$

Le *produit* des nombres (réels ou complexes) $a_1, \ldots, a_n$ est noté soit :

$$(1) \qquad a_1 \times \cdots \times a_n = a_1 \ldots a_n$$

soit, de manière plus compacte :

$$(2) \qquad \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

Ici encore, la lettre k est appelée *indice* et est une variable muette. Les commentaires relatifs à la somme s'adaptent immédiatement.

Exemples

1. ($*$) *Premiers exemples*
   a) Pour n dans $\mathbb{N}$, $n \geq 3$, on a :

   $$\prod_{k=3}^{n} (-5) = (-5)^{n-2}.$$

   On effectue en effet le produit de $n-2$ facteurs tous égaux à -5.

   b) Si n est dans $\mathbb{N}^*$, on a :

   $$\prod_{k=1}^{n} 2^k = 2^{1+2+\cdots+n} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

2. *Produit des nombres pairs entre 2 et $2n$*
   Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on considère le produit P_n des nombres pairs compris entre 2 et $2n$:

   $$P_n = \prod_{k=1}^{n} (2k).$$

   On peut écrire :

   $$P_n = (2 \times 2 \times \cdots \times 2) \times (1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n)$$

   où le nombre de 2 dans la première parenthèse est n. Ainsi :

   $$P_n = 2^n \, n!.$$

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on peut alors calculer le produit Q_n des nombres impairs compris entre 1 et $2n+1$. On observe d'abord que $P_n \times Q_n$ est le produit de tous les entiers entre 1 et $2n+1$, c'est-à-dire $(2n+1)!$. En tenant compte du résultat précédent, il vient :

$$Q_n = \frac{(2n+1)!}{P_n} = \frac{(2n+1)!}{2^n\, n!}.$$

3. $(*)$ *Produits télescopiques*
Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites de complexes non nuls telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

On a alors

$$\prod_{k=0}^{n} a_k = \frac{b_1}{b_0} \times \frac{b_2}{b_1} \times \cdots \times \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Les termes $b_1, b_2, \ldots, b_n$ se simplifient. Il reste :

$$\prod_{k=0}^{n} a_k = \frac{b_{n+1}}{b_0}.$$

En guise d'application, calculons, pour n dans $\mathbb{N}^*$:

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k+2}.$$

On a :

$$P_n = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2}.$$

Par suite :

$$P_n = \frac{2}{n+2}.$$

Exercice 53 (①)**.** *a) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, simplifier le produit*

$$A_n = \prod_{k=1}^{n} 4^{k^2+1}.$$

b) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, simplifier le produit

$$B_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{k+4}{k+3}.$$

Exercice 54 (②)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quel est le produit des n^2 entiers apparaissant dans la table de multiplication des entiers entre 1 et n ?*

Exercice 55 (③)**.** *Pour $n \geq 2$, donner une expression simple de*

$$C_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

et trouver la limite de la suite $(C_n)_{n\geq 2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3 Inégalités, inéquations, trinôme du second degré réel

La manipulation des inégalités joue un rôle fondamental en analyse. Elle n'est pas difficile, mais demande du soin et pose souvent problème aux étudiants entrant dans l'enseignement supérieur, principalement faute d'une pratique suffisante. On revoit ici les règles essentielles qui régissent le calcul sur les inégalités, ainsi que le trinôme du second degré réel.

3.1 Inégalités, encadrements, inéquations du premier degré

Les points suivants sont essentiels.

- Maîtriser les règles qui régissent les inégalités (addition de deux inégalités, multiplication d'une inégalité par un nombre réel positif, passage à l'inverse d'une inégalité), **en prêtant attention aux signes**. [8]

- Réaliser que factoriser une expression peut aider à en déterminer le signe.

Exercice 56 (①). *Soient a, b deux nombres réels, a', b', m, n quatre nombres réels strictement positifs tels que $\frac{a}{a'} > \frac{b}{b'}$. Montrer que*

$$\frac{b}{b'} < \frac{ma+nb}{ma'+nb'} < \frac{a}{a'}.$$

Exercice 57 (②). *Soient a, b, c des éléments de $]0,1]$.*

a) Montrer que $(ab-1)(bc-1)(ca-1) \leq 0$.

b) En déduire que

$$a+b+c+\frac{1}{abc} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+abc.$$

Exercice 58 (②). *Soient x et y deux éléments de $]-1,1[$. Montrer que le nombre réel $z = \frac{x+y}{1+xy}$ appartient à $]-1,1[$.*

Exercice 59 (②). *a) Quels ensembles décrivent respectivement x^2 et x^3 lorsque x décrit l'intervalle $[-2,+\infty[$?*

b) Quel ensemble décrit $\frac{1}{x}$ lorsque x décrit $]-4,5] \setminus \{0\}$?

Exercice 60 (②). *a) Quels ensembles décrivent respectivement $x+y$, xy, $\frac{x}{y}$ lorsque x décrit $[-2,+\infty[$ et y décrit $[2,+\infty[$?*

b) Même question lorsque x décrit $[-1,+\infty[$ et y décrit $]-\infty,3]$ (ou $]-\infty,3] \setminus \{0\}$ pour $\frac{x}{y}$.

8. Par exemple, si a et b sont deux éléments de $\mathbb{R}^+$, on a

$$a \leq b \Longleftrightarrow a^2 \leq b^2,$$

mais cette équivalence est fausse si a et b sont des réels. Le résultat devient

$$|a| \leq |b| \Longleftrightarrow a^2 \leq b^2.$$

Exercice 61 (② Inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$ (*))**.** *Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que*

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

et que cette inégalité est une égalité si et seulement si x et y ont même signe (au sens large). [9]

Exercice 62 (②)**.** *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation*

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{(x-1)^2} = 1.$$

Exercice 63 (②)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que*

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}.$$

Exercice 64 (②)**.** *Soient n dans $\mathbb{N}^*$, a dans $]1, +\infty[$. Montrer que*

$$\frac{a^n - 1}{a - 1} \leq n\, a^{n-1}.$$

Exercice 65 (②)**.** *Soient a et b deux éléments de $\mathbb{R}^+$. Montrer que*

$$\left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leq \sqrt{|a - b|}.$$

Exercice 66 (③)**.** *Déterminer le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \geq 2022.$$

Exercice 67 (③)**.** *Déterminer les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{N}^{*3}$ tels que $x \leq y \leq z$ et $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$.*

Exercice 68 (③ Monotonie des coefficients binomiaux $*$)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

a) Pour $0 \leq m \leq n-1$, comparer le quotient $\dfrac{\binom{n}{m+1}}{\binom{n}{m}}$ à 1.

b) En déduire que

$$\binom{n}{0} \leq \binom{n}{1} \leq \cdots \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$ [10]

c) En considérant la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, montrer que

$$\frac{2^n}{n+1} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq 2^n.$$ [11]

9. Ce résultat joue un rôle fondamental en analyse. Il se généralise aux nombres complexes (**10.11**).

10. Compte tenu de la propriété de symétrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, la suite d'inégalités ci-dessus donne, si n est fixé, le sens de variation de la suite $\left(\binom{n}{m}\right)_{0 \leq m \leq n}$. Cette suite est croissante jusqu'à $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, puis décroissante.

11. On trouvera une estimation plus précise du coefficient binomial central $\binom{2m}{m}$ dans l'exercice 249 de **8.6**.

Exercice 69 (④). *Soit, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=1}^{2022} |x-k|$.*

a) Étudier les variations de f. On remarquera que f est affine par morceaux, donc strictement croissante (resp. strictement décroissante, resp. constante) sur tout intervalle où sa pente est strictement positive (resp. strictement négative, resp. nulle).

b) Quel est le minimum de f sur $\mathbb{R}$?

Partie entière

Exercice 70 (①). *Montrer que, si $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0,1\}$.*

Exercice 71 (②). *Si $n \in \mathbb{N}$, donner une expression simple de $\lfloor (\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2 \rfloor$.*

Exercice 72 (③). *Montrer que, si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,*

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor - \lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0,1\}.$$

Inéquations se ramenant au premier degré

Exercice 73 (①). *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x+3| \geq 4$.*

Exercice 74 (②). *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|2x-4| \leq |x-1|$.*

Exercice 75 (①). *Quels sont les réels x tels que*

$$(x^2-3)\,(1-\sqrt{x})\,(|x|-6)\,|4x+3| \in \mathbb{R}^{+*} \text{ ?}$$

Exercice 76 (②). *Quels sont les entiers naturels n tels que $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \leq \dfrac{1}{10}$?*

Exercice 77 (②). *Selon la valeur de x, déterminer le signe de :*
a) $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-3}$,
b) $g(x) = \sqrt{|x-1|} - \sqrt{|2x-3|}$,
c) $h(x) = \ln(x+3) + \ln(x+2) - 2\ln(x+11)$.

3.2 Complément : inégalité arithmético-géométrique pour deux réels

L'inégalité suivante est le premier cas de l'*inégalité arithmético-géométrique*. Elle montre comment contrôler le produit de deux nombres réels en fonction de la somme de leurs carrés. En dépit de sa simplicité, elle est très utile. Elle sera généralisée en **7.4**.

Théorème 1 (Inégalité arithmético-géométrique pour deux nombres réels). *(i) Si a et b sont deux nombres réels, alors*

$$2ab \leq a^2 + b^2.$$

Il y a égalité si et seulement si $a = b$.

(ii) Si x et y sont deux nombres réels positifs ou nuls, alors

$$2\sqrt{xy} \leq x + y.$$

Il y a égalité si et seulement si $x = y$.

Preuve. Pour le premier point, il suffit d'écrire

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0.$$

Le second point s'en déduit en posant $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{y}$.

Exercice 78 (③)**.** *Soient a, b, c des éléments de $\mathbb{R}^+$.*

a) En utilisant le théorème 1, montrer que

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

b) Montrer que

$$9abc \leq (a+b+c)\,(ab+bc+ca).$$

*Pour cette question, on pourra utiliser l'inégalité arithmético-géométrique pour trois nombres réels (***7.3***).*

On peut reformuler le théorème 1 des deux manières suivantes :
- la somme de deux réels positifs x et y de produit p donné est minimale lorsque $x = y = \sqrt{p}$;
- le produit de deux réels positifs x et y de somme donnée S est maximal lorsque $x = y = S/2$.

Exercice 79 (① Rectangles de périmètre donné d'aire maximale)**.** *On se donne un rectangle de demi-périmètre p. Montrer que son aire est majorée par $\dfrac{p^2}{4}$. Pour quels rectangles y a-t-il égalité ?*

Exercice 80 (③ Comparaison des moyennes arithmétique, géométrique et harmonique)**.** *Si x et y sont deux éléments de $\mathbb{R}^{+*}$, leur moyenne arithmétique est $m = \dfrac{x+y}{2}$, leur moyenne géométrique $g = \sqrt{xy}$, leur moyenne harmonique $h = \dfrac{2xy}{x+y}$. Montrer que*

$$h \leq g \leq m.$$

Étudier les cas d'égalité. [12]

Exercice 81 (③ Moyenne arithmético-géométrique)**.** *On se donne deux nombres réels strictement positifs a et b et on considère les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ définies par $a_0 = a, b_0 = b$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + b_n\right), \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

a) Pour $n \geq 1$, comparer a_n et b_n. En déduire la monotonie des suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$. [13]

b) Montrer que les deux suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ convergent et ont même limite. [14]

Exercice 82 (③)**.** *Soient a, b, c trois éléments de $[0,1]$. Montrer que l'un au moins des trois nombres réels $a' = a(1-b), b' = b(1-c), c' = c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\dfrac{1}{4}$. On pourra considérer le produit $a'b'c'$.*

12. La moyenne harmonique est la « bonne » dans certaines situations. Soit un trajet de longueur d ; on parcourt la moitié de cette *distance* à vitesse v_1, l'autre avec la vitesse v_2. La vitesse moyenne est alors la moyenne harmonique de v_1 et v_2 (pourquoi ?). En revanche, si on roule la moitié du *temps* à la vitesse v_1 et l'autre moitié du temps à la vitesse v_2, la vitesse moyenne est la moyenne arithmétique de v_1 et v_2.

13. Insistons sur la condition $n \geq 1$.

14. Cette limite, appelée *moyenne arithmético-géométrique de a et b*, possède de très intéressantes propriétés.

3.3 Le trinôme du second degré réel

Soient a, b, c trois nombres réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(1) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Si $a = 0$, f est une fonction affine. Si $a \neq 0$, on dit que f est un *trinôme du second degré*.

Forme canonique

L'étude du signe et des racines du trinôme du second degré repose sur la *mise sous forme canonique*. Rappelons ce dont il s'agit. Soient en effet a, b, c dans $\mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Posons :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Pour x dans $\mathbb{C}$, on peut écrire :

$$(2) \qquad ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right).$$

On a ainsi :

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Racines du trinôme et factorisation

On est ainsi conduit à la discussion classique de l'équation

$$(3) \qquad f(x) = 0.$$

- Si $\Delta = 0$, (3) admet une unique racine réelle (dite « double »), à savoir $\dfrac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, (3) admet deux racines réelles distinctes, à savoir :

$$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a};$$

- si $\Delta < 0$, (3) n'a pas de racine réelle. [15]

Pour $\Delta \geq 0$, notons x_1 et x_2 les racines de (3) (avec $x_1 = x_2$ si $\Delta = 0$). La mise sous forme canonique entraîne la factorisation :

$$(4) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = a(x - x_1)\,(x - x_2).$$

Exercice 83 (①)**.** *Pour m dans $\mathbb{R}$, soit p_m le trinôme du second degré :*

$$p_m \ : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 + mx + 1.$$

Déterminer, selon la valeur de m, le nombre de racines réelles de p_m.

Exercice 84 (②)**.** *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations*

$$\ln(x+1) + \ln(x+5) = \ln(96) \quad \textit{et} \quad \ln(|x+1|) + \ln(|x+5|) = \ln(96).$$

15. Mais elle admet deux racines complexes non réelles et *conjuguées*.

Exercice 85 (②). *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison q positive telle que*

$$u_0 + u_1 = \frac{13}{2} \quad et \quad u_0\, u_2 = \frac{25}{4}.$$

Déterminer u_0 et q.

Exercice 86 (③). *Soit a dans $\mathbb{R}$. Déterminer le nombre de nombres réels x tels que :*

$$x^3 - x = a^3 - a.$$

Signe du trinôme pour les valeurs réelles de la variable

Supposons, pour fixer les idées :

$$a > 0.$$

La mise sous forme canonique (2) et la factorisation (4) entraînent la discussion suivante.

- Si $\Delta < 0$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) > 0.$$

- Si $\Delta = 0$ et si x_1 est la racine double de (3), alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1\}, \qquad f(x) > 0.$$

- Si $\Delta > 0$ et si on note $x_1 < x_2$ les deux racines réelles de (3), alors :

$$\forall x \in]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[\,, \quad f(x) > 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]x_1, x_2[\,, \quad f(x) < 0.$$

La discussion est analogue si $a < 0$. Si $a = 0$, la fonction f est constante si $b = 0$, affine non constante si $b \neq 0$. Notons que, dans ce cas, f ne peut être à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ que si $b = 0$ (dessin, ou résolution immédiate).

Exercice 87 (①). *Pour m dans $\mathbb{R}$, soit p_m le trinôme du second degré :*

$$p_m \ : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 + mx + 1.$$

Déterminer, selon les valeurs des réels m et x, le signe de $p_m(x)$.

Exercice 88 (②). *Résoudre les inéquations :*

$$x + 1 < \sqrt{x+4} \quad et \quad \sqrt{x^2 + 5x + 4} \leq 2x - 1.$$

Exercice 89 (②). *Résoudre les inéquations*

$$|x^2 - 5x + 6| \leq x^2 - 4x + 3 \quad et \quad x^2 - 5x + 6 \leq |x^2 - 4x + 3|.$$

Exercice 90 (③). *Déterminer les nombres réels m tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m + 6 \leq 0.$$

Somme et produit des racines

Revenons à l'équation (3) et notons-en x_1 et x_2 les racines, avec $x_1 = x_2$ si $\Delta = 0$. On a alors les formules :

$$(5) \qquad x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}, \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ainsi, la lecture des coefficients d'une équation de degré 2 donne immédiatement la somme et le produit des racines. Inversement si x_1 et x_2 sont deux nombres réels, l'équation du second degré

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

admet pour racines x_1 et x_2.

Exercice 91 (①)**.** *Soient x_1 et x_2 les deux racines (éventuellement confondues) du trinôme*

$$p \ : x \longmapsto ax^2 + bx + c.$$

Calculer ${x_1}^2 + {x_2}^2$ et $(x_1 - x_2)^2$ en fonction de a, b, c.

Exercice 92 (④)**.** *Soient Γ le cercle de centre O et de rayon R du plan, A un point du plan. On mène par A une droite Δ coupant Γ en deux points M_1 et M_2.*

a) Soit $\vec{u}$ un vecteur de norme 1. Montrer que la relation

$$\| \overrightarrow{OA} + t\vec{u}\|^2 = R^2$$

définit une équation du second degré en t dont on déterminera les coefficients.

b) En déduire que le produit scalaire $\overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{AM_2}$ est indépendant de Δ. [16]

Si on sait que l'équation (3) admet deux racines réelles (éventuellement confondues) x_1 et x_2, on détermine immédiatement leur signe avec les formules (5). En effet, le signe du quotient $\frac{c}{a}$ permet de dire si x_1 et x_2 sont ou non de même signe. Dans le cas où x_1 et x_2 sont de même signe, c'est-à-dire si $\frac{c}{a} > 0$, le signe commun de x_1 et x_2 est celui de leur somme $-\frac{b}{a}$.

Notons enfin que si $\frac{c}{a} < 0$, alors

$$\Delta = b^2 - 4ac = a^2 \left(\frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a} \right) > 0.$$

La condition $\frac{c}{a} < 0$ équivaut donc à l'existence de deux racines réelles non nulles de signes opposés. [17]

Exercice 93 (③)**.** *Soient u et v deux nombres réels. À quelles condition l'équation $x^4 + ux^2 + v = 0$ admet-elle quatre racines réelles distinctes ?*

16. Cette quantité est la *puissance du point A par rapport au cercle Γ*.

17. On peut également retrouver l'existence de deux racines réelles non nulles de signes opposés en considérant le signe de $f(0) = c$ et les limites de f en $\pm\infty$.

3.4 Complément : inégalité de Cauchy-Schwarz pour les sommes

L'inégalité ci-après, importante en elle même, admet de nombreuses généralisations.

Théorème 2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des nombres réels.*

(i) Alors

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

(ii) Si $a_1, \ldots, a_n$ ne sont pas tous nuls, cette inégalité est une égalité si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad b_i = \lambda a_i.$$

Preuve. On définit la fonction f par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2.$$

Comme le carré d'un nombre réel est positif, f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Mais, par ailleurs, f est un trinôme du second degré :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = Ax^2 + Bx + C,$$

où

$$A = \sum_{i=1}^{n} {a_i}^2, \quad B = 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i, \quad C = \sum_{i=1}^{n} {b_i}^2.$$

Le discriminant Δ de f est négatif ou nul, ce qui donne $B^2 \leq 4AC$, puis, puisque la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$, le premier point. D'autre part, l'égalité signifie que Δ est nul, donc que f admet une racine double μ dans $\mathbb{R}$. Comme une somme d'éléments de $\mathbb{R}^+$ n'est nulle que si chacun des termes est nul, la définition de f amène alors

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad b_i = -\mu a_i.$$

La réciproque est immédiate en remontant l'argument : si μ est comme ci-dessus, $f(\mu) = 0$ et, comme f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, Δ est nul.

Remarque *Interprétation géométrique*

Si deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ du plan euclidien ont pour coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans une base orthonormée, on a

$$\| \vec{v} \| = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \| \vec{v'} \| = \sqrt{x'^2 + y'^2}, \qquad \vec{v} \,.\, \vec{v'} = xx' + yy'.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $m = 2$ exprime donc la propriété géométrique bien connue

$$| \vec{v} \,.\, \vec{v'} | \leq \|v\| \, \|v'\|.$$

Pour $m = 3$, on a la même interprétation avec des vecteurs de l'espace. L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans sa forme générale exprime une propriété analogue des *espaces euclidiens*.

Exercice 94 (②)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant le théorème 2, montrer que, si $x_1, \ldots, x_n$ sont des nombres réels tels que $\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 1$, alors $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sqrt{n}$. Caractériser le cas d'égalité.*

4 Trigonométrie

La trigonométrie est un outil très efficace en géométrie euclidienne du plan (et également de l'espace). Elle joue un rôle important en mathématiques et en physique. Elle repose sur un petit nombre de notions et de formules, qui doivent être bien connues.

- Valeurs des cosinus et sinus des angles « usuels ». En cas d'hésitation, tracer systématiquement le cercle trigonométrique.
- Formules fondamentales (addition et duplication), conséquences.
- Variations et graphes de sin et cos.
- Congruence modulo un nombre réel.

Nous aurons l'occasion de revenir sur la trigonométrie dans le chapitre **10** (Nombres complexes).

4.1 Les formules d'addition et de duplication

Les *formules d'addition*

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \quad \cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y),$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x), \quad \sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)$$

sont fondamentales. [18]

Il faut également avoir en tête le cas particulier des *formules de duplication* :

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x), \quad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x).$$

Les « autres » formules de trigonométrie, par exemple du type :

$$\cos(x)\ \cos(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right)$$

ou

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\ \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

se déduisent immédiatement des formules d'addition et doivent être retrouvées rapidement.

Exercice 95 (①). *Vérifier l'égalité :*

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}.$$

En déduire les valeurs du cosinus et du sinus de $\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 96 (①). *Calculer* $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ *en utilisant la formule de duplication pour le cosinus. En déduire* $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

18. Le lecteur connaissant les nombres complexes peut les retrouver rapidement à partir des relations

$$e^{ix} \times e^{iy} = e^{i(x+y)} \quad \text{et} \quad e^{ix} \times e^{-iy} = e^{i(x-y)},$$

(développer et prendre parties réelles et imaginaires des deux membres), mais il est à peu près indispensable de les connaître par cœur.

Exercice 97 (②)**.** *Déterminer sans calcul le maximum et le minimum sur* $\mathbb{R}$ *de :*

$$x \mapsto \sin(x)\cos(x).$$

Exercice 98 (②)**.** *Déterminer le maximum et le minimum sur* $\mathbb{R}$ *de :*

$$x \mapsto \cos(x) - \cos(x)^2.$$

Exercice 99 (③)**.** *Soit* Γ *un cercle de rayon* $R > 0$*. On considère des points* $A_0, \dots, A_6$ *de* Γ*, rangés dans cet ordre pour le sens trigonométrique, tels que, pour tout* $i \in \{0, \dots, 5\}$*,* $A_iA_{i+1} = R$*. Montrer que* $A_6 = A_0$*.* [19]

Exercice 100 (②)**.** *Pour* x *dans* $\mathbb{R}$*, exprimer* $\cos(3x)$ *en fonction de* $\cos(x)$*.*

Exercice 101 (③)**.** *Pour* x *dans* $\mathbb{R}$*, montrer que*

$$2\cos(2x) + 4\cos(x) + 3 \geq 0$$

et déterminer le cas d'égalité.

Exercice 102 (③)**.** *Soit* α *l'unique élément de* $[0, \pi]$ *tel que* $\cos(\alpha) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$*.*

a) Calculer $\cos(2\alpha)$*, puis* $\cos(4\alpha)$*.*

b) En déduire que 4α *est congru à* α *ou à* $-\alpha$ *modulo* 2π*.*

c) Conclure que $\alpha = \dfrac{2\pi}{5}$*.* [20]

Exercice 103 (①)**.** *Déterminer les réels* x *de* $[0, 2\pi]$ *tels que :*

$$\cos(x) \geq \sin(x).$$

Exercice 104 (④)**.** *Montrer que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos\left(\sin(x)\right) > \sin\left(\cos(x)\right).$$

Exercice 105 (② Radicaux itérés et trigonométrie)**.** *Pour* n *dans* $\mathbb{N}^*$*, soit :*

$$u_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}} \quad (n \text{ radicaux}).$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right).$$

19. Méthode classique pour découper un cercle en six arcs égaux.

20. On trouvera une méthode plus naturelle pour calculer $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ dans l'exercice 398 de **10.10**.

Exercice 106 (③). *Soit x un nombre réel non multiple entier de π. En utilisant la formule de duplication de* sin*, simplifier, pour n dans $\mathbb{N}^*$, le produit :*

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

Exercice 107 (④). *a) Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Exprimer $\dfrac{\sin(3y)}{\sin(y)}$ en fonction de $\cos(2y)$.*

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier ; pour $n \in \mathbb{N}^*$, le produit :

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1 + 2\cos\left(\frac{2x}{3^k}\right)}{3}.$$

Exercice 108 (③). *Montrer que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad |\sin(nx)| \leq n\,|\sin x|.$$

4.2 Congruences modulo un nombre réel

Soit a un réel non nul. Si x et y sont deux réels, on dit que x *et* y *sont congrus modulo* a et on écrit :

$$x \equiv y\ [a]$$

s'il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que :

$$x - y = ka.$$

Le langage des congruences simplifie la formulation de certaines propriétés trigonométriques. Par exemple, pour x et y dans $\mathbb{R}$, l'examen du cercle trigonométrique justifie les équivalences :

$$\begin{aligned} \cos(x) = \cos(y) &\iff x \equiv y\ [2\pi] \text{ ou } x \equiv -y\ [2\pi]; \\ \sin(x) = \sin(y) &\iff x \equiv y\ [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - y\ [2\pi]; \\ e^{ix} = e^{iy} &\iff x \equiv y\ [2\pi]. \end{aligned}$$

On peut additionner deux congruences de même module :

$$x \equiv y\ [a], \qquad x' \equiv y'\ [a] \quad \Longrightarrow \quad x + x' \equiv y + y'\ [a].$$

On peut multiplier une congruence (ou la diviser) par un réel non nul, mais il ne faut pas oublier de faire subir la même opération au module de congruence :

$$x \equiv y\ [a] \quad \Longrightarrow \quad \lambda x \equiv \lambda y\ [\lambda a].$$

Enfin, une congruence modulo un réel non nul a implique la même congruence modulo les réels $\dfrac{a}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x \equiv y\ [a],\ n \in \mathbb{N}^* \quad \Longrightarrow \quad x \equiv\ y\ \left[\frac{a}{n}\right].$$

Par exemple, deux réels congrus modulo 4π le sont modulo 2π, π, $4\pi/3$ ...

Le langage des congruences est très commode et son intérêt n'est pas limité à la trigonométrie ; il est par exemple utilisé en arithmétique.

Exercice 109 (①). *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations* $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ *et* $\sin(2x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 110 (①). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|\sin(nx)| = 1$.*

Exercice 111 (①). *Résoudre l'inéquation $|\sin(x)| \leq \frac{1}{2}$ dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, puis dans $[-\pi, \pi]$*

Exercice 112 (②). *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :* $\cos(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 113 (③). *Soit α un nombre irrationnel. On pose*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \cos(x) + \cos(\alpha x).$$

a) Montrer que le seul nombre réel x tel que $f(x) = 2$ est $x = 0$.

b) La fonction f est-elle périodique ?

Exercice 114 (③). *Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, T et T' deux nombres réels strictement positifs. On suppose que f est T-périodique, que g est T'-périodique et que $\frac{T'}{T}$ est rationnel. Montrer que $f + g$ est périodique.*

Exercice 115 (④). *a) Résoudre l'équation* $\cos(3x) = \sin(2x)$.

b) En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

4.3 Complément : transformation de $a\cos(x) + b\sin(x)$

Soient a et b deux réels non tous deux nuls. Il est commode, dans un certain nombre de questions de mathématiques ou de physique, d'exprimer $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ sous une forme différente. On observe à cet effet que le point

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

appartient au cercle de centre O et de rayon 1 du plan. Il existe donc φ dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi)).$$

Il vient alors, si $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\ (\cos(x)\cos(\varphi) + \sin(x)\sin(\varphi)) = \sqrt{a^2+b^2}\ \cos(x-\varphi).$$

On voit sur cette expression que f est une fonction cosinus d'*amplitude* $\sqrt{a^2+b^2}$ et de *déphasage* φ, ce qui permet de représenter le graphe de f.

Exercice 116 (①). *Quelle est l'amplitude de*

$$x \longmapsto 3\cos(x) + 4\sin(x) \ ?$$

Exercice 117 (③). *a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :* $\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

b) Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in [-\pi, \pi]$: $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) \leq 1$.

Exercice 118 (③). *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. *On pose*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = a\cos(x) + b\sin(x).$$

Montrer que, si $x_0 \in \mathbb{R}$, *la fonction* f *s'annule exactement une fois sur* $[x_0, x_0 + \pi[$.

Remarque *Autre approche, supposant la connaissance des nombres complexes*

On remarque que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (a - ib)e^{ix} = (a\cos(x) + b\sin(x)) + i(a\sin(x) - b\cos(x)),$$

ce qui entraîne que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad a\cos(x) + b\sin(x) = \mathrm{Re}((a - ib)\, e^{ix}).$$

Ainsi, si on écrit $a + ib$ sous forme trigonométrique :

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2}\, e^{i\varphi} \quad \text{i.e.} \quad a - ib = \sqrt{a^2 + b^2}\, e^{-i\varphi},$$

il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad a\cos(x) + b\sin(x) = \mathrm{Re}\left(\sqrt{a^2 + b^2} e^{i(x-\varphi)}\right) = \sqrt{a^2 + b^2}\, \cos(x - \varphi).$$

4.4 Complément : la fonction tangente

Pour x réel non congru à $\pi/2$ modulo π, $\cos(x) \neq 0$ et on peut définir :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

La fonction tan ainsi définie est très souvent utile. Ses propriétés se déduisent immédiatement de celles de sin et cos.

- La fonction tan est π-périodique et impaire.

- Valeurs « classiques » (à retrouver) :

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \qquad \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

- Pour x réel non congru à $\pi/2$ modulo π, $\tan(x)$ est la pente de la droite reliant l'origine de $\mathbb{R}^2$ au point de coordonnées $(\cos(x), \sin(x))$ du cercle trigonométrique.

- La fonction tan est dérivable sur chacun des intervalles

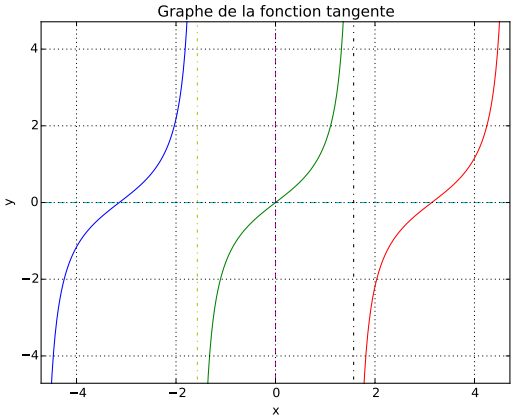
$$I_k = \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Pour x dans un tel intervalle I_k :

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2(x) - (-\sin^2(x))}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

La seconde forme de la dérivée est à retenir. Ce calcul de dérivée montre que tan est strictement croissante sur chaque intervalle I_k. On a de plus :

$$\tan(x) \underset{x \to \pi/2^-}{\longrightarrow} +\infty, \qquad \tan(x) \underset{x \to -\pi/2^+}{\longrightarrow} -\infty.$$



Exercice 119 (①)**.** *Sous des hypothèses convenables, exprimer* $\tan(x+y)$ *en fonction de* $\tan(x)$ *et de* $\tan(y)$*.*

Exercice 120 (③ Expression de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de $\tan(x/2)$ $*$)**.** *Soient* x *dans* $\mathbb{R}$ *non congru à* π *modulo* 2π*,* $t = \tan(x/2)$*. Vérifier que*

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Ces formules montrent en particulier que $\cos(x)$ *et* $\sin(x)$ *sont des fractions rationnelles (c'est-à-dire des quotients de polynômes) en* $\tan(x/2)$*.*

Exercice 121 (③ Points de coordonnées rationnelles sur le cercle trigonométrique)**.** *À l'aide de l'exercice précédent, montrer que les points du cercle trigonométrique dont les deux coordonnées sont rationnelles sont* $(-1,0)$ *et les* $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ *avec* $t \in \mathbb{Q}$*.*

Il est parfois commode d'utiliser la fonction cotangente, définie comme suit. Pour réel non multiple entier de π, on pose

$$\operatorname{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Ainsi, pour x réel non multiple entier de $\frac{\pi}{2}$, on a

$$\operatorname{cotan}(x) = \frac{1}{\tan(x)}.$$

On laisse au lecteur le soin d'étudier la fonction cotan sur le modèle de tan.

5 Calcul des limites

La notion de limite fonde toute l'analyse. En terminale, l'important est de bien maîtriser un certain nombre de techniques de base, que l'on passe en revue dans ce chapitre :

- opérations sur les limites,
- utilisation de minorations, de majorations, d'encadrements,
- utilisation du taux de variation,
- croissances comparées usuelles,
- mise en facteur du terme prépondérant,
- écriture sous forme exponentielle.

5.1 Premiers exemples

Les exercices ci-après sont des applications directes des techniques susmentionnées.

Exercice 122 (①). *Trouver la limite en $+\infty$ des fonctions :*

$$a : x \mapsto e^{-\sqrt{x}}, \qquad b : x \mapsto \frac{x+7}{4x+3}, \qquad c : x \mapsto \frac{x^2+5}{x^3-1}, \qquad d : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x},$$

$$e : x \mapsto \cos(x^2)\, e^{-x}, \qquad f : x \mapsto \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}, \qquad g : x \mapsto (2+\sin(x))\, x.$$

Exercice 123 (①). *Trouver la limite en 0 des fonctions :*

$$a : x \mapsto \frac{\cos(e^x)}{2+\ln(x)}, \quad b : x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}, \quad c : x \mapsto x\ln(x), \quad d : x \mapsto \sqrt{x}\ln(x).$$

Exercice 124 (②). *Trouver la limite en $+\infty$ des fonctions :*

$$a \ : x \mapsto \frac{\lfloor x \rfloor}{x}, \qquad b \ : x \mapsto x - \sqrt{x^2 - x - 1}.$$

Exercice 125 (②). *Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, soit :*

$$f(x) = \sin(1/x).$$

a) Tracer sommairement le graphe de f. Quelle est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

b) La fonction f a-t-elle une limite en 0 ?

c) Quelle est la limite de $xf(x)$ lorsque x tend vers 0 ?

d) Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, il existe une infinité de points du graphe de f situés sur la première (resp. seconde) bissectrice) et d'abscisse appartenant à $[0, \alpha]$.

Exercice 126 (②). *Trouver la limite (finie ou infinie) des suites définies par les formules ci-après :*

$$a_n = \frac{2n+5}{6n+7}, \quad b_n = \frac{n^2-5n+6}{n\sqrt{n}}, \quad c_n = \frac{5+3\sin^2(n)}{\sqrt{n+2}+3}, \quad d_n = \sqrt{n+\cos(n)} - \sqrt{n},$$

$$e_n = -2n^2 + (-1)^n, \quad f_n = \sqrt{n} - \sin(2n)^2 - 7, \quad g_n = \frac{1+5\sin^3(n)}{3n - 7\sqrt{n} + \cos(n)}.$$

5.2 Utilisation de taux d'accroissement

La définition de la dérivée donne la relation :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} f'(a).$$

A priori, lorsque x tend vers a,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

est une forme indéterminée (numérateur et dénominateur tendent vers 0) ; la relation précédente permet de lever l'indétermination. Exemples importants :

$$\frac{e^x-1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1, \qquad \frac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.$$

Bien entendu, cette méthode est limitée et artificielle. L'étude des *développements limités*, fournira des outils généraux très efficaces pour régler ce type de problème.

Exercice 127 (②)**.** *En utilisant éventuellement des taux d'accroissement, trouver les limites suivantes :*

a) $\dfrac{\cos x-1}{x}$, $\dfrac{\sin(5x)}{x}$, $\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin(4x)}$ *lorsque x tend vers 0,*

b) $\dfrac{\ln x}{x-1}$ *lorsque x tend vers 1,*

c) $x\,\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$ *lorsque x tend vers $+\infty$.*

Exercice 128 (③ Une formule de Viète)**.** *Soit $x\in\mathbb{R}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit*

$$P_n(x)=\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

a) En utilisant l'exercice 106 de **4.1**, *déterminer la limite de la suite $(P_n(x))_{n\geq 0}$.*

b) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit :

$$u_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} \quad (n \text{ radicaux}).$$

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$v_n=\prod_{k=1}^{n}u_k.$$

En utilisant la question précédente et l'exercice 105 de **4.1**, *montrer que*

$$\frac{v_n}{2^n}\longrightarrow\frac{2}{\pi}.$$

Cette formule a été découverte par Viète (1593). On trouvera en **8.6** *une autre expression de π comme « produit infini », due à Wallis.*

Exercice 129 (③). *a) Déterminer la limite de* $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x}$ *en* 0.

b) En utilisant la formule de duplication pour cos*, déterminer la limite de* $g(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ *en* 0.

Complément : une limite très souvent utile

Soit x dans $\mathbb{R}$. Déterminons la limite de

$$u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

quand l'entier n tend vers $+\infty$. Pour $n > -x$, $1 + \dfrac{x}{n} > 0$, de sorte que :

$$u_n(x) = \exp\left(n\ \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) = \exp\left(x\ \frac{\ln(1+y_n)}{y_n}\right) \qquad \text{où} \quad y_n = \frac{x}{n}.$$

Or, la forme indéterminée

$$\frac{\ln(1+y)}{y}$$

est le taux d'accroissement en 0 de la fonction $y \mapsto \ln(1+y)$. Elle tend donc vers la dérivée de cette fonction en 0, qui est égale à 1. En composant par exp, on obtient :

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x.$$ [21]

5.3 Mise en facteur du terme prépondérant

Pour déterminer la limite d'une forme indéterminée, une méthode essentielle est la *mise en facteur du terme prépondérant dans une somme*, déjà utilisée dans le paragraphe précédent.

Exemples

1. (∗) *Quotient de deux polynômes*
   Soient P et Q deux polynômes. Pour x dans $\mathbb{R}$, on écrit :

   $$P(x) = \sum_{i=0}^{p} a_i x^i, \quad Q(x) = \sum_{j=0}^{q} b_j x^j.$$

   On suppose a_p et b_q non nuls (afin que P et Q soient de degrés respectifs p et q). Déterminons la limite quand x tend vers $+\infty$ de

   $$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

   On factorise par les termes prépondérants x^p et x^q. Il vient :

   $$F(x) = x^{p-q}\ \frac{a_p + \frac{a_{p-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^p}}{b_q + \frac{b_{q-1}}{x} + \cdots + \frac{b_0}{x^q}}.$$

21. On retrouve les approximations $u_n(x)$ lorsqu'on applique la méthode d'Euler.

On obtient

$$F(x) = x^{p-q}\, U(x), \quad \text{avec : } U(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{a_p}{b_q}.$$

La limite cherchée est donc :

- 0 si $q > p$,
- $\dfrac{a_p}{b_q} = \dfrac{a_p}{b_p}$ si $p = q$,
- $+\infty$ si $p > q$ et $\dfrac{a_p}{b_q} > 0$, $-\infty$ si $p > q$ et $\dfrac{a_p}{b_q} < 0$.

En résumé, la limite de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est celle du quotient

$$\frac{a_p x^p}{b_q x^q}$$

des termes prépondérants des polynômes.

2. Déterminons la limite en $+\infty$ de

$$f(x) = \frac{x^2 + x^3 + 3\ln(x) + e^{-x}}{x^4 + \cos x - 1}$$

en $+\infty$. Le terme prépondérant du dénominateur $d(x)$ est x^4, celui du numérateur $n(x)$ est x^3. On écrit donc, pour $x > 0$:

$$d(x) = x^4 \left(1 + \frac{\cos x}{x^4} - \frac{1}{x^4}\right) = x^4 u(x)$$

où $u(x)$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$. De même :

$$n(x) = x^3 \left(1 + \frac{1}{x} + 3\frac{\ln x}{x^3} + \frac{e^{-x}}{x^3}\right) = x^3 v(x)$$

où $v(x)$ tend vers 1 en $+\infty$. Il vient

$$f(x) = \frac{1}{x} \times \frac{u(x)}{v(x)}.$$

Ainsi $f(x)$ est le produit de $1/x$ qui tend vers 0 par $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ qui tend vers 1. Au total :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Noter que la démonstration fournit un renseignement plus précis :

$$xf(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Autrement dit, $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ « à peu près comme $1/x$ ». [22]

22. La notion de fonctions équivalentes permettra de donner un sens précis à cette formulation un peu vague.

3. Soient α et β deux réels tels que $|\beta| < |\alpha|$, A et B deux réels non nuls. Posons

$$u_n = A\alpha^n + B\beta^n.$$

Pour n tel que $u_n \neq 0$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha \frac{A + B\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}{A + B\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n}}$$

Le réel $\gamma = \dfrac{\beta}{\alpha}$ est de valeur absolue strictement inférieure à 1. La suite $(\gamma^n)_{n\geq 0}$ tend donc vers 0. On en déduit :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha.$$

On notera que pour la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$, on a :

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Exercice 130 (③). *Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{\binom{n}{k}}{n^k}.$$

On pourra commencer par les cas $k = 0, 1, 2$. Dans le cas général, observer que $n \longmapsto \binom{n}{k}$ est une application polynomiale de degré k, dont on précisera le coefficient dominant.

Exercice 131 (③). *Trouver la limite en $+\infty$ de*

$$f(x) = \frac{50x + x\ln x}{x\ln(x) + 3}, \quad g(x) = \frac{e^{-x} + \sqrt{x} + e^x + \cos x}{x^{20} + 2x^{2021}}, \quad h(x) = \frac{e^x - 1}{x^6 + 2e^x + e^{x/2}},$$

$$i(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}, \quad j(x) = \exp\left(-3\sqrt{x} + x - \ln(x^2+1) + \cos(x)\right),$$

$$k(x) = \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right).$$

5.4 Utilisation de la forme exponentielle

Une autre technique utile lorsqu'on a affaire à des expressions comportant des puissances est la *mise sous forme exponentielle*, que l'on peut combiner avec la mise en facteur du terme prépondérant. Voici un exemple. Posons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{2^{3^n}}{3^{2^n}}.$$

Pour déterminer la limite de u_n, on écrit

$$u_n = \exp(3^n \ln(2) - 2^n \ln(3)) = \exp(v_n) \quad \text{où} \quad v_n = 3^n \left(\ln(2) - \left(\frac{2}{3}\right)^n \ln(3)\right).$$

Puisqu'une suite géométrique de raison appartenant à $]-1,1[$ tend vers 0, on a

$$\ln(2) - \left(\frac{2}{3}\right)^n \ln(3) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2) \quad \text{donc} \quad v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Exercice 132 (③). *Déterminer les limites des suites définies par les formules*

$$a_n = \frac{n^n}{2^{n^2}}, \quad b_n = \frac{(\ln(n))^{n^2}}{\sqrt{n}^n}, \quad c_n = \frac{a^{b^n}}{b^{a^n}} \quad \text{où} \quad (a,b) \in \mathbb{N}^{*2} \text{ et } a < b.$$

5.5 Complément : croissance comparée des suites $(a^n)_{n\geq 0}$ et $(n!)_{n\geq 0}$

On peut compléter la liste des croissances comparées par le résultat suivant, qui assure que « la suite $(n!)_{n\geq 0}$ l'emporte sur toute suite géométrique », que nous utiliserons marginalement dans la suite, et dont nous donnons deux démonstrations.

Théorème 3 (Croissance comparée des suites géométriques et factorielle). *Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Alors*

$$\frac{a^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve 1. L'idée est que l'on passe de a^n à a^{n+1} en multipliant par a qui est fixe, de $n!$ à $(n+1)!$ en multipliant par $n+1$ qui tend vers $+\infty$. Pour mettre en forme l'argument, on pose, si $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$ et on note que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1}.$$

Pour $n \geq 2a-1$, on a donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$. Notons N le plus petit entier supérieur ou égal à $2a-1$. Ainsi

$$\forall n \geq N, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}.$$

D'où, par une récurrence laissée au lecteur

$$\forall n \geq N, \qquad u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} u_N.$$

Le majorant tend vers 0 et $(u_n)_{n\geq 0}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, ce qui entraîne le résultat.

Preuve 2. On utilise le théorème de la limite monotone : la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 0}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, décroissante à partir d'un certain rang (car, à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ d'après le calcul mené dans la première preuve). Elle converge donc vers un réel $\ell \geq 0$. Si ℓ était strictement positif, on aurait

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell}{\ell} = 1,$$

contradiction avec

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Il s'ensuit que $\ell = 0$.

5.6 Quelques études de suites

Les exercices suivant proposent un certain nombre d'études de suites, de difficulté variée.

Exercice 133 (②). *La suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par ses deux premiers termes u_0 et u_1 et la relation de récurrence*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = \frac{1}{2}\left(u_n + u_{n+1}\right).$$

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = u_{n+1} - u_n.$$

a) Montrer que $(v_n)_{n\geq 0}$ est géométrique. Exprimer v_n en fonction de v_0 et n.

b) Exprimer u_n en fonction de u_0, u_1 et n. En déduire que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite que l'on explicitera.

c) Reprendre cet exercice à l'aide de l'exercice 11 de **1.3**.

Exercice 134 (②). *La suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par ses deux premiers termes u_0 et u_1, tous deux strictement positifs, et la relation de récurrence*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}.$$

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \ln(u_n)$$

Justifier la définition de $(v_n)_{n\geq 0}$. En utilisant $(v_n)_{n\geq 0}$ et en utilisant l'exercice précédent, montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite que l'on explicitera.

Exercice 135 (②). *La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + \sqrt{n+1} + \sin(u_n).$$

a) Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 136 (③). *La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + \cos(nu_n) + 2.$$

Minorer u_n en fonction de n et u_0 afin de montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 137 (③). *Déterminer, en utilisant un encadrement, la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor \frac{k^2}{n} \right\rfloor.$$

Exercice 138 (③). *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n : N_n vaut 1 si $1 \leq n \leq 9$, 2 si $10 \leq n \leq 99$ ... Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{N_n}{\ln(n)}.$$

On exprimera N_n à l'aide des fonctions partie entière et logarithme décimal.

Exercice 139 (③). *Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}}.$$

Exercice 140 (④ Flocon de von Koch). *On construit une suite $(F_n)_{n\geq 1}$ de polygones de la manière suivante. On prend pour F_1 un triangle équilatéral dont les côtés ont pour longueur 1. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on passe de F_n à F_{n+1} en partageant chaque segment du pourtour de F_n en trois segments égaux, puis en substituant au segment central une réunion de deux segments égaux formant avec le segment supprimé un triangle équilatéral dirigé vers l'extérieur. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient c_n, ℓ_n, p_n et a_n le nombre de côtés, la longueur d'un côté, le périmètre et l'aire de F_n.*

a) Dessiner sommairement F_1, F_2, F_3.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer c_n, ℓ_n et p_n en fonction de n. Déterminer la limite de $(p_n)_{n\geq 1}$.

c) Calculer a_1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_{n+1} = a_n + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

Montrer que $(a_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite finie que l'on calculera. [23]

Exercice 141 (④). *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \cos(n\alpha)$, $v_n = \sin(n\alpha)$.*

Dans les questions a) et b), on suppose que $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$.

a) On suppose dans la suite que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_n en fonction de u_{n+1} et u_n. En déduire que $(v_n)_{n\geq 0}$ converge.

b) On note ℓ et ℓ' les limites respectives de $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$. En considérant les suites $(u_{n+1})_{n\geq 0}$ et $(v_{n+1})_{n\geq 0}$, donner deux relations entre ℓ et ℓ'.

c) Conclure que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si $\alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$. [24]

Exercice 142 (④). *a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe exactement un entier naturel k tel que l'écriture décimale de 2^k comporte m chiffres et commence par 1.*

b) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, N_n le nombre de $k \in \{0, \dots, n-1\}$ tels que l'écriture décimale de 2^k commence par 1. Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{N_n}{n}\right)_{n\geq 1}$.

Exercice 143 (⑤). *Déterminer la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$ où*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k!.$$

Exercice 144 (⑤). *Si $n \in \mathbb{N}^*$, soit N_n le nombre d'entiers de la forme $\left\lfloor \dfrac{n}{k} \right\rfloor$ avec $k \in \{1, \dots, n\}$. Montrer que $\left(\dfrac{N_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ converge vers une limite à préciser.*

---

23. On peut montrer que, en un sens à préciser, la suite $(F_n)_{n\geq 1}$ converge vers une partie bornée du plan de longueur infinie et d'aire finie, qui est en fait un ensemble fractal de dimension $\dfrac{\ln(4)}{\ln(3)}$.

24. La résolution de cet exercice est plus agréable à l'aide de la suite complexe $(e^{in\alpha})_{n\geq 0}$.

6 Dérivation

L'invention du calcul différentiel et intégral au dix-septième siècle est un tournant de l'histoire des mathématiques. Ces outils ont permis d'étudier avec beaucoup d'efficacité des problèmes aussi divers que le calcul des aires, des longueurs et des volumes, la détermination des tangentes à une courbe, les problèmes d'extremum, et de développer la cinématique et la mécanique.

Le calcul différentiel et intégral des fonctions d'une variable réelle est le cœur des programmes d'analyse de première année post-bac. Le cours correspondant est traité en suivant l'approche mise au point par les mathématiciens du dix-neuvième siècle (notamment Cauchy et Weierstrass) : l'analyse y est reprise à son début (nombres réels, suites), les théorèmes sont complètement démontrés à partir de ce point de départ. Il est cependant très souhaitable de disposer préalablement d'une solide maîtrise pratique du sujet. C'est le but des chapitres **6** et **8**.

6.1 Calcul des dérivées

Il est essentiel de bien connaître les règles de calcul sur les dérivées : dérivées d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée, ainsi que les dérivées des fonctions usuelles (polynômes, racine carrée, logarithme, exponentielle, fonctions trigonométriques).

Exercice 145 (①)**.** *Pour chacune des fonctions ci-après, déterminer l'ensemble de définition et calculer la dérivée.*

- $a : x \mapsto x^3 \cos(5x+1)$,
- $b : x \mapsto e^{\cos x}$,
- $c : x \mapsto x \ln(x)$,
- $d : x \mapsto \ln(e^x + 1)$,
- $e : x \mapsto e^{x^3+2x^2+3x+4}$,
- $f : x \mapsto e^{\sqrt{x^2+x+1}}$,
- $g : x \mapsto \ln(e^x + \sin(x))$ *; pour cet exemple, on n'explicitera pas l'ensemble de définition ,*
- $h : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$,
- $i : x \mapsto \dfrac{\cos(2x)}{x^2-2}$,
- $j : x \mapsto \ln(\cos(2x))$,
- $k : x \mapsto \dfrac{x}{\sin(x)}$,
- $\ell : x \mapsto \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$,
- $m : x \mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$,
- $n : x \mapsto \ln(\ln(x))$,
- $o : x \mapsto \ln(\ln(\ln(x)))$,
- $p : x \mapsto \dfrac{\cos(x^2)}{\ln(\sqrt{1+e^x})}$.

Exercice 146 (②)**.** *Soient f et g deux fonctions deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $h = g \circ f$. Si $x \in \mathbb{R}$, donner une expression de $h''(x)$.*

Exercice 147 (①). *Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Exercice 148 (②). *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, f une fonction n fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = f(ax + b).$$

Pour $0 \leq k \leq n$ et $x \in \mathbb{R}$, donner une expression de $g^{(k)}(x)$.

Exercice 149 (②). *Soit f la fonction de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \frac{1}{x}.$$

Donner une expression simple de $f^{(n)}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 150 (③). *Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = e^{-x^2}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n à coefficients réels tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(x) = P_n(x)\, e^{-x^2}.$$

Expliciter P_0, P_1, P_2.

Exercice 151 (① Dérivée d'une fonction paire, impaire, périodique $*$). *Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

a) On suppose f paire. Que dire de f' ?

b) Même question si f est impaire.

c) Même question si f est périodique de période T, où $T \in \mathbb{R}^{+*}$.[25]

Exercice 152 (③). *a) Déterminer deux réels a et b tels que :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, \qquad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

b) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, calculer en utilisant a) la dérivée n-ième de

$$f \ : x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \ \mapsto \ \frac{1}{x(x+1)}.$$

25. Les réciproques seront examinées en **6.4.1**.

Exercice 153 (③ Dérivée logarithmique $*$)**.** *Si f est une fonction dérivable sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, on appelle dérivée logarithmique de f la fonction $\dfrac{f'}{f}$.*[26]

a) Soient u et v deux fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^*$. Exprimer la dérivée logarithmique de uv en fonctions de celles de u et v.

b) Généraliser la question précédente à un produit de n facteurs.

c) Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $a_1 < \cdots < a_n$ des nombres réels et P la fonction polynôme définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i).$$

Calculer la dérivée logarithmique de P sur chacun des intervalles où cette fonction est définie.

La dérivée logarithmique d'un produit est donc plus lisible que la dérivée : les produits parasites ont disparu.

Les deux exercices ci-après sont de nature un peu différente.

Exercice 154 (②)**.** *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable au point 0. Déterminer la limite de $\dfrac{f(x^2) - f(0)}{x}$ lorsque x tend vers 0.*

Exercice 155 (④)**.** *Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = x^2 \cos(1/x).$$

a) Calculer $f'(x)$ si $x \in \mathbb{R}^*$.

b) En revenant à la définition, montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

c) Montrer que la fonction f' n'est pas continue en 0.

6.2 Tangente à un graphe

La dérivée a plusieurs interprétations. Du point de vue géométrique, si f est dérivable en a, le nombre $f'(a)$ représente la pente de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a. L'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a est donc :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

En effet, la tangente a pour pente $f'(a)$ et passe par le point de coordonnées $(a, f(a))$.

Exercice 156 (① Une propriété des paraboles)**.** *Soient a un nombre réel non nul, x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $x_1 < x_2$, f la fonction :*

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto ax^2.$$

Montrer que la tangente au graphe de f au point d'abscisse $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$ est parallèle à la droite joignant les points du graphe de f d'abscisses x_1 et x_2.

---

26. Le terme « dérivée logarithmique » vient du fait que $\dfrac{f'}{f}$ est la dérivée de $\ln(|f|)$.

Exercice 157 (②). *a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer l'équation de la droite D_n, tangente au graphe de la fonction* ln *au point n.*

b) Soit x_n l'abscisse du point d'intersection de D_n et de l'axe Ox. Déterminer x_n. Quelle est la limite de $(x_n)_{n\geq 1}$?

Exercice 158 (③). *Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables en 0. On suppose que les graphes des trois fonctions f, g, $\dfrac{fg}{2}$ ont même tangente au point d'abscisse 0. Quelles sont les équations possibles pour cette tangente ?*

Exercice 159 (④ Droites tangentes à une parabole). *Soient a un réel non nul, f la fonction :*

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto ax^2.$$

Si p et q sont deux nombres réels, on note $\Delta_{p,q}$ la droite d'équation $y = px + q$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p et q pour que $\Delta_{p,q}$ soit tangente au graphe de f.

Exercice 160 (②). *a) Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, x_0 un élément de I tel que $f'(x_0) \neq 0$. Calculer l'abscisse du point x_1 en lequel la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0 coupe l'axe (Ox).*

b) On suppose que a est un nombre réel positif, que f est la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2 - a.$$

Avec les notations précédentes, vérifier que

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right).$$

Exercice 161 (③ Calcul d'une racine carrée par la méthode de Newton $*$). *Soit a dans $\mathbb{R}^{+*}$. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par son premier terme u_0, élément de $\mathbb{R}^{+*}$, et par la relation de récurrence :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) = f_a(u_n)$$

où la fonction f_a est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f_a(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

a) Étudier f_a et donner sommairement l'allure de son graphe.

b) Justifier que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.

c) Établir les inégalités :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f_a(x) \geq \sqrt{a},$$
$$\forall x \in [\sqrt{a}, +\infty[, \qquad f_a(x) \leq x.$$

d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, puis que cette suite converge vers $\sqrt{a}$.

e) Pour n dans $\mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} = {v_n}^2.$$

f) Exprimer v_n en fonction de n.

g) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leq u_n - \sqrt{a} \leq \left(u_1 + \sqrt{a}\right) \left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n}.$$

Conclure que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\sqrt{a}$.

h) On prend $a = 2$, $u_0 = 1$. Représenter graphiquement la fonction f_2 et les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$. Écrire l'inégalité de la question précédente dans ce cas. Comment choisir n pour obtenir une valeur approchée à 10^{-5} près de $\sqrt{2}$? Faire les calculs correspondants.

Remarque *Méthode de Newton*

L'algorithme de calcul approchée d'une racine carrée étudié dans l'exercice précédent remonte à l'Antiquité (Héron).[27] Il a été généralisé au dix-septième siècle par Newton et Raphson en la *méthode de Newton*, qui donne des approximations rapidement convergentes des solutions d'une équation $f(x) = 0$. Décrivons-en brièvement le principe. On se propose de calculer numériquement une racine ℓ de l'équation dont on connaît une première approximation. On considère une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

le point de départ x_0 étant choisi aussi près de ℓ que le permet l'estimation dont on dispose. La signification géométrique de cette relation de récurrence est décrite dans l'exercice 160. On montre que, si x_0 est assez près de ℓ, alors $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ. La convergence est de plus très rapide. Dans l'exercice précédent, on voit que, pour l'exemple choisi, l'erreur $|u_n - \sqrt{a}|$ est majorée par une quantité de la forme

$$e_n := Ck^{2^n}$$

avec $C > 0$ et $k < 1$. Ce type d'estimation vaut en fait de manière très générale. Comme

$$e_{n+1} = \frac{{e_n}^2}{C},$$

on voit qu'à peu de choses près, le nombre de décimales correctes double à chaque étape (« convergence quadratique »). La preuve du résultat général est accessible en première année post-bac.

La méthode de Newton a été considérablement généralisée au vingtième siècle. Elle garde une grande importance en analyse.[28]

6.3 Variations des fonctions

Une des applications fondamentales de la dérivation est son lien avec la variation des fonctions : une fonction définie et dérivable sur un intervalle y est croissante dès que sa dérivée est positive, une fonction définie sur un intervalle et dont la dérivée est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini

27. Voici une explication élémentaire. On cherche à calculer la racine carrée de a, i.e. le côté d'un carré d'aire a. On part d'un rectangle d'aire a, dont on note x un des côtés. La moyenne arithmétique des deux côtés est alors $\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$. Puis on itère cette opération.

28. Il faut cependant noter que le choix de x_0 est essentiel : il se peut par exemple que $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers un zéro de f autre que ℓ.

de points est strictement croissante. Ce théorème comporte deux volets de difficultés différentes. Il est assez facile de voir que, si f est croissante sur l'intervalle I et dérivable en tout point de I, alors la fonction f' est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ (les taux de variation sont dans $\mathbb{R}^+$ et les inégalités larges passent à la limite). L'autre sens, admis au lycée, demande un argument très nettement plus élaboré. Ce long paragraphe est consacré à diverses applications de résultat.

6.3.1 Étude de fonctions, nombre de solutions d'une équation

Commençons par quelques études de fonctions. « Étudier » signifie ici calculer la dérivée, étudier son signe, dresser le tableau de variations avec les limites, tracer le graphe.

Exercice 162 (①). *Étudier la fonction f définie par*

$$\forall x \in]1, +\infty[, \qquad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Exercice 163 (②). *a) Étudier la fonction f définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \ln(1 + e^x).$$

b) Montrer que $f(x) - x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Interpréter géométriquement.

Exercice 164 (③). *a) Étudier la fonction $f \ : x \in \mathbb{R}^{+*} \longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$.*

b) En utilisant a), déterminer les couples (a, b) d'éléments de $\mathbb{N}^*$ vérifiant $a < b$ et

$$a^b = b^a.$$

Exercice 165 (③ Fonctions hyperboliques $*$). *Les fonctions* ch *(cosinus hyperbolique) et* sh *(sinus hyperbolique) sont définies sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

a) Étudier ces deux fonctions ; en tracer les graphes.

b) Montrer que ch *réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[1, +\infty[$ et exprimer la bijection réciproque.*

c) Montrer que sh *réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer la bijection réciproque.*

d) Pour x dans $\mathbb{R}$, calculer

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x).$$

Une application immédiate de l'étude des fonctions est la détermination du nombre de solutions d'une équation et le positionnement des racines. La lecture du tableau de variations d'une fonction dérivable f permet en effet de déterminer le nombre de solutions d'une équation de la forme

$$f(x) = \lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemple *Une étude d'équation*

Soit p un nombre réel. Quel est le nombre de solutions réelles de l'équation

$$(E_p) \qquad x^5 - 5x = p \ ?$$

On pose, pour x dans $\mathbb{R}$,

$$f(x) = x^5 - 5x.$$

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 5\left(x^4 - 1\right) = 5(x^2-1)(x^2+1) = 5(x-1)(x+1)(x^2+1).$$

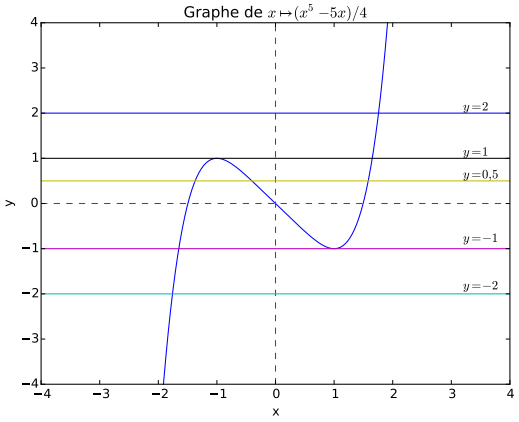
Cette égalité rend apparent le signe de $f'(x)$. La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty, -1]$, strictement décroissante sur $[-1, 1]$, strictement croissante sur $[1, +\infty[$. En utilisant les relations

$$f(-1) = 4 = -f(1), \quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty, \quad f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

le tableau de variations donne les résultats ci-après :

- si $p < -4$, l'équation (E_p) admet une unique solution réelle, qui appartient à $]-\infty, -1]$;
- si $p \in]-4, 4[$, l'équation (E_p) admet trois solutions réelles : une dans $]-\infty, -1[$, une dans $]-1, 1[$, une dans $]1, +\infty[$;
- si $p > 4$, l'équation (E_p) admet une unique solution réelle, qui appartient à $[1, +\infty[$;
- si $p = -4$ ou $p = 4$, l'équation (E_p) possède deux solutions distinctes.

Le graphe de la fonction $\dfrac{f}{4}$ et le graphe des droites d'équation $y = p$ pour $p = -2, -1, 0, 0.5, 1, 2$ permettent de visualiser ce résultat. [29]



Exercice 166 (②). *Si $m \in \mathbb{R}$, quel est le nombre de réels x tels que $e^x = mx^2$?*

Exercice 167 (③). *Pour $m \in \mathbb{R}^{+*}$, on note f_m et g_m les fonctions définies par*

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f_m(x) = 1 - x + \frac{m}{x}\left(1 + \ln(x)\right), \quad g_m(x) = x^2 + m\ln(x).$$

a) Montrer que g_m s'annule en un unique réel que l'on notera α_m et que l'on ne cherchera pas à calculer.

b) Étudier les variations de f_m.

c) Soit $P = (x, y)$ un point du plan, avec $x > 0$. En discutant selon la position de P, déterminer le nombre de $m \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que le graphe de f_m passe par P.

29. On représente $\dfrac{f}{4}$ plutôt que f afin de pouvoir travailler en axes orthonormés.

Dans l'exercice suivant, on détermine le nombre de racines réelles d'une équation de degré 3 de la forme $x^3 + px + q = 0$; on obtient ainsi un analogue du résultat classique relatif au trinôme du second degré de **3.3**.

Exercice 168 (③ Le nombre de racines réelles d'une équation de degré 3 $*$)**.** *Soient p et q deux réels et, pour x dans $\mathbb{R}$:*

$$f(x) = x^3 + px + q.$$

On se propose de déterminer le nombre de réels x tels que $f(x) = 0$.

a) On suppose $p \geq 0$. Tracer le tableau de variations de f et conclure dans ce cas.

b) On suppose $p < 0$. Tracer le tableau de variations de f.

c) On suppose $p < 0$. Soient x_1 et x_2 les points d'annulation de f'. Calculer $f(x_1) \times f(x_2)$ en fonction de p et q.

d) Déterminer, en fonction de la quantité

$$\Delta = -(4p^3 + 27q^2),$$

le nombre de racines réelles de l'équation $f(x) = 0$. On montrera en particulier que, si $\Delta < 0$, l'équation admet une unique racine réelle. [30]

Exercice 169 (③)**.** *Soient $n \geq 2$ un entier, p et q deux nombres réels. Montrer que l'équation $x^n + px + q = 0$ admet au plus deux racines réelles si n est pair, au plus trois si n est impair.*

Exercice 170 (④ Nombre de racines de $P' - \alpha P$ si P est un polynôme réel de degré n ayant n racines distinctes $*$)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1 < \cdots < a_n$ des réels et P la fonction polynôme définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i).$$

a) Dresser le tableau de variations de $\dfrac{P'}{P}$. On utilisera l'exercice 153.

b) Pour α dans $\mathbb{R}$, quel est le nombre de racines de l'équation

$$P'(x) - \alpha P(x) = 0 \ ?$$

Remarque *Les rôles de la continuité et de la stricte monotonie*

La méthode d'étude des équations

$$f(x) = \lambda$$

utilisée dans ce paragraphe repose implicitement sur les deux points suivant.

- Le *théorème des valeurs intermédiaires*, dont l'énoncé est le suivant :

« Soient f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux éléments de I, γ un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors l'équation

$$f(x) = \gamma$$

admet au moins une solution dans $[a, b]$. »

30. Le choix a priori surprenant du signe dans la définition de Δ est motivé par des considérations plus générales.

- Le fait ci-après :

« Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, γ un nombre réel. Alors l'équation

$$f(x) = \gamma$$

admet au plus une solution dans I. »

Ce second point est évident : si, par exemple, f est strictement croissante sur I et si $x < y$, alors $f(x) < f(y)$, ce qui montre qu'il ne peut exister deux éléments distincts de I d'image γ.

Le théorème des valeurs intermédiaires est nettement plus profond. La combinaison des deux résultats entraîne l'énoncé ci-après.

« Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, a et b deux points de I, γ un élément de $[f(a), f(b)]$. Alors l'équation

$$f(x) = \gamma$$

admet une unique solution dans $[a, b]$. »

C'est la combinaison de cet énoncé, de la continuité d'une fonction dérivable et du lien entre stricte monotonie et signe de la dérivée qui est utilisée ci-dessus.

Exercice 171 (②)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que*

$$\forall x \in I, \qquad f(x)^2 = 1.$$

Montrer que f est constante.

Sans hypothèse de monotonie, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'établir qu'une équation de la forme $u(x) = 0$ où u est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet au moins une solution : il suffit d'exhiber deux éléments a et b de I tels que $u(a) \leq 0, u(b) \geq 0$. Les exercices ci-après illustrent cette méthode.

Exercice 172 (③)**.** *Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, f une application continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$. Montrer que f admet au moins un point fixe, i.e. qu'il existe x dans $[a, b]$ tel que $f(x) = x$. On écrira cette équation sous la forme $g(x) = 0$ pour une certaine fonction g.*

Exercice 173 (③)**.** *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation*

$$x^3 \sin(x) \ln(x + 1) + e^x \cos(x) = 2$$

admet au moins une solution dans $]n\pi, (n + 1)\pi[$.

Digression : démonstration du théorème des valeurs intermédiaires

La dérivation est centrale dans toute cette section. La démonstration du théorème des valeurs intermédiaires sort de ce cadre. En effet, seule la continuité est utilisée. [31]

Voici le principe d'une démonstration. On se ramène à démontrer que, si a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$ et f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$ (question pour le lecteur : comment ?). On utilise à cet effet la méthode de *dichotomie* exposée ci-dessous.

On construit par récurrence deux suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $[a, b]$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(a_n) \leq 0 \quad \text{et} \quad f(b_n) \geq 0$$

de la façon suivante. On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons avoir construit a_n et b_n

31. Le lecteur a rencontré de nombreuses fonctions continues qui ne sont pas partout dérivables, par exemple la valeur absolue et la racine carrée. Il existe même des fonctions continues qui ne sont dérivables en aucun point. Leur construction est nettement plus délicate. Le premier exemple remonte à Weierstrass (1872).

6.3.2 Démonstration d'inégalités, détermination d'extrema

Une inégalité peut se traduire par la positivité d'une certaine fonction f. L'étude de f permet souvent d'accéder au signe de f via l'étude de ses variations.

Exemple $(*)$ *Une inégalité souvent utile*

Démontrons l'inégalité :

$$(1) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^x \geq x+1,$$

que vous aurez souvent l'occasion d'utiliser. On pose, pour x dans $\mathbb{R}$:

$$f(x) = e^x - x - 1.$$

L'inégalité proposée s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) \geq 0.$$

Il s'agit donc de déterminer le signe de f. La connaissance des variations de f permet de répondre à cette question. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = e^x - 1.$$

Puisque exp est strictement croissante, f' est < 0 sur $\mathbb{R}^{-*}$, nulle en 0, > 0 sur $\mathbb{R}^{+*}$. Par suite, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$, strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Elle est donc partout supérieure ou égale à $f(0) = 0$. C'est le résultat désiré. Interprétation de l'inégalité établie : le graphe de la fonction exp est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.

La preuve précédente montre en outre que, pour $x \neq 0$:

$$e^x > x + 1.$$

Une remarque pour conclure. Puisque la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on peut réécrire l'inégalité précédente sous la forme :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \qquad \ln(x+1) \leq x,$$

avec égalité si et seulement si $x = 0$. Posant $y = x + 1$, on obtient :

$$\forall y \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad \ln(y) \leq y - 1$$

avec égalité si et seulement si $y = 1$. Interprétation géométrique : le graphe de la fonction ln est au-dessous de sa tangente au point d'abscisse 1.

Remarque *Utilisation de la convexité*

La fonction exp a pour dérivée seconde exp à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Il s'ensuit que exp est convexe. La droite d'équation $y = x + 1$, qui est la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0, est donc en dessous de ce graphe, d'où une nouvelle démonstration de (1).

Exercice 174 (② Une inégalité utile $*$)**.** *Montrer l'inégalité :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \sin(x) \leq x.$$

En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leq |x|.$$

Exercice 175 (③). *En utilisant la fonction* $f : x \mapsto \ln(\mathrm{ch}(x)) - \dfrac{x^2}{2}$, *montrer que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch}(x) \leq e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Exercice 176 (④). *Montrer que, pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in [0, 2[$,

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{2+x}{2-x}.$$

L'exercice ci-après, consacré à l'étude d'une fonction classique, récapitule plusieurs techniques.

Exercice 177 (④ La fonction sinus cardinal ∗). *La fonction sinus cardinal, notée ici* $\sin_c$, *est définie par* $\sin_c(0) = 1$ *et*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \sin_c(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

a) Étudier la parité de $\sin_c$.

b) Montrer que $\sin_c$ *est continue en* 0. *Quelle est sa limite en* $\pm\infty$ *?*

c) Pour $x \in \mathbb{R}^*$, *calculer* $\sin_c{}'(x)$.

On admettra que $\sin_c$ *est également dérivable en* 0, *de dérivée nulle.*[32]

d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, *la fonction* tan *admet un unique point fixe sur l'intervalle* $I_n := \left]n\pi - \dfrac{\pi}{2}, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$, *que l'on note* x_n.

e) Montrer que les x_n *pour* $n \in \mathbb{Z}$ *sont les points en lesquels* $\sin_c{}'$ *s'annule.*

f) Selon la parité de n, *tracer le tableau de variations de* $\sin_c$ *sur l'intervalle* $\left]n\pi - \dfrac{\pi}{2}, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Les deux exercices ci-après sont plus théoriques en ce qu'ils font intervenir des fonctions « générales ».

Exercice 178 (③). *Soient* a *et* b *deux nombres réels tels que* $a < b$, f *et* g *deux fonctions dérivables de* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *telles que* $f(a) \leq g(a)$ *et que*

$$\forall x \in [a, b], \qquad f'(x) \leq g'(x).$$

En considérant $h := g - f$, *montrer que*

$$\forall x \in [a, b], \qquad f(x) \leq g(x).$$

Exercice 179 (② Inégalité des accroissements finis ∗). *Soient* a *et* b *deux nombres réels tels que* $a < b$, m *et* M *deux nombres réels,* f *une fonction dérivable sur* $[a, b]$, *à valeurs dans* $\mathbb{R}$.

a) On suppose que

$$\forall x \in [a, b], \qquad m \leq f'(x) \leq M.$$

Montrer que

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

On pourra considérer les fonctions

$$g : x \longmapsto f(x) - Mx, \qquad h : x \longmapsto f(x) - mx.$$

32. Une preuve au niveau terminale est possible mais fastidieuse.

b) Soit $K \in \mathbb{R}^+$. On suppose que

$$\forall x \in [a,b], \qquad |f'(x)| \leq K.$$

Montrer que

$$|f(b) - f(a)| \leq K\,|b-a|,$$

puis que

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2, \qquad |f(y) - f(x)| \leq K\,|y-x|.$$

Exercice 180 (③)**.** *Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, $K \in [0,1[$ et f une fonction dérivable de $[a,b]$ dans $[a,b]$ telle que*

$$(1) \quad \forall x \in [a,b], \qquad |f'(x)| \leq K.$$

On sait depuis l'exercice 172 que f admet un point fixe $c \in [a,b]$. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite définie par $u_0 \in [a,b]$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

En utilisant l'exercice précédent, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - c| \leq K^n\,|u_0 - c|.$$

Qu'en déduit-on sur la suite $(u_n)_{n\geq 0}$?[33]

On peut appliquer la variation des fonctions à la recherche d'extrema. Voici quelques exemples.

Exercice 181 (①)**.** *Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Calculer le maximum de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

Exercice 182 (①)**.** *Soit λ dans $\mathbb{R}^{+*}$. Déterminer le minimum de la fonction f_λ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par*

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f_\lambda(x) = \frac{\lambda x^2}{2} - \ln(x).$$

Exercice 183 (⑤)**.** *Déterminer le maximum de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par*

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f(x) = \ln(1+x)\,\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

33. L'hypothèse (1) assure, grâce à l'exercice précédent, que f « contracte les distances dans le rapport K », ce qui force $(u_n)_{n\geq 0}$ à converger « géométriquement » vers c.

6.4 Caractérisation des fonctions constantes, équations différentielles

6.4.1 Caractérisation des fonctions constantes

Une application importante de la dérivation est le résultat suivant : une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ y est constante si et seulement si elle y est dérivable de dérivée identiquement nulle.

Exercice 184 (① Fonctions à dérivée n-ième nulle $*$)**.** *Déterminer les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, n fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée n-ième est identiquement nulle.*

Exercice 185 (③)**.** *Pour quelles valeurs du nombre réel λ la fonction f_λ définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_\lambda(x) = \cos(x)^6 + \sin(x)^6 - \lambda \cos(4x)$$

est-elle constante ?

Exercice 186 (② Pendule simple $*$)**.** *Soient un pendule simple de masse m et de longueur ℓ, θ l'angle que fait le pendule avec la « verticale descendante » ; alors θ dépend du temps t et obéit à l'équation différentielle :*

$$\theta''(t) + \frac{g}{\ell} \sin(\theta(t)) = 0.$$

L'énergie du pendule au temps t est donnée par la formule :

$$E(t) = \frac{m\ell^2 \theta'(t)^2}{2} - mg\ell \cos(\theta(t)).$$

Montrer que E est constante (conservation de l'énergie).

Exercice 187 (② Dérivation et parité $*$)**.** *Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

a) En considérant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = f(x) - f(-x),$$

montrer que f est paire si et seulement si f' est impaire.

b) Montrer que f est impaire si et seulement si f' est paire et $f(0) = 0$.

Exercice 188 (③ Dérivation et périodicité $*$)**.** *Soient f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, T un élément de $\mathbb{R}^{+*}$.*

a) On suppose qu'il existe λ dans $\mathbb{R}$ et une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodique de période T telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = g(x) + \lambda x.$$

Montrer que f' est périodique de période T.

b) Formuler et démontrer une réciproque du résultat établi en a).

Exercice 189 (③)**.** *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad |f(y) - f(x)| \leq (y - x)^2.$$

Montrer que f est constante.

6.4.2 L'équation différentielle $y' = \lambda y$

La caractérisation des fonctions constantes entraîne la conséquence suivante, vue en terminale, mais dont nous rappelons la démonstration.

Théorème 4 (L'équation différentielle $y' = \lambda y$)**.** *Si $\lambda \in \mathbb{R}$, les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telles que :*

$$(1) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \lambda f(x)$$

sont les fonctions de la forme

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto Ce^{\lambda x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Preuve. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Puisque exp ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = e^{\lambda x} g(x)$$

où g est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nous allons voir que (1) équivaut au fait que g est constante, ce qui donnera le résultat désiré.

L'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = f(x)\, e^{-\lambda x}$$

montre que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g'(x) = e^{-\lambda x} \left(f'(x) - \lambda f(x)\right).$$

Puisque exp ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, f vérifie l'équation différentielle (1) si et seulement si g' est nulle, c'est-à-dire si g est constante.

Remarques

1. *Signification de l'équation différentielle précédente*
   Interprétons $f(t)$ comme la valeur au temps t d'une certaine quantité. Dire que f vérifie une équation différentielle de la forme (1), c'est dire que la variation instantanée de f est proportionnelle à f. La simplicité de ce modèle est une des raisons de l'ubiquité de l'exponentielle en sciences. Certains exemples ont été vus en Terminale (radioactivité, croissance d'une population).
2. *Solution prenant une valeur donnée en un point donné*
   Pour tout x_0 de $\mathbb{R}$ et tout y_0 de $\mathbb{R}$, il existe une unique solution de (1) prenant la valeur y_0 en x_0, correspondant au choix :
   $$C = e^{-\lambda x_0} y_0.$$
   C'est le premier exemple d'un phénomène fondamental : la détermination d'une fonction par une équation différentielle d'ordre 1 et une condition initiale.

Exercice 190 (① Temps de demi-vie $*$)**.** *Une certaine quantité d'une substance décroît exponentiellement en fonction du temps en obéissant à la loi :*

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad N(t) = Ce^{-Kt},$$

où les constantes C et K sont > 0. Déterminer le temps de demi-vie, c'est-à-dire l'instant t tel que

$$N(t) = \frac{C}{2}.$$

Exercice 191 (②)**.** *Une bactérie se développe avec un taux d'accroissement proportionnel à la population, c'est-à-dire que le nombre de bactéries à l'instant t obéit à l'équation différentielle :*

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad N'(t) = KN(t)$$

où K est une constante > 0. La population passe de 10^6 individus à 2.10^6 en 12 minutes. Combien de temps faut-il pour passer de 10^6 individus à 10^8 ?

Le problème géométrique proposé dans l'exercice suivant (dit « problème de de Beaune ») est anecdotique ; c'est cependant une des origines de l'exponentielle.

Exercice 192 (③ Courbes de sous-tangente constante)**.** *Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivée continue, vérifiant la condition suivante : pour tout réel x, la tangente au graphe de f en x n'est pas parallèle à l'axe (Ox) et, si $N(x)$ désigne le point d'intersection de cette tangente et de (Ox), la distance de $N(x)$ à la projection orthogonale du point d'abscisse x du graphe de f sur l'axe (Ox) est constante.*

Il est recommandé de faire un dessin.

Exercice 193 (③ Caractérisation des exponentielles par leur équation fonctionnelle $*$)**.** *On se propose de déterminer les fonctions f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x + y) = f(x)\, f(y).$$

a) Soit f une fonction vérifiant les conditions précédentes. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = f'(0)\, f(x).$$

b) Conclure.

L'exercice ci-après généralise le précédent, sans utiliser les équations différentielles.

Exercice 194 (③ Caractérisation des exponentielles par leur équation fonctionnelle, suite $*$)**.** *On considère une fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x + y) = f(x)\, f(y).$$

a) Montrer que f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

b) On suppose que f s'annule en un point de $\mathbb{R}$. Montrer que f est identiquement nulle.

c) On suppose que f est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. Qu'en déduit-on à l'aide de l'exercice 24 de **1.5** *?*

Revenons aux équations différentielles, en élargissant un peu l'étude. On se donne encore un nombre réel λ, et une fonction g continue sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On cherche les fonctions f dérivables sur I et telles que

$$(2) \qquad \forall x \in I, \qquad f'(x) - \lambda f(x) = g(x).$$

Le théorème 4 couvre le cas où g est la fonction nulle. Nous n'aborderons pas l'étude générale de (2) et nous contenterons de la très utile remarque suivante. Supposons connue une solution f_0 de (2). Alors, (2) équivaut à

$$\forall x \in I, \qquad (f - f_0)'(x) = \lambda(f - f_0)(x),$$

c'est-à-dire au fait que f est de la forme

$$x \in I \longmapsto f_0(x) + Ce^{\lambda x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, dès que l'on connaît une solution particulière de (2), on sait résoudre (2).

Exercice 195 (①). *a) Trouver les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) - 2f(x) = 1.$$

On cherchera une solution particulière constante.

b) Trouver les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) + f(x) = x.$$

On cherchera une solution particulière affine.

Exercice 196 (②). *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) - \lambda f(x) = e^x.$$

a) Traiter le cas $\lambda \neq 1$. On cherchera une solution particulière de la forme $x \longmapsto Ce^x$.

b) Traiter le cas $\lambda = 1$. On cherchera une solution particulière de la forme $x \longmapsto Cxe^x$.

Exercice 197 (②). *Trouver les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) + 3f(x) = \sin(x).$$

On cherchera une solution particulière de la forme $x \longmapsto a\sin(x) + b\cos(x)$.

6.5 Complément : la condition nécessaire d'extremum

Un autre résultat étroitement lié aux considérations précédentes, un peu plus théorique mais très important, est la *condition nécessaire d'extremum*.

Théorème 5 (Condition nécessaire d'extremum). *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Si f admet un extremum (maximum ou minimum) en un point x_0 de I, alors :*

$$f'(x_0) = 0.$$

Preuve. Supposons que f admette un minimum en x_0. Pour $x \in I$ tel que $x > x_0$, on a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

En laissant tendre x vers x_0, on obtient, par passage à la limite des inégalités larges

$$f'(x_0) \geq 0.$$

En effectuant un raisonnement analogue pour $x < x_0$, on a de même :

$$f'(x_0) \leq 0.$$

Ce résultat, découvert lors des débuts du calcul différentiel (Fermat), est classiquement utilisé en première année post-bac pour établir le théorème des accroissements finis et le lien entre variations et signe de la dérivée. Il a de très nombreuses autres applications.

Remarques

1. Le théorème ne donne qu'une condition nécessaire : la dérivée de la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^3$$

s'annule en 0, mais f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et n'a donc pas d'extremum en 0.

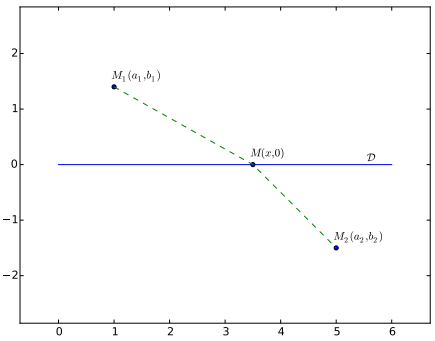
2. Le caractère ouvert de l'intervalle est essentiel ; la fonction

$$x \in [0,1] \longmapsto x$$

admet un minimum en 0, un maximum en 1, mais est de dérivée constante égale à 1.

Exemple. *Réfraction de la lumière*

Cet exemple non évident est un des premiers succès du calcul différentiel. Il explique la *loi de Snell-Descartes* sur la réfraction de la lumière. Supposons que la droite D, que nous prenons comme axe (Ox), partage le plan en deux milieux (les demi-plans $y > 0$, $y < 0$) dans lesquels la vitesse de la lumière est respectivement v_1 et v_2. Soient $M_1 = (a_1, b_1)$, $M_2 = (a_2, b_2)$ avec $b_1 > 0$, $b_2 < 0$ et, pour fixer les idées, $a_1 < a_2$.



On cherche le trajet minimisant le temps de parcours de la lumière de M_1 à M_2, c'est-à-dire le point $M = (x, 0)$ tel que :

$$T(x) = \frac{\sqrt{(x-a_1)^2 + b_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x-a_2)^2 + b_2^2}}{v_2}$$

soit minimal. Pour un tel x, on a $T'(x) = 0$, c'est-à-dire :

$$\frac{x-a_1}{v_1\sqrt{(x-a_1)^2 + b_1^2}} + \frac{x-a_2}{v_2\sqrt{(x-a_2)^2 + b_2^2}} = 0.$$

Cette égalité montre que x est dans $]a_1, a_2[$ et que, si α_1 et α_2 sont les angles respectifs de (M_1M) et (M_2M) avec la perpendiculaire à D en M, alors :

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{v_1} = \frac{\sin(\alpha_2)}{v_2}.$$

Cette égalité est la loi de Snell-Descartes. Le raisonnement précédent montre que cette loi se déduit d'un « principe variationnel ».

Exercice 198 (④ Distance d'un point à un graphe)**.** *Soient f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, M_0 un point de $\mathbb{R}^2$ n'appartenant pas au graphe de f, de coordonnées (x_0, y_0). Pour x dans $\mathbb{R}$, on note $M(x)$ le point du graphe de f d'abscisse x, c'est-à-dire le point de coordonnées $(x, f(x))$. On suppose que la distance de M_0 au graphe de f est atteinte au point de paramètre x_1, ce qui signifie que la fonction :*

$$\varphi \ : x \mapsto \left\| \overrightarrow{M_0 M(x)} \right\|$$

est minimale en x_1.

Pour x dans $\mathbb{R}$, exprimer $\psi(x) = \varphi(x)^2$ en fonction de $x, x_0, y_0, f(x)$. Calculer ensuite $\psi'(x)$. En déduire que la droite $(M_0 M(x_1))$ est perpendiculaire à la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_1.

Il est recommandé de faire un dessin.

7 Complément : les fonctions puissances

Les fonctions puissances sont des objets naturels et utiles. Leurs propriétés généralisent sans grande surprise celles, déjà connues, des exposants entiers. Nous verrons dans les exercices qu'elles fournissent un très riche terrain de jeu.

7.1 Généralités

Définition

Les fonctions puissances entières :

$$x \mapsto x^n, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

peuvent, très utilement, être généralisées de la façon suivante. Soit α dans $\mathbb{R}$. Pour x dans $\mathbb{R}^{+*}$, on pose :

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}.$$

On remarquera que, pour α non entier, x^α n'est défini que pour $x > 0$. Noter également que x^α appartient à $\mathbb{R}^{+*}$.

Propriétés algébriques

Pour α et β dans $\mathbb{R}$, on déduit immédiatement des propriétés du logarithme et de l'exponentielle les relations :

$$\begin{array}{ll} (1) & \forall (x,y) \in {\mathbb{R}^{+*}}^2, \quad (xy)^\alpha = x^\alpha \, y^\alpha ; \\ (2) & \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad x^\alpha \, x^\beta = x^{\alpha+\beta} ; \\ (3) & \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}. \end{array}$$

Ces propriétés généralisent sans surprise des résultats connus pour les exposants entiers. En voici deux conséquences utiles.

1. En prenant $\beta = -\alpha$ dans (2), on voit que l'inverse de x^α est $x^{-\alpha}$.
2. Supposons α non nul. Pour x et y dans $\mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$x^\alpha = y \quad \Leftrightarrow \quad x = y^{1/\alpha}.$$

Le cas particulier des racines n-ièmes

La formule (3) implique en particulier, pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\left(x^{1/n}\right)^n = x.$$

Le point 2 ci-dessus montre que le réel $x^{1/n}$ est l'unique élément de $\mathbb{R}^{+*}$ dont la puissance n-ième vaut x. On le note aussi $\sqrt[n]{x}$ et on l'appelle *racine n-ième de x*.

Pour $n = 2$, on retrouve la racine carrée : $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$. Rappelons la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sqrt{x^2} = |x|.$$

Dérivée

Le calcul de la dérivée de :

$$\varphi_\alpha \ : x \in \mathbb{R}^{+*} \longmapsto x^\alpha$$

se déduit du calcul de la dérivée d'une composée. On écrit :

$$\varphi_\alpha = v \circ u$$

où v est la fonction exponentielle et où u est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad u(x) = \alpha \ln(x).$$

On a :

$$\varphi'_\alpha(x) = u'(x)\ v'(u(x)) = \frac{\alpha}{x}\ e^{\alpha \ln(x)} = \frac{\alpha}{x}\ x^\alpha.$$

En utilisant (2) avec $\beta = -1$, on en déduit la formule :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad \varphi'_\alpha(x) = \alpha\ x^{\alpha-1}.$$

Là encore, cette formule généralise celle connue pour les exposants entiers.

Monotonie

Le calcul de la dérivée de φ_α montre que cette fonction est

- strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ si $\alpha > 0$;

- strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ si $\alpha < 0$;

Pour $\alpha = 0$, on retrouve la fonction constante égale à 1.

Comportement aux bornes

Supposons $\alpha > 0$. On vérifie que φ_α tend vers 0 en 0^+ et vers $+\infty$ en $+\infty$. Dans ce cas et dans ce cas seulement, on convient souvent de poser $0^\alpha = 0$, c'est-à-dire de prolonger la fonction par continuité en 0.

Supposons $\alpha < 0$. Alors φ_α tend vers $+\infty$ en 0^+ et 0 en $+\infty$.

Comparaison de deux fonctions puissances

Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$, x un élément de $\mathbb{R}^{+*}$. Comparons x^α et x^β. On distingue deux cas.

- Si $x \geq 1$, $\ln(x) \geq 0$, donc (multiplication d'une inégalité par un réel positif) : $\alpha \ln(x) \leq \beta \ln(x)$. Par croissance de exp, on a donc :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \qquad x^\alpha \leq x^\beta.$$

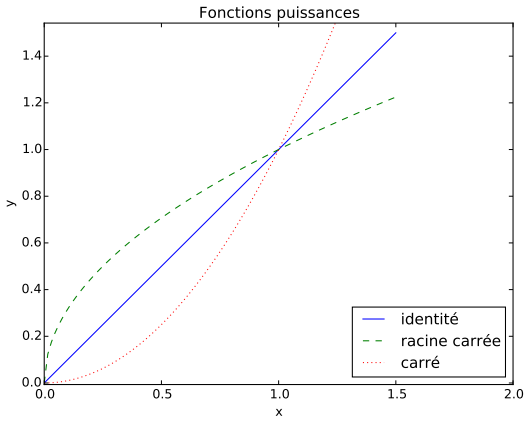
Cette inégalité est stricte pour $x > 1$.

- Si $x \leq 1$, $\ln(x) \leq 0$, donc (multiplication d'une inégalité par un réel négatif) : $\alpha \ln(x) \geq \beta \ln(x)$. Par croissance de exp, on a donc :

$$\forall x \in]0, 1], \qquad x^\alpha \geq x^\beta.$$

Cette inégalité est stricte pour $x < 1$.

En résumé, si $\alpha < \beta$, x^α est plus petit que x^β sur $[1, +\infty[$ et plus grand sur $]0, 1]$. On retrouve ce résultat en se représentant, sur un même dessin, le graphe de $x \mapsto x$ ($\alpha = 1$, première bissectrice) et celui de $x \mapsto x^2$ ($\alpha = 2$, parabole), dessin que l'on complète profitablement par le graphe de $x \mapsto \sqrt{x}$.



Graphe des fonctions $x \mapsto x, x \mapsto \sqrt{x}, x \mapsto x^2$.

Exercice 199 (②). *a) Pour quels nombres réels α la fonction φ_α est-elle convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$?*

b) En déduire que, si $\alpha > 1$,

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \qquad (1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x.$$ [34]

Exercice 200 (①). *Déterminer la limite de* $\dfrac{x^\alpha - 1}{x - 1}$ *lorsque x tend vers 1.*

Exercice 201 (①). *Soit α dans $\mathbb{R}$. Pour n de $\mathbb{N}$, calculer la dérivée n-ième de φ_α.*

Exercice 202 (④ Équation différentielle des fonctions puissances). *Soient $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, f une fonction de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$. En imitant éventuellement la démonstration du théorème 4 de* **6.4.2**, *montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

- la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f'(x) = \frac{\alpha}{x} f(x),$$

- il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f(x) = C\, x^\alpha.$$

Exercice 203 (②). *La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_n}.$$

Exprimer u_n en fonction de u_0 et n, puis déterminer la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$.

34. L'*inégalité de Bernoulli* est le cas particulier de l'inégalité précédente où $\alpha \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 204 (② Les fonctions $x \mapsto a^x$ $*$)**.** *Soit a un élément de $\mathbb{R}^{+*}$. On note ψ_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \psi_a(x) = a^x = \exp\left(\ln(a)\, x\right).$$

a) Calculer la dérivée de ψ_a.

b) Déterminer les limites de $\psi_a(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, lorsque x tend vers $-\infty$. On discutera selon la position de a par rapport à 1.

c) Tracer les graphes de ψ_2, de $\psi_{1/2}$.

Exercice 205 (①)**.** *Soit $a > 0$. Déterminer la limite de $\dfrac{a^x - 1}{x}$ lorsque x tend vers 0.*

Exercice 206 (②)**.** *a) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, u une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}^{+*}$, v une fonction dérivable de I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour x dans $\mathbb{R}$, on pose :*

$$w(x) = u(x)^{v(x)}.$$

Calculer la dérivée de w.

b) Écrire l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \longmapsto x^x$ au point d'abscisse 1.

Exercice 207 (③ Un problème d'optimisation géométrique)**.** *On considère une boîte fermée en forme de cylindre droit. La base est un disque de rayon $r > 0$, la hauteur du cylindre est $h > 0$. On note S l'aire latérale de la boîte (incluant les deux bases), V son volume.*

a) Justifier les relations :

$$S = 2\pi\left(r^2 + rh\right), \qquad V = \pi r^2 h.$$

b) On suppose que V est fixé. En utilisant la relation $S = 2\pi\left(r^2 + \dfrac{V}{\pi r}\right)$ et en étudiant la fonction :

$$f \ : r \in \mathbb{R}^{+*} \longmapsto r^2 + \frac{V}{\pi r},$$

dire comment choisir r et h pour que S soit minimale.

Exercice 208 (③)**.** *Soit α un élément de $]0, 1[$.*

a) En étudiant une fonction judicieuse, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad (1+x)^\alpha \leq 1 + x^\alpha.$$

b) Soient x et y dans $\mathbb{R}^+$ avec $y > x$. Montrer que $y^\alpha - x^\alpha \leq (y-x)^\alpha$.

Exercice 209 (③ L'inégalité de Young)**.** *Soit $p \in]1, +\infty[$.*

a) Montrer qu'il existe un unique réel q (que l'on appelle parfois exposant conjugué de p*) tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Vérifier que q est > 1. Déterminer q pour $p = 2$, puis pour $p = 4$.*

b) On fixe y dans $\mathbb{R}^{+*}$. Étudier les variations de la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy.$$

c) Conclure que

$$\forall (x,y) \in {\mathbb{R}^{+*}}^2, \qquad xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$ [35]

7.2 Fonctions puissances et croissances comparées

En $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur les puissances, les puissances strictement positives l'emportent sur le logarithme ; c'est le contenu du théorème ci-après.

Théorème 6 (Croissance comparée des fonctions puissances et de l'exponentielle)**.** *Pour tout $\alpha > 0$.*

$$\frac{x^\alpha}{e^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \frac{\ln(x)}{x^\alpha} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve. Pour $\alpha = 1$, ces résultats ont été établis dans le cours de terminale. Prouvons le premier. Pour x dans $\mathbb{R}^{+*}$, soit

$$f_\alpha(x) = \frac{x^\alpha}{e^x}.$$

La dérivée de f_α est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f'_\alpha(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{e^x}(\alpha - x).$$

Il s'ensuit que, sur $[\alpha, +\infty[$, f'_α est négative et f_α est décroissante. Notant M_α le réel $f_\alpha(\alpha)$, on a donc :

$$\forall x \in [\alpha, +\infty[, \qquad 0 \leq f_\alpha(x) \leq M_\alpha.$$

À ce stade, on a montré uniquement que f_α est bornée sur $[\alpha, +\infty[$. Observons maintenant que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f_\alpha(x) = \frac{1}{x} f_{\alpha+1}(x).$$

Comme $f_{\alpha+1}$ est bornée sur $[\alpha+1, +\infty[$, f_α, produit d'une fonction bornée et d'une fonction tendant vers 0 en $+\infty$, tend vers 0 en $+\infty$.

Démontrons le second point. Posons $t = \ln(x)$, $u = \alpha t$. Alors t et u tendent vers $+\infty$ avec x et

$$\frac{\ln(x)}{x^\alpha} = \frac{t}{e^{\alpha t}} = \frac{u}{\alpha e^u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remarques *Croissances comparées se ramenant au théorème 6.*

1. En $-\infty$, l'exponentielle l'emporte également sur les puissances, ce que l'on peut écrire :

$$|x|^\alpha e^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Posons en effet $x = -y$. Alors y tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, et

$$|x|^\alpha e^x = \frac{|y|^\alpha}{e^y} \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

35. Cette inégalité généralise l'inégalité arithmético-géométrique pour deux nombres réels vue en **3.2**. On trouve une autre généralisation dans le paragraphe suivant.

2. Si $a \in]1, +\infty[$ et $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\frac{a^x}{x^\alpha} = \frac{e^{\ln(a)x}}{x^\alpha} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

comme on le voit en appliquant la première partie du théorème 6 et en posant $y = \ln(\alpha)\, x$. De même, si $a \in]0, 1[$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$,

$$a^x\, x^\alpha \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 210 (①). *Déterminer la limite de* $\dfrac{(1,01)^x}{x^{2022}}$ *en* $+\infty$.

Comparons enfin deux fonctions puissances, en $+\infty$ et en 0, ce qui complètera les inégalités obtenues dans le paragraphe précédent.

- Lorsque x tend vers $+\infty$, x^α est d'autant plus grand que α est grand. En effet, si $\alpha < \beta$, $\alpha - \beta < 0$ de sorte que :

$$\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- Lorsque x tend vers 0^+, x^α est d'autant plus grand que α est petit. En effet, si $\alpha < \beta$, $\alpha - \beta < 0$ de sorte que :

$$\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} +\infty.$$

Exercice 211 (①). *Trouver la limite en* $+\infty$ *de*

$$f(x) = e^{-\sqrt{x}}x^2, \qquad g(x) = e^{-x^2}x^{10000}, \qquad h(x) = \ln(x)^8 e^{-x}, \qquad i(x) = \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}.$$

Exercice 212 (② $*$). *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. *En posant* $y = \dfrac{1}{x}$, *trouver la limite en* 0^+ *de*

$$f_\alpha(x) = x^\alpha \ln(x).$$

Exercice 213 (②). *En appliquant la méthode de démonstration du théorème 3 de* **5.5**, *montrer que, si* $a \in \mathbb{R}^{+*}$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, *alors*

$$\frac{a^n}{(n!)^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

7.3 L'inégalité arithmético-géométrique

Le résultat ci-après est une généralisation remarquable et utile du théorème 1 de **3.2**.

Théorème 7 (Inégalité arithmético-géométrique). *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n$ *des éléments de* $\mathbb{R}^{+*}$. *Alors*

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Il y a égalité si et seulement si les x_i *sont tous égaux.*

Preuve. Posons

$$S = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{et} \quad P = \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

Nous voulons démontrer que $\sqrt[n]{P} \leq \dfrac{S}{n}$, i.e. que $n^n P \leq S^n$. À cet effet, nous allons utiliser l'inégalité

$$(1) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad x \leq e^{x-1},$$

démontrée plus haut. Si $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a donc

$$(2) \qquad \frac{nx_i}{S} \leq e^{\frac{nx_i}{S}-1}.$$

Faisons le produit de ces inégalités, ce qui est licite car tous les nombres qui interviennent sont strictement positifs. Il vient

$$\frac{n^n\ P}{S^n} \leq \exp\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{nx_i}{S} - 1\right)\right).$$

Mais

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{nx_i}{S} - 1\right) = n\,\frac{S}{S} - n = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{n^n P}{S^n} \leq 1.$$

C'est la première partie de l'énoncé. Pour établir la deuxième, on utilise le fait que l'inégalité (1) n'est une égalité que pour $x = 1$. S'il existe i tel que $x_i \neq \dfrac{S}{n}$, une au moins des inégalités (2) est stricte. En faisant le produit de ces inégalités entre nombres réels strictement positifs, il vient

$$\frac{n^n P}{S^n} < 1.$$

L'égalité $S^n = n^n P$ exige donc que tous les x_i soient égaux à $\dfrac{S}{n}$, donc égaux entre eux.

Remarques *À propos de l'inégalité arithmético-géométrique*

1. *Moyenne arithmétique, moyenne géométrique*
   Les nombres réels
   $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{et} \quad \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$
   sont appelés respectivement *moyenne arithmétique* et *moyenne géométrique* du n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$, ce qui justifie le nom de l'inégalité.
2. *Reformulation de l'inégalité*
   On peut reformuler l'inégalité arithmético-géométrique de la façon suivante. Si les réels $x_1, \ldots, x_n$ sont strictement positifs et ont pour produit P, leur somme est minorée par $n\sqrt[n]{P}$, avec égalité si et seulement si les x_i sont tous égaux à $\sqrt[n]{P}$.

   Autre reformulation : si des réels strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$ ont pour somme S, leur produit est majoré par $\left(\dfrac{S}{n}\right)^n$, avec égalité si et seulement si les x_i sont tous égaux à $\dfrac{S}{n}$.

3. *Autres démonstrations*

Le théorème 7 admet plusieurs démonstrations. Outre celle donnée ci-dessus, on en trouvera une dans l'exercice 215. Un autre argument possible [36] est de se ramener au théorème 1 de la manière suivante. Si tous les x_i valent $\frac{S}{n}$, l'inégalité est une égalité. Sinon, on dispose de i et j dans $\{1,\dots,n\}$ tels que $x_i < \frac{S}{n} < x_j$. On remplace alors x_i par $\frac{S}{n}$ et x_j par $x_i + x_j - \frac{S}{n}$ sans modifier les x_k pour k différent de i et j. Notons $(x'_1,\dots,x'_n)$ le n-uplet obtenu. Alors $\sum_{k=1}^{n} x'_k = \sum_{k=1}^{n} x_k$ mais, puisque

$$x'_i x'_j - x_i x_j = \frac{S}{n}\left(x_i + x_j - \frac{S}{n}\right) - x_i x_j = \left(x_j - \frac{S}{n}\right)\left(\frac{S}{n} - x_i\right) > 0,$$

on a aussi $\prod_{k=1}^{n} x'_k > \prod_{k=1}^{n} x_k$. Cette observation permet d'établir le théorème 7 par récurrence sur le nombre de x_k distincts de $\frac{S}{n}$. La mise en forme est laissée au lecteur.

Exercice 214 (④ L'inégalité entre moyenne géométrique et moyenne harmonique)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1,\dots,x_n$ des éléments de $\mathbb{R}^{+*}$. La moyenne harmonique de $(x_1,\dots,x_n)$ est le réel H tel que $\frac{1}{H}$ soit la moyenne arithmétique du n-uplet $\left(\frac{1}{x_1},\dots,\frac{1}{x_n}\right)$. En d'autres termes : $H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$. En appliquant le théorème 7 à $\left(\frac{1}{x_1},\dots,\frac{1}{x_n}\right)$, montrer que $H \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$, et qu'il y a égalité si et seulement si les x_i sont tous égaux.*

Exercice 215 (④ L'inégalité arithmético-géométrique, démonstration de Cauchy $*$)**.** *Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on se propose d'établir la propriété suivante, que l'on appelle $\mathcal{P}_n$: pour toute n-uplet $(x_1,\dots,x_n)$ d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$, on a*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i},$$

avec égalité si et seulement si les x_i sont tous égaux. La démonstration proposée dans cet exercice est due à Cauchy.

On note A l'ensemble des n de $\mathbb{N}^*$ tels que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

a) Montrer que $\mathcal{P}_2$ est vraie.

b) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que, si $\mathcal{P}_n$ est vraie, il en est de même de $\mathcal{P}_{2n}$.

c) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que, si $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, il en est de même de $\mathcal{P}_n$. On pourra, si $x_1,\dots,x_n$ sont des éléments de $\mathbb{R}^{+*}$, poser :

$$x_{n+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

d) Conclure à l'aide de l'exercice 13 de **1.3**.

36. Dû à Muirhead au début du vingtième siècle.

L'inégalité arithmético-géométrique a de nombreuses conséquences. Les deux exercices suivants en sont des applications à des problèmes d'optimisation géométrique.

Exercice 216 (③ Volume maximal d'un parallélépipède rectangle d'aire latérale fixée)**.** *Les arêtes d'un parallélépipède rectangle ont pour longueurs a, b, c. Le volume du parallélépipède est noté V, son aire latérale (i.e. la somme des aires des six faces) est notée S.*

a) Calculer V et S en fonction de a, b, c.

b) Montrer que

$$\frac{ab+bc+ca}{3} \geq V^{2/3}.$$

À quelle condition y a-t-il égalité ?

c) Quel est le volume maximal d'un parallélépipède d'aire latérale S donnée ? Pour quels parallélépipèdes est-il atteint ?

Exercice 217 (④ Inégalité isopérimétrique pour les triangles)**.** *Soit ABC un triangle. On note a, b, c les longueurs respectives des côtés BC, CA, AB. Le demi-périmètre de ABC est noté p : $p = \frac{a+b+c}{2}$. L'aire de ABC est notée S.*

Le but des trois premières questions est d'établir la formule de Héron :

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

a) Au moins une des hauteurs du triangle est intérieure au triangle. Supposons que ce soit le cas de la hauteur issue de A, dont on note H le pied. On pose $x = BH$. Montrer que

$$x^2 + h^2 = c^2 \quad \text{et que} \quad (a-x)^2 + h^2 = b^2.$$

b) Montrer que

$$16S^2 = 4a^2h^2 = 4a^2c^2 - 4a^2x^2.$$

c) Établir la formule de Héron. [37]

d) En déduire l'inégalité :

$$S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}},$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si le triangle est équilatéral. Ainsi, parmi les triangles de périmètre fixé, l'aire maximale est atteinte pour les triangles équilatéraux.

37. Que l'on peut retrouver de la façon suivante (Feynman).

- La quantité S^2 est homogène à la puissance quatrième d'une longueur ; il est donc raisonnable d'espérer un produit de quatre combinaisons linéaires de a, b, c.

- L'aire S s'annule si le triangle est aplati, ce qui donne trois facteurs linéaires $a+b-c$, $b+c-a$ et $c+a-b$.

- Le produit des trois facteurs précédents est invariant lorsqu'on permute a, b, c, l'aire S aussi. Le facteur manquant est donc également invariant, donc proportionnel à $a+b+c$.

- À ce stade, il est raisonnable de supposer qu'il existe une constante absolue $C > 0$ telle que, pour tout triangle, on ait

$$S^2 = C(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

Pour déterminer C, on prend le plus simple des triangles rectangles : $a = 3, b = 4, c = 5$ et donc $S = 6$. On obtient $C = \frac{1}{16}$. C'est la formule voulue.

7.4 Utilisation de la forme exponentielle pour le calcul des limites

L'utilisation des fonctions puissances permet d'étendre la méthode présentée en **5.4** : lorsqu'on a affaire à des fonctions de la forme

$$f \ : x \mapsto u(x)^{v(x)},$$

il est souvent utile de revenir à la *forme exponentielle* :

$$f(x) = \exp\left(v(x)\ \ln\left(u(x)\right)\right).$$

Ainsi, pour calculer la limite de $f(x)$ en un point de $\mathbb{R}$ ou en $\pm\infty$, il suffit de calculer la limite de $v(x)\ \ln(u(x))$ et de prendre l'exponentielle du résultat.

Notons que si $u(x)$ tend vers 1 et $v(x)$ vers $+\infty$, $\ln(u(x))$ tend vers 0, de sorte « 1^∞ » est une forme indéterminée. Il en est de même de ∞^0.

Exemple

Déterminons la limite de $f(x) = x^{1/x}$ en $+\infty$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f(x) = \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right).$$

Comme, par croissance comparée :

$$\frac{\ln x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

il vient :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Exercice 218 (③)**.** *Trouver les limites quand x tend vers $+\infty$ de :*

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x, \quad g(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}.$$

Exercice 219 (③)**.** *Trouver la limite quand x tend vers $+\infty$ de*

$$f(x) = \frac{\ln(x)^x}{x^{\ln(x)}}.$$

Exercice 220 (④ Est-il toujours vrai que $0^0 = 1$?)**.** *a) Montrer que x^x tend vers 1 lorsque x tend vers 0^+.*

b) Indiquer un exemple de fonction u de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ tendant vers 0 en 0 et telle que $u(x)^x$ ne tende pas vers 1 lorsque x tend vers 0^+.

c) Indiquer un exemple de fonction v de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ tendant vers 0 en 0 et telle que $x^{v(x)}$ ne tende pas vers 1 lorsque x tend vers 0^+.

Exercice 221 (④)**.** *Soient a et b deux éléments de $\mathbb{R}^{+*}$, f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}.$$

Déterminer la limite de f en 0.

8 Intégration

L'intégrale d'une fonction continue sur un segment a été introduite en classe de terminale, à partir de l'interprétation en termes d'aire, qui reste à un niveau semi-intuitif. On reprend ici les points essentiels du programme (lien entre dérivation et intégration, calcul de primitives, intégration des inégalités, intégration par parties). Ce chapitre, qui conclut la partie « analyse » ; du présent document, permet de faire interagir beaucoup de notions vues précédemment. Il est également l'occasion de proposer plusieurs compléments ouvrant (modestement) sur l'enseignement supérieur.

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

8.1 Calculs d'intégrales et de primitives

Les calculs d'intégrales sont fondés sur le *lien entre dérivation et intégration*, c'est-à-dire le fait que, si f est une fonction continue sur I et a un point de I, alors la fonction

$$x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable sur I de dérivée f.

Conséquence : si f est une fonction continue sur I, si a et b sont deux points de I et F une primitive de f sur I, alors on a l'égalité

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) := [F(t)]_a^b,$$

qui est le principal moyen de calcul des intégrales.

Dans les calculs de primitives, on utilise les résultats suivants.

- Les formules du type

$$u'e^u = (e^u)', \quad \frac{u'}{u} = (\ln(|u|)', \quad u^\alpha = \left(\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)',$$

qui permettent de reconnaître sous l'intégrale des fonctions qui sont en fait des dérivées.

- Les « primitives usuelles » vues en terminale, ainsi que les deux résultats suivants :

(i) les primitives de ln sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont les $x \mapsto x\ln(x) - x + C,\ C \in \mathbb{R}$ (résultat démontré en **8.4** mais que le lecteur peut vérifier dès à présent en dérivant) ;

(ii) si α est un réel différent de -1, les primitives de $x \mapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont les $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

- Les propriétés opératoires des fonctions usuelles : $e^{u+v}, e^{u-v}, \ln(uv) = \ln(u) + \ln(v),\ \ln\left(\dfrac{v}{u}\right)$, formules de trigonométrie...).

Exercice 222 (②). *Calculer les primitives des fonctions suivantes :*

— $a : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(3x) + 2\sin(5x)$,

— $b : x \in \mathbb{R} \mapsto 6\ e^{-4x}$,

— $c : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x)\sin(x)$,
— $d : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 e^{-x^3}$,
— $e : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$,
— $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x\ e^{e^x}$,
— $g : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt{x}$,
— $h : x \in]-1,1[\mapsto \dfrac{3x}{\sqrt{1-x^2}}$,
— $i : x \in \mathbb{R} \mapsto (1-2x)^5$,
— $j : x \in]-\infty,1[\mapsto \dfrac{x^2}{x^3-1}$,
— $k : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{1+2e^{-x}}$,
— $\ell : x \in]1,+\infty[\mapsto \dfrac{(\ln(x))^\alpha}{x}$, *où* $\alpha \in \mathbb{R}$,
— $m : x \in]-1,+\infty[\mapsto \dfrac{1}{(x+1)^n}$, *où* $n \in \mathbb{N}^*$,
— $n : x \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\mapsto \tan(x)$,
— $p : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \dfrac{\sin(x)-x\cos(x)}{x^2}$.

Exercice 223 (②)**.** *En utilisant les relations obtenues dans l'exemple 2 de* **2.3** *et dans l'exercice 46, calculer :*

$$I = \int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}, \qquad J = \int_2^5 \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)(t+2)}.$$

Exercice 224 (②)**.** *Pour p et q dans $\mathbb{N}^*$, calculer :*

$$\int_0^{2\pi} \cos(pt)\cos(qt)\,\mathrm{d}t\ , \quad \int_0^{2\pi} \sin(pt)\sin(qt)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 225 (③)**.** *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, f_n désigne la fonction de $]0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$\forall t \in]0,\pi], \qquad f_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer, en utilisant le fait que $\dfrac{\sin(u)}{u}$ tend vers 1 lorsque u tend vers 0, que la fonction f_n admet une limite que l'on précisera en 0. Ceci permet de prolonger f_n en une fonction continue sur $[0,\pi]$, encore notée f_n et de poser $I_n = \displaystyle\int_0^\pi f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Si $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_{n+1} - I_n$, puis I_n.

Exercice 226 (③)**.** *Pour $x \in [0,1[$, calculer*

$$F(x) = \int_0^x \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\,\mathrm{d}t.$$

Quelle est la limite de la fonction F lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures ?

8.2 Intégration des inégalités

Une propriété fondamentale de l'intégrale est l'*intégration des inégalités* : si $a < b$, si f et g sont deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, alors :

$$\forall t \in [a, b], \quad f(t) \leq g(t) \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$ [38]

Un cas particulier souvent utile est la *forme intégrale de l'inégalité triangulaire*, c'est-à-dire la majoration

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t,$$

que l'on obtient en intégrant l'encadrement

$$\forall t \in [a, b], \qquad -|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|.$$

Exercice 227 (① Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment $*$)**.** *Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. La valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est le nombre réel*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Quelle est la valeur moyenne d'une fonction constante sur $[a, b]$? Montrer que si f est une fonction affine, sa valeur moyenne sur $[a, b]$ est $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.

b) Montrer que la valeur moyenne de f sur $[a, b]$ appartient à $[m, M]$ où m (resp. M) est le minimum (resp. maximum) de f sur $[a, b]$.

Exercice 228 (②)**.** *Soit f une fonction continue de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$\forall t \in [1, +\infty[, \qquad f(t) \geq \frac{1}{t}.$$

Montrer que

$$\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Exercice 229 (④ Inégalité de Tchebychev)**.** *Soient f et g deux fonctions continues et croissantes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.*

a) Pour $(x, y) \in [0, 1]^2$, quel est le signe de $(f(y) - f(x))\,(g(y) - g(x))$?

b) En déduire que

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_0^1 g(t)\;dt \leq \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

c) Donner une version discrète (i.e. portant sur des sommes) de cette inégalité.

38. On a en fait mieux : sous l'hypothèse proposée, on a

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

si et seulement si f et g sont égales sur $[a, b]$.

L'exercice ci-après est la version intégrale du théorème 2 de **3.4**.

Exercice 230 (④ L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales $*$)**.** *Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f et g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On se propose d'établir l'inégalité :*

$$\left| \int_a^b f(t)\ g(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\ \sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Pour x réel, on pose :

$$S(x) = \int_a^b \left(f(t) + x\,g(t)\right)^2\ \mathrm{d}t.$$

Vérifier que la fonction S est polynomiale de degré ≤ 2 et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Conclure en considérant le discriminant de ce trinôme.

Exercice 231 (⑤ L'inégalité de Hölder pour les intégrales $*$)**.** *Les notations p, q sont celles de l'exercice 209 de* **7.1** *(inégalité de Young), dont on utilise également le résultat. Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f et g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On se propose de démontrer l'inégalité de Hölder :*

$$\left| \int_a^b f(t)\ g(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t \right)^{1/q}.$$

On remarquera que, pour $p = 2$, on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz (exercice précédent).

a) En utilisant l'inégalité de Young, montrer que, pour λ dans $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\left| \int_a^b f(t)\ g(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \frac{\lambda^p}{p} \int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t + \frac{1}{q\lambda^q} \int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t.$$

b) Déterminer le minimum de la fonction :

$$\psi : \lambda \in \mathbb{R}^{+*} \longmapsto \frac{\lambda^p}{p} \int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t + \frac{1}{q\lambda^q} \int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t.$$

Conclure.

8.3 Intégrale fonction de sa borne supérieure

L'outil essentiel dans ce paragraphe est à nouveau le lien entre intégration et dérivation rappelé en **8.1**. On utilise également l'intégration des inégalités pour majorer ou minorer certaines intégrales.

Exercice 232 (③)**.** *Soient f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, G la fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $G(0) = f(0)$ et*

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad G(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, donner une expression de $G'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

b) Montrer que G est continue en 0. On pourra reconnaître en $G(x)$ un taux d'accroissement.

Exercice 233 (②). *Soient f une fonction continue de l'intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, u et v deux fonctions dérivables définies sur l'intervalle J et à valeurs dans l'intervalle I.*[39] *Calculer la dérivée de la fonction G définie sur J par :*

$$\forall x \in J, \qquad G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On notera que, si F est une primitive de f, alors

$$\forall x \in J, \qquad G(x) = F(v(x)) - F(u(x)).$$

Exercice 234 (③). *Montrer que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad \int_{1/x}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 235 (③). *Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose*

$$f(x) = \int_{x}^{2x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

a) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad 0 \leq f(x) \leq x\,e^{-x^2}.$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 236 (④). *Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose*

$$f(x) = \int_{x}^{2x} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

a) Étudier les variations de f sur chacun des deux intervalles $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$.

b) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f(x) \geq \frac{e^x}{2}\,\cdot$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

c) Montrer, à l'aide d'un encadrement, que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$.

d) Trouver une constante $C > 0$ telle que

$$\forall t \in [-1,1], \qquad |e^t - 1| \leq C\,|t|.$$

On pourra utiliser l'exercice 179 de **6.3.2**.

e) Déduire de d) la limite de f en 0.

39. Le lecteur ne doit pas se laisser impressionner par ces hypothèses, dont le rôle est de garantir que la fonction G est bien définie et dérivable sur I.

8.4 L'intégration par parties

La technique dite d'*intégration par parties* est une conséquence du lien entre primitive et intégrale et de la formule donnant la dérivation d'un produit. Elle joue un rôle fondamental dans beaucoup de calculs. Rappelons-en l'énoncé et la démonstration.

Théorème 8 (Intégration par parties)**.** *Soient u et v deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivables sur I, à dérivées continues, a et b deux points de I. Alors :*

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)\,v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Preuve. On sait que :

$$(uv)' = uv' + u'v.$$

On a donc :

$$\int_a^b \left(u(t)\,v'(t) + u'(t)\,v(t)\right)\,\mathrm{d}t = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a).$$

La formule désirée se déduit aisément de ce calcul et de la linéarité de l'intégrale.

Quel est l'intérêt de ce résultat ? Le crochet $[u(t)v(t)]_a^b$ se calcule immédiatement. Dès que le calcul des primitives de $u'v$ est plus simple que celui des primitives de uv', le théorème 8 apporte un gain.

Exemples

1. Soit x dans $\mathbb{R}$. Calculons
$$\int_0^x t\cos(t)\,\mathrm{d}t.$$
Le point important est que
$$u\ : t \mapsto t$$
se dérive en la fonction constante égale à 1 alors que cos se primitive en sin. Posant $v = \sin$, le produit $u'v = \sin$ s'intègre donc immédiatement, contrairement à la fonction initiale uv'. En appliquant la formule précédente, il vient :
$$\int_0^x u(t)\ v'(t)\,\mathrm{d}t = [t\sin t]_0^x - \int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t.$$
On a :
$$[t\sin t]_0^x = x\sin(x), \qquad \int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t = [-\cos t]_0^x = -\cos x + 1.$$
Au total :
$$\int_0^x t\ \cos(t)\,\mathrm{d}t = x\sin x + \cos x - 1.$$

2. $(*)$ *Primitives de* ln
Soit x dans $\mathbb{R}^{+*}$. Comme annoncé en **8.1**, calculons
$$\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t.$$
On pose ici, pour t dans $\mathbb{R}^{+*}$:
$$u(t) = \ln(t), \qquad v(t) = t.$$

Il vient :

$$u'(t) = \frac{1}{t}, \qquad v'(t) = 1.$$

Le produit $u'v$ est la fonction constante égale à 1. L'intégration par parties donne :

$$\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t = [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x 1\ \mathrm{d}t = x\ln(x) - x + 1.$$

Conséquence : la fonction

$$x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto x\ln(x) - x$$

est l'unique primitive de ln définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et prenant la valeur -1 en $x = 1$; les primitives de ln sur ce même intervalle sont les

$$x \longmapsto x\ln(x) - x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 237 (①). *Calculer, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$,*

$$\int_1^x t^2\ln(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \int_1^x (\ln(t))^2\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 238 (②). *Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^{+*}$,*

$$\int_1^x t^n\ \ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 239 (②). *Calculer :*

$$\int_0^x t^2\ \sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

Plus généralement, donner une méthode permettant de calculer les primitives de fonctions de la forme $x \mapsto p(x)\sin(x)$ ou $x \mapsto p(x)\cos(x)$ où p est un polynôme.

Exercice 240 (②). *Calculer :*

$$\int_0^x t\,e^t\,\mathrm{d}t, \qquad \int_0^x t^2\,e^t\,\mathrm{d}t.$$

Plus généralement, donner une méthode permettant de calculer les primitives de fonctions de la forme $x \mapsto p(x)\,e^x$ où p est un polynôme.

Exercice 241 (②). *Calculer, si a et b sont deux réels non nuls et x un réel :*

$$f(x) = \int_0^x e^{at}\cos(bt)\,\mathrm{d}t.$$

On intègrera successivement deux fois par parties.

L'intégration par parties permet le calcul de certaines intégrales par récurrence. Voici un exemple.

Exercice 242 (③). *Pour p et q dans $\mathbb{N}^*$, on pose*

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}\ (1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x.$$

a) On suppose que $q \geq p \geq 1$. Exprimer $B(p,q)$ en fonction de $B(p-1,q+1)$, p et q.

b) Exprimer $B(p,q)$ en fonction de p et q, d'abord si $q \geq p$, puis si $q \leq p$.

Exercice 243 (④ Le lemme de Riemann-Lebesgue). *Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f une application définie sur $[a,b]$, à valeurs réelles, dérivable et à dérivée continue. Pour λ dans $\mathbb{R}^{+*}$, démontrer :*

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{\lambda}\left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right).$$

En déduire que

$$\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Le résultat subsiste pour une fonction continue. La preuve, plus délicate, est accessible en première année post-bac.

8.5 Suites d'intégrales

L'étude de suites d'intégrales combine souvent toutes les propriétés de l'intégration : calcul de primitives, intégration des inégalités, intégration par parties. Nous traiterons dans le paragraphe suivant un exemple classique plus délicat, celui des *intégrales de Wallis*.

Dans les exemples ci-dessous, l'étude de la monotonie de $(I_n)_{n\geq 0}$ se fait en exprimant $I_{n+1} - I_n$ comme l'intégrale d'une fonction de signe constant, ou, de façon équivalente, en intégrant les inégalités.

Exercice 244 (②). *Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^+$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose*

$$I_n = \int_0^1 f(t)\ t^n\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer le signe de I_n, puis le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 245 (③). *Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose*

$$I_n = \int_0^1 f(t)\ t^n\,\mathrm{d}t.$$

On admet qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall t \in [0,1], \qquad |f(t)| \leq M.$$ [40]

Majorer $|I_n|$ et montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

40. Ce point sera justifié en première année post-bac : toute fonction continue sur un segment (intervalle fermé borné) est bornée et atteint ses bornes. Vous pouvez le constater expérimentalement sur les fonctions usuelles ou étudiées dans les exercices ; en fait, ces fonctions sont toutes « monotones par morceaux », ce qui entraîne le résultat (question pour le lecteur : pourquoi ?) ; mais une fonction continue n'est pas nécessairement monotone par morceaux.

Exercice 246 (③). *Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose* $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t}\,\mathrm{d}t$.

a) Calculer I_1.

b) Déterminer le minimum de $\dfrac{1}{1+e^t}$ pour $t \in [0,1]$. En déduire une minoration de I_n et la limite de $(I_n)_{n\geq 0}$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n + I_{n+1}$.

d) Calculer I_0 et I_2.

e) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

f) Déduire des questions c) et e) la limite de la suite $\left(ne^{-n}I_n\right)_{n\geq 0}$.

Exercice 247 (③). *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose*

$$I_n = \int_1^e (\ln(t))^n\,\mathrm{d}t.$$

a) Calculer I_1.

b) Si $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le signe de I_n.

c) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_{n+1} = e - (n+1)I_n.$$

d) Déduire des questions b) et c) la limite de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$.

e) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

f) Déterminer la limite de la suite $(nI_n)_{n\geq 1}$. On pourra déduire des questions précédentes un encadrement judicieux de I_n.

8.6 Complément : intégrales de Wallis

Le calcul des *intégrales de Wallis*, est un passage quasi-obligé en première année post-bac ; le résultat a joué historiquement un rôle important, que la présentation actuelle ne permet pas de deviner immédiatement.

Pour n dans $\mathbb{N}$, on pose :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n\ \mathrm{d}t.$$

Ces intégrales se retrouvent dans plusieurs contextes. Nous allons exprimer W_n en fonction de n. On remarque d'abord que :

$$W_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad W_1 = 1.$$

L'étape essentielle du calcul est l'obtention d'une relation entre W_{n+2} et W_n. Cette relation s'obtient via une intégration par parties. On écrit :

$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos t \times (\cos t)^{n+1}\ \mathrm{d}t.$$

Posons donc, pour t dans $[0, \pi/2]$:

$$u(t) = (\cos t)^{n+1}, \qquad v(t) = \sin t$$

de sorte que :

$$u'(t) = -(n+1)\sin t\,(\cos t)^n\,, \qquad v'(t) = \cos t.$$

Puisque :

$$v(0) = u(\pi/2) = 0,$$

on a :

$$\int_0^{\pi/2} u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{\pi/2} u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire :

$$W_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} (\sin t)^2\ (\cos t)^n\ \mathrm{d}t.$$

En écrivant

$$\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t),$$

il vient :

$$W_{n+2} = (n+1)\,(W_n - W_{n+2})\,.$$

Autrement dit :

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\,W_n.$$

Par conséquent :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad W_{2k} = \frac{(2k-1).(2k-3).\ldots.3.1}{(2k)(2k-2).\ldots.4.2} \times \frac{\pi}{2},$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad W_{2k+1} = \frac{(2k).(2k-2).\ldots.4.2}{(2k+1).(2k-1).\ldots.3}.$$

On peut écrire ces produits au moyen de factorielles (exemple 2, **2.4**).

On a déjà calculé quelques « produits infinis » à l'aide de moyens purement algébriques (télescopages) dans les exercices 48 (**2.4**) et 115 (**5.2**). L'exercice ci-après établit une relation plus profonde obtenue par Wallis (1655).

Exercice 248 (④ Le produit de Wallis $*$)**.** *a) Montrer, pour n dans $\mathbb{N}$:*

$$W_{n+1} \leq W_n.$$

b) En utilisant la relation de récurrence obtenue dans l'exemple 3 ci-dessus, déduire de a) :

$$\frac{n+1}{n+2}\,W_n \leq W_{n+1}.$$

c) Déterminer la limite de $\dfrac{W_{n+1}}{W_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

d) Conclure que :

$$\left(\frac{2.4.6.\ldots.(2k)}{3.5.7.\ldots.(2k-1)}\right)^2 \times \frac{1}{2k+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2},$$

puis que :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\pi} \quad \textit{et que} \quad \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(2k+1)^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}.$$

Du produit de Wallis, on déduit le comportement asymptotique précis du $\binom{2n}{n}$, à comparer avec l'encadrement obtenu dans l'exercice de **3.1**, très utile dans certaines questions de probabilités.

Exercice 249 (③ Comportement asymptotique de $\binom{2n}{n}$ $*$)**.** *Déduire de l'exercice précédent la relation*

$$\sqrt{n}\,\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Remarques

1. *D'où vient la formule de Wallis ?*

   Le contexte du travail de Wallis mérite d'être mentionné. Son point de départ est l'expression intégrale de l'aire d'un quart de cercle de rayon 1 :

   $$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

   Wallis calcule d'abord, pour p et q dans $\mathbb{N}^*$, l'intégrale

   $$W(p,q) = \int_0^1 \left(1-x^{1/p}\right)^q\,\mathrm{d}x$$

   et obtient

   $$W(p,q) = \frac{p!\,q!}{(p+q)!} = \frac{p}{p+q}W(p-1,q).$$

   Il « interpole » ensuite cette relation de récurrence au cas où p et q sont des demi-entiers, ce qui lui permet d'exprimer

   $$W\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

   en fonction de $W\left(p+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ pour tout entier naturel p. Un encadrement équivalent en substance aux résultats des questions a) et b) et un passage à la limite le conduisent alors à la dernière relation de l'exercice.

   Le *théorème du changement de variable* étudié en première année post-bac montre que

   $$W_n = W\left(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2}\right),$$

   ce qui fait le lien avec l'approche de Wallis.

2. *Lien avec les coefficients binomiaux*

   On a :

   $$\forall (p,q)\in\mathbb{N}^2,\qquad W(p,q) = \frac{1}{\binom{p+q}{p}}.$$

   Les calculs de Wallis peuvent donc s'interpréter comme une *extrapolation des coefficients binomiaux* à des demi-entiers. Ce sera le point de départ de Newton pour l'étude de la « série du binôme ».

8.7 Complément : développement en série de l'exponentielle

Soit x dans $\mathbb{R}$. Nous allons établir la formule :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x.$$

La notion de *développement d'une fonction en série entière*, étudiée en deuxième année post-bac, inscrira cette formule dans un contexte général.

Étape 1. Pour n dans $\mathbb{N}$, montrons la propriété $\mathcal{P}_n$:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, e^t \,\mathrm{d}t.$$

On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 0$, on écrit :

$$\int_0^x e^t \,\mathrm{d}t = \left[e^t\right]_0^x = e^x - 1,$$

ce qui établit $\mathcal{P}_0$.

Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie, c'est-à-dire :

$$(1) \qquad e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, e^t \,\mathrm{d}t.$$

Posons, pour t dans $\mathbb{R}$:

$$u(t) = -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad v(t) = e^t.$$

On a alors, pour t dans $\mathbb{R}$:

$$u'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}, \qquad v't) = e^t.$$

On écrit la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^x u'(t)\; v(t) \,\mathrm{d}t = \left[u(t)\, v(t)\right]_0^x - \int_0^x u(t)\, v'(t) \,\mathrm{d}t.$$

Comme u s'annule en x, on a :

$$\left[u(t)\, v(t)\right]_0^x = -u(0)\, v(0) = -\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$(2) \qquad \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, e^t \,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\, e^t \,\mathrm{d}t.$$

En combinant (1) et (2), on obtient

$$e^x = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\, e^t \,\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire $\mathcal{P}_{n+1}$.

Étape 2. Posons donc, pour n dans $\mathbb{N}$:

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, e^t \,\mathrm{d}t.$$

Il nous suffit, pour conclure, d'établir la relation :

$$R_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Supposons $x \geq 0$. La fonction exp est majorée par e^x sur $[0, x]$. Comme

$$\forall t \in [0, x], \qquad 0 \leq (x-t)^n,$$

on a :

$$\forall t \in [0, x], \qquad 0 \leq \frac{(x-t)^n}{n!}\, e^t \leq \frac{(x-t)^n}{n!}\, e^x.$$

En intégrant cet encadrement sur $[0, x]$, il vient

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, e^x.$$

Le majorant tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ grâce au théorème 3 de **5.5**, ce qui amène la conclusion. Notons que, si $0 \leq x \leq 1$, la majoration

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

rend la conclusion immédiate.

Pour $x \leq 0$, le raisonnement est analogue, mais il faut tenir compte du fait que les bornes sont « dans le mauvais ordre ». Puisque exp est cette fois majorée par 1 sur $[0, x]$, on aboutit à

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exercice 250 (②)**.** *Compléter les détails de la preuve du cas $x \leq 0$.*

L'exercice suivant, plus théorique, établit l'irrationnalité du nombre e.

Exercice 251 (③ Irrationalité de e)**.** *Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose*

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier l'encadrement :

$$0 < e - u_n < \frac{e}{(n+1)!}.$$

b) On raisonne par l'absurde et on suppose e rationnel. On peut donc écrire :

$$e = \frac{p}{q}, \qquad (p, q) \in \mathbb{N}^{*2}.$$

Vérifier que, pour $n \geq q$, le réel

$$n!\,(e - u_n)$$

est un entier appartenant à $\left]0, \dfrac{e}{n+1}\right[$*. Obtenir alors une contradiction.*

La démonstration précédente est plus sophistiquée que celle de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Elle a été découverte par Fourier en 1815. [41] Les preuves d'irrationalité sont en fait souvent délicates. Ainsi, le nombre π est irrationnel, mais les démonstration de ce résultat connues actuellement sont sensiblement plus compliquées que celle de l'exercice précédent.

La première étape de la preuve du développement en série entière de exp se généralise en la *formule de Taylor avec reste intégral*, qui est un résultat important de première année post-bac.

Exercice 252 (④ Formule de Taylor avec reste intégral $*$)**.** *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées de tous ordres. Montrer que, pour n dans $\mathbb{N}$, on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t.$$

Exercice 253 (④ Une suite qui converge vers $\ln(2)$)**.** *Soit n dans $\mathbb{N}$.*

a) Montrer que, pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, t^k = \frac{1}{1+t} + \frac{(-1)^n t^{n+1}}{1+t}.$$

b) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\, \mathrm{d}t.$$

c) Montrer que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{n+2}.$$

d) Conclure :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2).$$

e) Plus généralement, montrer que, si $0 \leq x \leq 1$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1+x).$$

Donner une estimation de la « vitesse de convergence », c'est-à-dire de l'erreur :

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \right|.$$

f) Étendre ce résultat au cas $-1 < x \leq 0$.

Remarque *Calcul des logarithmes*

Le résultat de la question *e)* a été utilisé aux débuts du calcul infinitésimal pour calculer des valeurs approchées des logarithmes. Il montre que la vitesse de convergence de la suite considérée est d'autant plus grande que x est proche de 0. Ainsi, pour calculer $\ln(2)$, utiliser la formule vue

41. L'irrationalité de e a été démontrée par Euler en 1737.

en *d)* est maladroit : la convergence est très lente, « en $\frac{1}{n}$ », de sorte qu'il faut calculer environ 100 termes de la suite pour avoir deux chiffres significatifs. On contourne cette difficulté en écrivant $\ln(2)$ à l'aide de logarithmes de nombres proches de 1. Première idée :

$$\ln(2) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

Mais il est encore plus judicieux d'observer, comme l'a fait Newton, que

$$2 = \frac{1,2^2}{0,9 \times 0,8},$$

d'où :

$$\ln(2) = 2\ln(1,2) - \ln(0,9) - \ln(0,8).$$

Puisque les trois nombres réels $0,8$, $0,9$ et $1,2$ sont proches de 1, les convergences correspondantes sont très rapides.

Exercice 254 (④ Série de Grégory-Leibniz pour π)**.** *a) Montrer que*

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \int_0^{\tan(x)} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = x.$$

En particulier :

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

b) Pour n dans $\mathbb{N}$, établir :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

c) Conclure :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}.$$ [42]

Remarque *Calcul de π*

La formule précédente a été découverte indépendamment par Gregory et Leibniz (vers 1670). Les remarques faites après l'exercice précédent à propos du calcul de $\ln(2)$ s'appliquent : la convergence de la suite de la question *c)* est trop lente pour se prêter à un calcul efficace de π. Pour pallier cet inconvénient, on peut utiliser une stratégie analogue à celle expliquée ci-dessus pour $\ln(2)$ en utilisant la fonction Arctan (définie en première année post-bac) et les « formules de Machin ».

8.8 Complément : séries

Le paragraphe précédent appelle naturellement la notion de série, que vous retrouverez en première année post-bac. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. Pour n dans $\mathbb{N}$, posons

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

42. Cette démonstration passablement parachutée devient bien plus naturelle en utilisant la fonction Arctan.

Si la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ converge vers un réel S, il est naturel de poser

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

On dit que *la série de terme général u_n est convergente et que sa somme est S.*

On a rencontré plusieurs exemples dans le texte, notamment dans les exercices. Dans le paragraphe **2.2** :

$$\forall r \in]-1,1[, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1}{1-r}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} k r^k = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

Dans le paragraphe **2.3** :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}.$$

Dans le paragraphe **8.7** :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x), \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Ces formules n'ont pas le même degré de difficulté. On trouvera un exemple sensiblement plus profond et une discussion dans le paragraphe **8.10**.

Exercice 255 (③)**.** *La suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$ est définie en* **1.3**. *Montrer que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_n}{2^n} = 2.$$

Exercice 256 (③)**.** *Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$,*

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$ [43]

Exercice 257 (④ Développement en série entière des fonctions sin et cos $*$)**.** *Pour x dans $\mathbb{R}$, démontrer les formules :*

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k}, \qquad \sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}.$$

43. Comme $x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$ est une bijection de $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, on obtient ainsi une expression de $\ln(y)$ comme somme d'une série pour tout $y \in \mathbb{R}^{+*}$.

8.9 Complément : méthode des rectangles et estimation de sommes

La méthode des rectangles est une technique très utile pour estimer certaines sommes dont on ne connaît pas d'expression simple.

L'encadrement fondamental

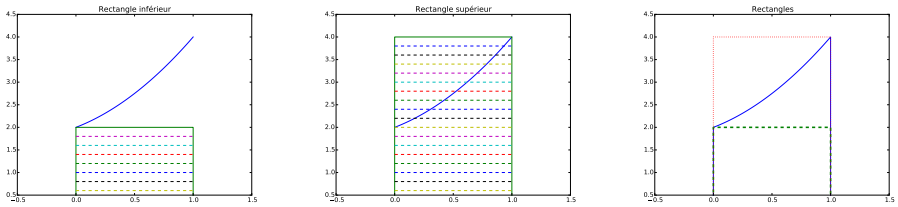
Le point de départ est la remarque suivante. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, f une fonction continue et croissante de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$\forall t \in [a, b], \qquad f(a) \leq f(t) \leq f(b),$$

d'où, en intégrant sur $[a, b]$ par rapport à la variable t :

$$(1) \qquad (b-a)f(a) \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq (b-a)f(b).$$

Si f est positive (ce qui est le cas le plus fréquent d'application), l'inégalité précédente traduit le fait que l'aire limitée par le graphe de f et l'axe des abscisses est comprise entre l'aire du petit rectangle de sommets $(a, 0), (a, f(a)), (b, f(a)), (b, 0)$ et du grand rectangle de sommets $(a, 0), (a, f(b)), (b, f(b)), (b, 0)$. Cette reformulation, visuellement évidente, est la bonne façon de comprendre ce résultat. Le lecteur est prié de faire systématiquement un dessin.



Si f est décroissante sur $[a, b]$, on a de même

$$(1') \qquad (b-a)f(b) \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq (b-a)f(a).$$

On laisse au lecteur le soin de faire le dessin correspondant.

Estimation de sommes

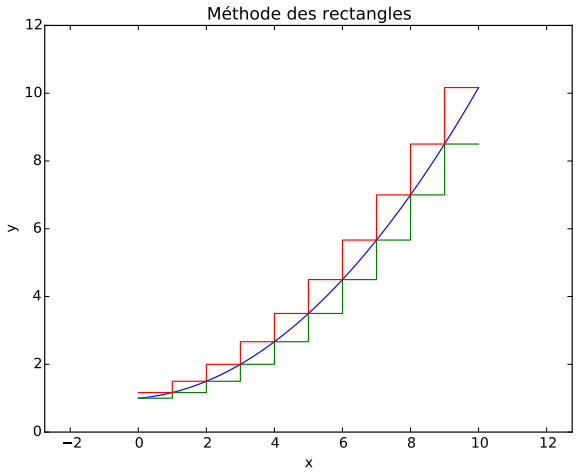
Dans les applications, on considère une fonction f continue et croissante de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on cherche à estimer la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k+1),$$

encadrement illustré par la figure ci-après.



En sommant pour k dans $\{1, \dots, n-1\}$, il vient :

$$S_n - f(n) \leq \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t \leq S_n - f(1).$$

Ainsi :

$$(2) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(1) \leq S_n \leq \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(n).$$

Il est inutile d'apprendre cet encadrement ; en revanche, comprendre la méthode (qui se résume au dessin) est profitable en vue de l'enseignement supérieur. Si le minorant et le majorant de (2) ne diffèrent pas trop, $\displaystyle\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t$ est une bonne approximation de S_n.

Si f est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$, on établit de même l'encadrement

$$(2') \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(n) \leq S_n \leq \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(1).$$

L'intérêt de la méthode vient du fait que l'on dispose de beaucoup plus de techniques pour calculer des intégrales que pour calculer des sommes : outre les primitives usuelles et l'intégration par parties, vous verrez en première année post-bac les méthodes fondées sur le *changement de variable*, qui n'ont pas d'analogue discret.

Exemples

1. $(*)$ *Estimation des nombres harmoniques* H_n
   Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f(x) = \frac{1}{x}.$$

   Le nombre harmonique H_n, défini dans l'exemple 5 de **2.2**, n'est autre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$. En appliquant ce qui précède à la fonction décroissante f, il vient :

$$\ln n + \frac{1}{n} \leq H_n \leq \ln n + 1.$$

En particulier :

$$(3) \qquad \ln n \leq H_n \leq \ln n + 1.$$

L'encadrement (3) montre que $(H_n)_{n\geq 1}$ tend vers $+\infty$ et, surtout, obtient une estimation de la « vitesse de divergence » H_n tend vers $+\infty$ « à peu près comme $\ln(n)$ ». Cette divergence est très lente : H_{10^6} vaut environ $14,4$.

2. $(*)$ *Estimation de* $n!$

On remarque que

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k).$$

On peut donc encadrer $\ln(n!)$ en appliquant la méthode des rectangles à la fonction croissante ln. On obtient :

$$\int_1^n \ln(t)\,\mathrm{d}t \leq \ln(n!) \leq \int_1^n \ln(t)\,\mathrm{d}t + \ln(n).$$

Or, on a vu (**8.4**, exemple 2) que :

$$\int_1^n \ln(t)\,\mathrm{d}t = n\ln(n) - n + 1.$$

Il vient donc :

$$n\ln(n) - n + 1 \leq \ln(n!) \leq n\ln(n) - n + \ln(n) + 1.$$

Puisque exp est croissante, on en déduit :

$$(4) \qquad e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq ne\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Cet encadrement est assez précis : le minorant et le majorant diffèrent d'un facteur multiplicatif n, négligeable devant $\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Le nombre de chiffres de l'écriture de l'entier m de $\mathbb{N}^*$ en base 10 est $\lfloor \log_{10}(m) \rfloor + 1$. L'encadrement précédent donne un moyen d'estimer le nombre de chiffres de $n!$. À titre indicatif, $60!$ a 82 chiffres. Il est généralement considéré que le nombre d'atomes dans l'univers est majoré par 10^{85}...

Citons pour conclure la remarquable *formule de Stirling* :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n},$$

où le symbole $\sim$ signifie que le quotient des deux termes tend vers 1. Cette relation, qui raffine l'encadrement (4), joue un rôle important dans de nombreuses questions, notamment en probabilités. Sa démonstration est accessible en première année post-bac. [44]

Exercice 258 (②). *Déduire de (4) un encadrement du nombre de chiffres de* $100!$.

44. Elle implique le résultat de l'exercice 249.

Exercice 259 (③ Estimation de $\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$ pour $\alpha > 0$ $*$)**.** *Soit α dans $\mathbb{R}^{+*}$. On pose :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha.$$

Encadrer S_n par la méthode des rectangles et en déduire que

$$\frac{S_n}{n^{\alpha+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha+1}.$$

Ainsi, (S_n) tend vers $+\infty$ « à peu près comme $\dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ ». Si α est un entier, ce résultat est en accord avec la remarque suivant l'exercice 47 de **2.3**.

Exercice 260 (④ Convergence des séries de Riemann $*$)**.** *Soit $\alpha \in]1, +\infty[$. On pose :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}.$$

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

b) Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle

$$\left[\frac{1}{\alpha-1}, \frac{\alpha}{\alpha-1}\right].$$

En utilisant le vocabulaire de l'exercice précédent : la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge.

c) En utilisant l'exemple 1 ou une comparaison somme-intégrale, montrer que, si $\alpha \in]0, 1]$,

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Remarque *Les nombres $\zeta(\alpha)$*

L'exercice précédent montre que la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. Pour $\alpha \in]1, +\infty[$, on note $\zeta(\alpha)$ sa somme :

$$\forall \alpha \in]1, +\infty[, \qquad \zeta(\alpha) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Vous rencontrerez certainement dans la suite de vos études la fonction ainsi définie, appelée « *fonction ζ (zeta) de Riemann* ». Euler a établi les très belles formules :

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \ldots, \quad \zeta(12) = \frac{691\pi^{12}}{6825 \times 93555}$$

et a montré, plus généralement, que pour p dans $\mathbb{N}^*$, $\zeta(2p)$ est de la forme $\pi^{2p} r_p$ où r_p est un rationnel. Le problème proposé dans le paragraphe suivant établit la première de ces égalités.

Exercice 261 (④). *On pose, pour $n \geq 2$ entier, $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ \ln(k)}$. Encadrer S_n et en déduire que*

$$\frac{S_n}{\ln(\ln(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Exercice 262 (④ Un résultat général de comparaison somme-intégrale). *a) On suppose f croissante sur $[1, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. Établir l'implication*

$$\frac{f(n)}{\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sum_{k=1}^{n} f(k)}{\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

b) On prend $f = \exp$. Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \qquad \textit{et} \qquad \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Le résultat de a) s'applique-t-il ?

L'exercice ci-après précise le comportement de la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ des nombres harmoniques.

Exercice 263 (③ Constante d'Euler $*$). *Montrer que la suite $(H_n - \ln(n))_{n\geq 1}$ est décroissante. En déduire que cette suite est convergente.*

La limite de la suite précédente, appelée *constante d'Euler* et traditionnellement notée γ, est conjecturée irrationnelle depuis Euler. Une démonstration semble hors de portée pour l'instant.

8.10 Problème : un premier calcul de $\zeta(2)$

En 1644, Mengoli a posé la question de la valeur de la somme.

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Le calcul de $\zeta(2)$ est beaucoup plus difficile que celui des sommes des séries mentionnées en **8.8**.[45] En effet, il n'existe aucune identité donnant une expression simple pour la somme

$$(1) \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

J. Bernoulli s'est intéressé vers 1690 à la question de Mengoli et l'a popularisée, d'où le nom de « problème de Bâle », ville natale de Bernoulli. Le problème de Bâle demandait des idées tout à fait nouvelles. Il a été résolu en 1735 par Euler.

Comment Euler a-t-il procédé ? Son point de départ a été un calcul numérique (approché) de $\zeta(2)$. Un tel calcul ne va pas de soi, car la suite des sommes partielles (1) converge lentement. En gros, la différence

$$\zeta(2) - S_n$$

45. Il est d'ailleurs quelque peu miraculeux que cette somme soit simplement reliée à la constante π.

tend vers 0 « comme $\dfrac{1}{n}$ », de sorte qu'il est nécessaire, à peu de choses près, de calculer S_{1000} pour disposer de 3 chiffres de $\zeta(2)$. Il faut donc « accélérer la convergence », i.e. trouver une suite convergeant plus rapidement vers $\zeta(2)$. Euler a construit une telle suite.[46] L'accélération de convergence a conduit Euler à une excellente valeur approchée de $\zeta(2)$, qui lui a permis de conjecturer la formule :

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}. \tag{2}$$

Il a ensuite donné plusieurs démonstrations de cette égalité. Toutes ne sont pas correctes du point de vue des standards de rigueur actuels, mais toutes peuvent être corrigées de manière à être rendues intégralement satisfaisantes.

Le but du problème ci-après est d'établir (2). La démonstration, qui semble sortir du chapeau, est en fait une adaptation élémentaire d'une démonstration fondée sur la théorie des séries de Fourier.[47] Le cœur en est l'expression intégrale de S_n obtenue dans la question 3. Le lecteur trouvera une autre démonstration de (2) en **10.9**.

Problème 1. *(⑤ Calcul de $\zeta(2)$)*

1. a) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, calculer :

$$\int_0^\pi t\cos(nt)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^\pi t^2\cos(nt)\,\mathrm{d}t.$$

b) Déterminer deux constantes réelles a et b telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_0^\pi \left(at^2+bt\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}.$$

2. Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et t dans $\mathbb{R}$, soit :

$$C_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kt).$$

Montrer que, pour n dans $\mathbb{N}^*$ et t dans $\mathbb{R}$ non multiple entier de 2π :

$$C_n(t) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}.$$

3. Déduire de ce qui précède que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi \varphi(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\,\mathrm{d}t$$

où φ est une fonction définie et continue sur $[0,\pi]$ que l'on précisera.

4. On admet que φ est dérivable sur $[0,\pi]$ et que sa dérivée est continue.[48] *Montrer, en utilisant l'exercice 243 de* **8.4** *(lemme de Riemann-Lebesgue), que*

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

46. On a rencontré une situation proche dans les considérations qui suivent l'exercice 253 de **8.7** (calcul approché de ln(2) par Newton).

47. Fourier a découvert les séries qui portent son nom dans la première décennie du dix-neuvième siècle, donc longtemps après le travail d'Euler.

48. Une démonstration niveau lycée est possible, mais laborieuse et peu éclairante.

9 Probabilités

Les probabilités sont une partie des mathématiques dont l'enseignement pose des problèmes spécifiques. Il y a au moins deux raisons à cette situation.

- Les probabilités sont nées des jeux de hasard et entretiennent des rapports étroits avec l'ensemble des sciences. Leur ancrage dans le « réel » est donc très fort.

- Il y a un hiatus considérable entre le point de départ concret de beaucoup de questions probabilistes et la sophistication de l'axiomatique nécessaire.

Au niveau du lycée, on se limite à des « probabilités finies ». Une partie de l'apprentissage réside dans la modélisation de situations « concrètes ». À un premier niveau, cette modélisation consiste à se donner d'une part un *univers* qui est, grossièrement dit, l'ensemble, supposé fini, de toutes les éventualités possibles, dont les sous-ensembles sont appelés *événements*, d'autre part un moyen de calculer les probabilités de ces événements, i.e. une probabilité sur l'univers. [49]

Les notions d'univers, d'événement et de probabilité ne sont pas suffisamment souples pour conjuguer modélisation efficace, intuition et précision mathématique. Le second niveau de modélisation repose sur la notion fondamentale de *variable aléatoire*. Il s'agit d'une formalisation de l'idée intuitive de résultat d'une expérience aléatoire : à chaque élément ω de l'univers Ω, c'est-à-dire à chaque « histoire possible », on associe un élément $X(\omega)$ de l'ensemble E des résultats de l'expérience. Une variable aléatoire X n'est connue que par sa loi, c'est-à-dire par la donnée des probabilités $\mathbf{P}(X \in A)$ où A décrit l'ensemble des parties de E. Une modélisation probabiliste (finie) consiste en la donnée d'une famille de variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ définies sur un univers, dont on connaît la « loi jointe ».

Nous avons mélangé dans ce chapitre exercices de modélisation et exercices plus conceptuels, de manière à faire interagir significativement les probabilités avec les chapitres précédents. Nous serons ainsi amenés à utiliser, outre les résultats classiques du cours d'analyse de terminale, les faits suivants (liste non exhaustive) :

- le protocole d'étude des suites arithmético-géométriques (exercice 3, **1.2**) ;
- les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (exercice 11, **1.3**)
- l'inégalité de Cauchy-Schwarz vue en **3.4** ;
- la relation suivante, établie en **5.2**, qui interviendra très souvent :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x ;$$

- le comportement asymptotique de $\binom{2n}{n}$ (exercice 249, **8.6**) :

$$\sqrt{n}\,\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Nous ne reprenons les notions fondamentales (espaces probabilisés, événements indépendants, variables aléatoires) que sous forme d'exercices (paragraphe **9.1**). D'autre part, pour ne pas alourdir le chapitre, nous n'abordons pas la notion de variance et les inégalités de concentration.

49. Nous sortirons très marginalement du cadre des univers finis dans certains exercices.

9.1 Exercices introductifs

Les exercices ci-après sont de plusieurs sortes. Les premiers utilisent des modélisations probabilistes élémentaires, ne faisant pas a priori usage des variables aléatoires. Ces modélisations sous-entendent souvent des hypothèses d'indépendance et/ou d'équiprobabilité..

Exercice 264 (①). *On lance deux dés non pipés. Est-il plus probable que la somme soit égale à* 9 *ou à* 10 *?*

Exercice 265 (①). *On lance six dés non pipés. Quelle est la probabilité d'obtenir tous les nombres de* 1 *à* 6 *?*

Exercice 266 (① Tout ce qui est possible finit par arriver). *On lance un dé non pipé. On répète n fois l'opération, les lancers successifs étant supposés indépendants. Quelle est la probabilité p_n pour que l'on obtienne au moins un* 6 *? Déterminer la limite de $(p_n)_{n\geq 1}$.*

Exercice 267 (② Problème posé à Pascal par le chevalier de Méré). *a) On considère un dé non pipé. La probabilité qu'en* 4 *lancers, le dé amène au moins un* 6 *est-elle supérieure à* $\frac{1}{2}$ *?*

b) On considère deux dés non pipés. La probabilité qu'en 24 *lancers, les dés amènent au moins un double* 6 *est-elle supérieure à* $\frac{1}{2}$ *?*

Exercice 268 (③ Généralisation du précédent). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n dés non pipés, que l'on jette simultanément 4.6^{n-1} fois.*

a) Déterminer la probabilité p_n d'obtenir au moins une fois n six.

b) Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 269 (③). *On lance trois dés non pipés. Montrer que la probabilité d'amener un total inférieur ou égal à* 10 *est* $\frac{1}{2}$. *On essaiera de donner un argument ne nécessitant aucun calcul.*

Exercice 270 (②). *Un joueur de tennis A en affronte deux autres, B et C. On suppose que C est meilleur que B. Le joueur A gagne s'il gagne au moins deux matchs consécutifs. Quel est l'ordre qui maximise sa chance de gagner entre BCB et CBC ?*

Exercice 271 (②). *Un jury comprend trois membres A, B, C. Les deux premiers prennent une décision juste avec probabilité p, le troisième avec probabilité* $\frac{1}{2}$. *Quelle est la probabilité qu'une décision juste soit prise en appliquant la règle de la majorité ?*

Exercice 272 (②). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient* 10 *boules noires et n boules blanches. Un joueur tire* 20 *fois successivement et avec remise une boule de l'urne, les tirages étant indépendants. Quelle est la probabilité p_n d'obtenir au moins une boule blanche au cours de ces* 20 *tirages. Quels sont les n tels que $p_n \geq \frac{1}{2}$?*

Exercice 273 (③ Transmission d'un message)**.** *Un message binaire est transmis à travers des canaux successifs. La probabilité que le message soit transmis correctement d'un opérateur à un autre est p, avec $0 < p < 1$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit π_n la probabilité pour que le n-ième opérateur reçoive un message correct. On a donc $\pi_1 = 1$.*

a) Justifier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la formule

$$\pi_{n+1} = p\pi_n + (1-p)(1-\pi_n).$$

*b) En utilisant le protocole d'étude des suites arithmético-géométriques (***1.2***, exercice 3), exprimer π_n en fonction de p et n. Déterminer la limite de $(\pi_n)_{n\geq 1}$.*

Exercice 274 (③ Problème des anniversaires)**.** *On considère une assemblée de m personnes ; quelle est la probabilité que deux d'entre elles aient même anniversaire (on ne tient pas compte des années bissextiles) ? Pour quels m cette probabilité est-elle supérieure à $\dfrac{1}{2}$?*

Exercice 275 (③)**.** *Soient m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que $m \leq n$. On se donne une population de n personnes dans laquelle chaque personne admet exactement m amis. On choisit deux individus. Quelle est la probabilité qu'ils aient au moins un ami commun ?*

Application numérique : $n = 10^5, m = 200$.

Exercice 276 (③ Principe de Hardy-Weinberg)**.** *Un gène possède deux allèles notés a et A. Les trois génotypes possibles sont donc aa, aA, AA, avec des probabilités respectives $x_1, 2y_1, z_1$. Chaque allèle a et A a une probabilité $\dfrac{1}{2}$ d'être transmis. Les parents sont sélectionnés indépendamment.*

a) On note $x_2, 2y_2$ et z_2 les probabilités respectives des génotypes aa, aA, AA à la seconde génération. Montrer que

$$x_2 = (x_1 + y_1)^2, \quad y_2 = (x_1 + y_{-1})(y_1 + z_1), \quad z_2 = (y_1 + z_1)^2.$$

b) Montrer que la probabilité de chaque génotype est constante à partir de la seconde génération, c'est-à-dire que, si on note $x_n, 2y_n$ et z_n les probabilités respectives des génotypes aa, aA, AA à la seconde génération, on a, pour tout entier $n \geq 2$,

$$x_n = x_2, \quad y_n = y_2, \quad z_n = z_2.$$

Les exercices suivants portent sur des problèmes élémentaires de conditionnement. L'outil fondamental est ici la *formule de Bayes*.

Exercice 277 (② QCM)**.** *Lors d'un examen, un étudiant a le choix entre m réponses. Il connaît la réponse à la question avec probabilité p. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard et de façon équiprobable la réponse parmi les m possibles. Sachant que l'étudiant a bien répondu, quelle est la probabilité qu'il ait connu la réponse ?*

Exercice 278 (② Faux positifs)**.** *Un test médical est réalisé sur une population contenant une proportion p de malades. Le test n'étant pas parfait, il est positif avec probabilité p_1 (proche de 1) sur les malades et p_2 (proche de 0) sur les individus sains. Déterminer la probabilité qu'un individu sur lequel le test est positif soit effectivement malade.*

Exercice 279 (④ Modèle des urnes de Laplace)**.** *a) Soient $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $m+1$ urnes $U_0, \dots, U_m$ telles que, pour tout $k \in \{0, \dots, m\}$, U_k contienne k boules bleues et $m-k$ boules rouges. Choisissons au hasard, avec équiprobabilité, une des urnes et effectuons-y $(n+1)$ tirages avec remise. Pour $1 \leq k \leq n+1$, notons $A_{k,m}$ l'événement « pour chacun des k premiers tirages, on a obtenu une boule bleue ». Exprimer $p_{n,m} = \mathbf{P}_(A_{n+1,m}|A_{n,m})$.*

*b) On fixe n. Déterminer la limite de $(p_{m,n})_{m\geq 1}$ lorsque m tend vers $+\infty$. On pourra utiliser la méthode des rectangles (**8.9**).*

Exercice 280 (⑤ Jeu de Monty Hall)**.** *Le jeu de Monty Hall se présente de la façon suivante. Trois portes sont fermées ; derrière l'une d'entre elles se trouve une voiture, derrière chacune des deux autres un porte-clés. Le candidat se place devant l'une des portes. Le présentateur, qui sait quelle est la porte cachant la voiture, ouvre alors l'une des deux portes non choisies par le candidat, derrière laquelle, bien sûr, se trouve un porte-clés. Que doit faire le candidat : garder son choix ou le modifier ?*

Les exercices suivants, plus abstraits, ne mettent pas en jeu de modélisation.

Exercice 281 (①)**.** *Que dire de deux événements A et B indépendants et incompatibles ?*

Exercice 282 (②)**.** *Soient A et B deux événements de probabilités respectives $\dfrac{5}{10}$ et $\dfrac{7}{10}$. On suppose que la probabilité que A et B se produisent est $\dfrac{3}{10}$. Quelle est la probabilité que ni A ni B ne se produise ?*

Exercice 283 (③)**.** *Soient A et B deux événements. Comparer $\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$ et $\mathbf{P}(A\cup B)\,\mathbf{P}(A\cap B)$.*

Exercice 284 (④)**.** *Soient A et B deux événements avec $\mathbf{P}(B) > 0$. Montrer que*

$$|\mathbf{P}(A\cap B) - \mathbf{P}(A|B)| \leq \frac{1}{\mathbf{P}(B)} - 1, \qquad |\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A\cap B)| \leq 1 - \mathbf{P}(B).$$

En déduire que

$$|\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A|B)| \leq \frac{1}{\mathbf{P}(B)} - \mathbf{P}(B).$$ [50]

Exercice 285 (③)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne n événements indépendants de probabilités respectives $p_1, \dots, p_n$.*

a) Calculer la probabilité π_n qu'aucun de ces événements ne se réalise.

b) Montrer que

$$\pi_n \leq \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} p_i\right).$$

Exercice 286 (③)**.** *Soit p un élément de $]0,1[$. Une expérience aléatoire réussit avec la probabilité p. On la répète une infinité de fois, avec indépendance. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité que l'expérience ait réussi au moins une fois lors des n premières répétitions.*

a) On note N_p le plus petit n tel que $p_n \geq \dfrac{1}{2}$. Exprimer N_p.

b) Quelle est la limite de pN_p lorsque p tend vers 0 ?

50. On notera que ce majorant est près de 0 quand $\mathbf{P}(B)$ est près de 1, ce qui n'est pas surprenant.

Exercice 287 (③). *Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Une expérience aléatoire peut produire n résultats distincts notés $1, \dots, n$, de probabilités respectives $p_1, \dots, p_n$. On la répète deux fois de manière indépendante. On note p la probabilité que les deux résultats soient égaux.*

a) Exprimer p en fonction des p_i, $1 \leq i \leq n$.

b) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz de **3.4**, *montrer que $p \geq \dfrac{1}{n}$. Caractériser le cas d'égalité.*

La notion d'espace probabilisé n'est pas suffisante pour formuler commodément un grand nombre de problèmes. Il faut lui ajouter celle de variable aléatoire, i.e. de fonction numérique définie sur l'univers, qui formalise l'idée de « résultat d'une expérience aléatoire ». Quoique les variables aléatoires soient définies formellement comme des fonctions, c'est plutôt l'idée précédente qui guide leur emploi, ce qui se reflète dans les notations spécifiques de la théorie des probabilités (du type $(X = a)$, ou $(X \in A)$)

Un événement A s'identifie à sa *variable aléatoire indicatrice*, égale à 1 sur A et à 0 sur le complémentaire de A dans l'univers Ω. On voit ainsi que les événements s'identifient à la classe particulière de variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1\}$, ou *variables de Bernoulli*.

Les derniers exercices concernent les variables aléatoires. Certains nécessitent une modélisation.

Exercice 288 (①). *On lance deux dés non pipés, on note X la variable aléatoire donnant la somme des deux résultats. Donner la loi de X.*

Exercice 289 (②). *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $d \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. Soit R la variable aléatoire égale au reste de la division euclidienne de X par d. Donner la loi de R.*

Exercice 290 (③). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne n variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ suivant chacune la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. On note E_n l'événement « il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $X_i = 1$ ». Déterminer la probabilité p_n de E_n. Quelle est la limite de $(p_n)_{n \geq 1}$?*

Exercice 291 (②). *a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$, $S = \max(X, Y)$. Pour $1 \leq k \leq n$, exprimer $P(S \leq k)$ en fonction de $P(X \leq k)$ et $P(Y \leq k)$. En déduire la loi de S.*

b) Expliciter la loi de S si X et Y suivent toutes deux la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

Exercice 292 (③ Loi hypergéométrique, ou tirages sans remise). *Soient n, n' et m trois éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que $n' \leq n$ et $m \leq n$, $E = \{1, \dots, n\}$ et $E' = \{1, \dots, n'\}$; du point de vue de la modélisation, E représente une population de n individus, E' une sous-population de n' individus. On choisit aléatoirement une partie F de E de cardinal m. On note X la variable aléatoire égale au cardinal de $F \cap E'$. Déterminer la loi de X.*

Exercice 293 (④ Problème des boîtes d'allumettes de Banach). *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \dots, n\}$. Un mathématicien a deux boîtes de n allumettes, une dans chaque poche. Chaque fois qu'il fume, il choisit au hasard une poche avec probabilité $\dfrac{1}{2}$, jusqu'à se rendre compte que l'une des deux boîtes est vide. On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'allumettes restant dans l'autre boîte à cet instant. Déterminer la loi de X.*

Exercice 294 (④ On ne peut pas piper un dé pour que la somme de deux lancers soit uniforme)**.** *On se donne deux dés. Pour $1 \leq i \leq 6$, on note p_i (resp. q_i) la probabilité d'obtenir i en lançant le premier dé (resp. le second). Les lancers sont supposés indépendants. On note S la variable aléatoire donnant la somme des deux lancers.*

a) Exprimer $\mathbf{P}(S=2)$ et $\mathbf{P}(S=12)$ en fonction de p_1, q_1, p_6 et q_6.

b) Exprimer $\mathbf{P}(S=7)$ en fonction de $p_1, \ldots, p_6$ et $q_1, \ldots, q_6$, puis montrer que

$$\mathbf{P}(S=7) \geq 2\sqrt{\mathbf{P}(S=2)\,\mathbf{P}(S=12)}.$$

c) Montrer que S ne suit pas la loi uniforme sur $\{2, \ldots, 12\}$. [51]

9.2 Schéma binomial

Une famille d'événements indépendants de probabilités respectives $p_1, \ldots, p_n$ est décrite par une famille $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables de Bernoulli indépendantes de paramètres respectifs $p_1, \ldots, p_n$.

Un cas particulier très important est le *schéma binomial*, encore appelé *schéma de Bernoulli*. Pour décrire n répétitions indépendantes d'une expérience ayant la probabilité p de réussir (par exemple, le lancer d'une pièce éventuellement truquée), on se donne n variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p, notées $X_1, \ldots, X_n$. On a alors les résultats suivants, où, selon l'usage, on note $q = 1 - p$.

- Si $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sont des éléments de $\{0,1\}$, dont exactement k valent 1, on a

$$(1) \qquad \mathbf{P}(X_1 = \varepsilon_1, \ldots, X_n = \varepsilon_n) = p^k\, q^{n-k}.$$

Ce résultat découle immédiatement de l'indépendance des X_i.

- Soit X le nombre de $i \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $X_i = 1$, i.e. le nombre de succès de l'expérience, c'est-à-dire

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Comme le nombre de parties de cardinal k de $\{1, \ldots, n\}$ est $\binom{n}{k}$, on déduit de (1) que

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}, \qquad \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$ [52].

Introduisons un peu de terminologie. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$, une variable aléatoire Y suit la *loi binomiale de paramètres n et p* si

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}, \qquad \mathbf{P}(Y = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Nous venons de d'établir le théorème fondamental suivant, dans lequel l'hypothèse d'indépendance est essentielle.

Théorème 9 (Sommes de n variables de Bernoulli indépendantes)**.** *La somme de n variables de Bernoulli de paramètre p indépendantes suit la loi binomiale de paramètres n et p.*

51. On trouvera une autre approche du résultat dans l'exercice 423 de **11.3**.

52. Certains cas nous sont déjà connus : ainsi, l'événement « il n'y a aucun succès », ou $(X = 0)$, n'est autre que $(X_1 = 0, \ldots, X_n = 0)$, de probabilité q^n. Noter que, si $p \neq 0$, alors $q \in [0,1[$ et $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: *tout ce qui est possible finit par arriver* !

Remarque *Une conséquence de l'argument précédent*
Comme les événements $(X = k), 0 \leq k \leq n$, forment un système complet, on obtient que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = 1.$$

Cette relation, également conséquence de la formule du binôme de **10.7**, vaut aussi pour $n = 0$.

Les exercices suivants proposent des interventions concrètes de la loi binomiale, et supposent donc une modélisation.

Exercice 295 (②)**.** *Quelle est la probabilité d'obtenir exactement* 3 *fois six en lançant* 6 *fois un dé équilibré ?*

Exercice 296 (②)**.** *Un tireur a une chance sur deux d'atteindre une cible. Quelle est la probabilité de l'atteindre au moins trois fois en dix coups ?*

Exercice 297 (②)**.** *Un comité de* 9 *personnes se réunit. Chaque participant est présent avec probabilité* $\frac{1}{2}$*. Quelle est la probabilité qu'au moins* 6 *membres soient présents ?*

Exercice 298 (②)**.** *On lance* n *fois un dé équilibré. On note* X *le nombre de* 6 *obtenu. Exprimer simplement* $\mathbf{P}(X \geq 2)$*. On demande une expression ne faisant pas intervenir le symbole* $\sum$*.*

Exercice 299 (②)**.** *Un livre de* 500 *pages contient* 50 *fautes d'impression réparties aléatoirement. Quelle est la probabilité qu'une page donnée comporte au moins deux erreurs ?*

Exercice 300 (②)**.** *Soit* $p \in]0, 1[$*. On lance une pièce pipée, ayant la probabilité* p *de donner pile. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins* 3 *piles en* 5 *lancers ? au moins* 5 *piles en* 8 *lancers ?*

Exercice 301 (③ Tirages avec remise et loi binomiale)**.** *Soient* n *et* n' *deux éléments de* $\mathbb{N}^*$ *tels que* $n' \leq n$*. On note* $E = \{1, \ldots, n\}$*,* $E' = \{1, \ldots, n'\}$*. Effectuons* n *tirages dans* E *avec remise, de sorte que chaque élément de* E *ait la probabilité* $\frac{1}{n}$ *d'être tiré et que les tirages soient indépendants. Soit* X *le nombre de tirages ayant donné un élément de* E'*. Quelle est la loi de* X *?*[53]

Exercice 302 (③)**.** *Une population de* n *élèves passe un examen constitué de deux épreuves indépendantes. La probabilité de réussite à la première (resp. deuxième) est* p_1 *(resp.* p_2*). Les deux épreuves donnent des résultats indépendants. Quelle est la loi de la variable aléatoire* X *donnant le nombre de candidats ayant réussi les deux épreuves ? On pourra écrire* X *comme somme de variables de Bernoulli indépendantes.*

53. À comparer avec l'exercice 292.

Exercice 303 (③). *Soit $p \in [0,1]$. Un système de communication comporte un certain nombre n de composants. Chaque composant fonctionne avec la probabilité p, indépendamment des autres. Le système fonctionne si au moins la moitié des composants sont opérationnels.*

a) Quelle est la loi du nombre de composants opérationnels ?

b) Si $k \in \mathbb{N}^*$, on note π_k la probabilité pour qu'un système ayant exactement $2k-1$ composants fonctionne. Exprimer $\pi_{k+1} - \pi_k$.

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. À quelle condition sur p a-t-on $\pi_{k+1} \geq \pi_k$?

Exercice 304 (③). *On reprend les notations de l'exercice précédent. On considère deux appareils, l'un ayant deux composants, l'autre quatre. On suppose que les deux appareils ont la même probabilité de fonctionner. Déterminer p, puis la probabilité commune de fonctionnement.*

Les exercices suivants sont de nature plus théorique.

Exercice 305 (③ Mode de la loi binomiale). *Soient $p \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}^*$, X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.*

a) Pour k dans $\{0,\dots,n-1\}$, donner une expression simplifiée de

$$u_k = \frac{\mathbf{P}(X=k+1)}{\mathbf{P}(X=k)}.$$

b) À quelle condition le quotient précédent est-il supérieur ou égal à 1 ?

c) Quelles sont la ou les valeurs de k maximisant $\mathbf{P}(X=k)$? Expliciter le cas $p = \frac{1}{2}$.

d) Quelle est l'allure de l'histogramme de X ?

Exercice 306 (④ Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson). *Soient $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite déléments de $\mathbb{R}^+$ convergeant vers λ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et $\frac{\lambda_n}{n}$. Montrer que*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{P}(X_n = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

On pourra utiliser la limite établie en **4.2** *et l'exercice 130 de* **5.3**.[54]

Exercice 307 (② Loi géométrique tronquée). *Soient $p \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}^*$. Une expérience a la probabilité p de réussir. On la répète n fois indépendamment. Autrement dit, on se donne n variables aléatoires indépendantes $X_1,\dots,X_n$ suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. On note T la variable aléatoire définie de la façon suivante (instant de premier succès).*

- Si l'ensemble $\{i \in \{1,\dots,n\}\ ;\ X_i = 1\}$ n'est pas vide, T est le plus petit élément de cet ensemble. Ainsi

$$(T=k) = (X_1 = \cdots = X_{k-1} = 0, X_k = 1).$$

- Sinon, on pose $T = +\infty$.

Quelle est la loi de T ?

54. Ce résultat peut être complété par des inégalités explicites, qui justifient l'*approximation de Poisson* ci-après (1837). Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p, avec p petit et $\lambda := np$ pas trop grand. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X=k)$ est proche de $e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. Ce résultat est plus parlant que l'expression définissant $\mathbf{P}(X=k)$.

Les deux exercices suivants traitent de la même question, à savoir l'apparition d'une série donnée) dans un jeu de pile ou face.

Exercice 308 (④ Tout ce qui est possible finit par arriver, suite)**.** *On joue à pile ou face avec une pièce ayant la probabilité $p \in]0,1[$ de donner pile. On se donne a et b dans $\mathbb{N}$ non tous deux nuls et une séquence S de $\ell = a + b$ éléments de $\{P, F\}$, contenant a lettres P et b lettres F.*

a) Soit m dans $\mathbb{N}^*$. On lance $m\ell$ fois la pièce. Montrer que la probabilité que la séquence S n'apparaisse pas est inférieure ou égale à $(1 - p^a q^b)^m$.

b) Soit $n \geq \ell$ un entier. On lance n fois la pièce. Montrer que la probabilité que la séquence S n'apparaisse pas est inférieure ou égale à $(1 - p^a q^b)^{\lfloor n/\ell \rfloor}$. Quelle est la limite de cette suite lorsque n tend vers $+\infty$?[55]

L'exercice ci-après donne un résultat précis pour la séquence particulière PP.

Exercice 309 (④ Deux succès consécutifs à pile ou face)**.** *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit p_n la probabilité de n'avoir jamais observé deux piles consécutifs en lançant n fois une pièce équilibrée.*

a) Calculer p_1 et p_2.

b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_{n+2} = \frac{p_{n+1}}{2} + \frac{p_n}{4}.$$

c) Résoudre l'équation $x^2 = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}$. On notera λ la racine positive, μ la racine négative.

d) En utilisant l'exercice 11 de **1.3***, déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = \frac{u_{n+1}}{2} + \frac{u_n}{4}.$$

e) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer p_n en fonction de n.

Dans les deux exercices suivants, on s'intéresse aux premiers exemples de *marches aléatoires* : une particule se déplaçant sur une droite et faisant aléatoirement un pas en avant (probabilité p) ou un pas en arrière (probabilité $1 - p := q$). Il s'agit en fait d'un modèle équivalent à celui du jeu de pile ou face infini, mais l'interprétation en termes de marche, plus visuelle, suggère d'autres questions.

Exercice 310 (④ Marches aléatoires de Bernoulli)**.** *Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que*

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \qquad \mathbf{P}(X_k = 1) = p, \quad \mathbf{P}(X_k = -1) = 1 - p := q.$$ [56]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

a) Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est à valeurs dans l'ensemble des entiers relatifs de valeur absolue bornée par n et de même parité que n.

55. Ce résultat est le *paradoxe de Borel* : un singe qui tape au hasard sur un clavier finira par taper *La Recherche du temps perdu*. En fait, même pour une séquence assez courte, le temps moyen pour observer une apparition est gigantesque, ce qui explique que ce résultat ne soit pas observable en pratique.

56. Nous sortons ici du cadre officiel, puisqu'aucun univers fini ne peut porter une telle suite $(X_k)_{k\geq 1}$. C'est pour pouvoir librement faire tendre n vers $+\infty$. Il serait possible, mais très lourd, de rédiger l'exercice dans le cadre fini.

b) On suppose n pair : $n = 2\ell$, avec $\ell \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la loi de S_n est donnée par

$$\forall j \in \{-\ell, \dots, \ell\}, \qquad \mathbf{P}(S_{2\ell} = 2j) = \binom{2\ell}{\ell + j} p^{\ell+j} q^{\ell-j}.$$

c) Les notations sont celles de b). Pour quelle valeur de p la probabilité $\mathbf{P}(S_{2\ell} = 0)$ est-elle maximale ?

d) Montrer que

$$\mathbf{P}(S_{2\ell} = 0) \leq (4pq)^{\ell}.$$

e) On suppose que $p \neq \dfrac{1}{2}$. Montrer que $4pq < 1$, puis que

$$\mathbf{P}(S_{2\ell} = 0) \underset{\ell \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 311 (⑤ Marche aléatoire de Bernoulli symétrique)**.** *On se place dans le cadre de l'exercice précédent, avec de plus $p = \dfrac{1}{2}$. Ainsi $(X_k)_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes telle que*

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \qquad \mathbf{P}(X_k = 1) = \mathbf{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

a) En utilisant l'exercice 249 de **8.6**, *montrer que*

$$\mathbf{P}(S_{2\ell} = 0) \underset{\ell \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la question précédente et l'exercice 68 de **3.1**, *montrer que*

$$\mathbf{P}(|S_{2\ell}| \leq m) \underset{\ell \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$ [57]

9.3 Espérance d'une variable aléatoire

La loi d'une variable aléatoire réelle peut être compliquée ; c'est déjà le cas pour une variable binomiale. On essaie donc d'associer à une telle variable aléatoire X des *indicateurs* numériques qui, sans donner autant d'information que la loi, donnent des renseignements intéressants sur X.

Le premier de ces indicateurs, et le seul que nous considèrerons dans ce texte, est l'*espérance* de X, qui est une moyenne pondérée de X : la valeur x_i apparaît avec la pondération $\mathbf{P}(X = x_i)$. Précisément, si X prend les valeurs $x_1, \dots, x_n$, alors

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \mathbf{P}(X = x_i).$$

Remarques

1. *Espérance de $aX + b$*
   Il est immédiat de vérifier que, si X est une variable aléatoire réelle, a et b deux nombres réels, alors
   $$\mathbf{E}(aX + b) = a\mathbf{E}(X) + b.$$

57. Ainsi, la probabilité que la marche soit près de l'origine après un temps asssez long est faible. L'étude asymptotique de $(S_n)_{n\geq 1}$ est en fait extrêmemment riche.

2. *Espérance d'une variable binomiale*
   Il est immédiat qu'une variable de Bernoulli de paramètre p a pour espérance p. On peut démontrer par le calcul qu'une variable binomiale de paramètres n et p a pour espérance np. Soit en effet X une telle variable aléatoire. Notons que, pour $1 \leq k \leq n$,

$$k\binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

   Il s'ensuit que

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k q^{n-k},$$

$$\text{i.e. que} \quad \mathbf{E}(X) = np\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}p^i q^{n-1-i},$$

   où la dernière égalité provient du changement de variable $i = k-1$.

   En appliquant la remarque de **9.2** à $n-1$ et p, on voit que

$$\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}p^i q^{n-1-i} = 1,$$

   ce qui achève la démonstration. Nous retrouverons l'espérance de la loi binomiale de manière différente un peu plus loin. Une troisième démonstration fait l'objet de l'exercice 373 de **10.7**.
3. *L'espérance comme somme sur l'univers*
   L'espérance admet également l'expression suivante

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\, P(\{\omega\}).$$ [58]

   Pour le voir, il suffit, en reprenant les notations du début du paragraphe, de regrouper dans la somme de gauche les ω telle que $X(\omega) = x_i$ pour $1 \leq i \leq n$.

   Du point de vue de la modélisation, cette nouvelle expression consiste à calculer $\mathbf{E}(X)$ directement à partir des résultats de l'expérience aléatoire produisant X, sans avoir préalablement regroupé les ω donnant un même résultat.
4. *Croissance de l'espérance*
   Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé Ω telles que, pour toute réalisation, $X \leq Y$, c'est-à-dire, formellement :

$$\forall\omega \in \Omega, \qquad X(\omega) \leq Y(\omega).$$

   La formule de l'exercice précédent permet de justifier l'ingéalité très naturelle :

$$\mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(Y).$$

Exercice 312 (①)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'espérance d'une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$, d'une variable aléatoire Y suivant la loi uniforme sur $\{1, 2, 4, \ldots, 2^n\}$.*

58. On s'autorise ici une sommation sur un ensemble fini dont les éléments ne sont pas indexés, ce que nous n'avons pas fait jusqu'à maintenant, mais ne pose pas problème.

Exercice 313 (① Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans un segment)**.** *Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$, X une variable aléatoire à valeurs dans $[a, b]$. Montrer que $\mathbf{E}(X)$ appartient à $[a, b]$.*

Exercice 314 (③ Espérance d'une variable géométrique tronquée)**.** *a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la dérivation, donner une expression simple de*

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}.$$

b) Les notations sont celles de l'exercice 307. Calculer $\mathbf{E}(T)$.

Exercice 315 (④ Urne d'Ehrenfest : nombre moyen de boules dans la première urne)**.** *On fixe un entier $a \geq 2$ et on se donne a boules numérotées de 1 à a réparties dans deux boîtes. On considère l'opération suivante. À chaque seconde à partir de l'instant 0, on choisit uniformément un entier de $[\![1, a]\!]$ et on déplace la boule portant ce numéro d'une boîte dans l'autre. On suppose que les tirages effectués à des instants distincts sont indépendants. Si $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le nombre de boules dans la première urne à l'instant n et $Y_n = X_{n+1} - X_n$.*

a) Montrer, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{E}(Y_n) = 1 - \frac{2}{a}\,\mathbf{E}(X_n) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(X_{n+1}) = \left(1 - \frac{2}{a}\right)\,\mathbf{E}(X_n) + 1.$$

*b) En utilisant le protocole d'étude des suites arithmético-géométriques (**1.2**, exercice 3), exprimer $\mathbf{E}(X_n)$ en fonction de $\mathbf{E}(X_0)$, a et n. Déterminer la limite de $(\mathbf{E}(X_n))_{n\geq 1}$. Comment expliquer ce résultat ?*[59]

Exercice 316 (③ Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$)**.** *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.*

a) Pour k dans $\mathbb{N}$, justifier la relation

$$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(X \geq k) - \mathbf{P}(X \geq k + 1).$$

b) On note n la plus grande valeur que prend X. Montrer que

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X \geq k).$$

Exercice 317 (③)**.** *On reprend les notations de l'exercice 286 et on note U_n le nombre d'expériences ayant réussi à l'instant n. Calculer $\mathbf{E}(U_n)$ et exprimer N'_p, le plus petit n tel que $\mathbf{E}(U_n) \geq \dfrac{1}{2}$. Quelle est la limite de pN'_p lorsque p tend vers 0 ?*

Exercice 318 (④ Inégalité de Markov)**.** *Soient X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que*

$$\mathbf{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbf{E}(X)}{a}.$$ [60]

59. On peut dire beaucoup plus de choses sur ce modèle, imaginé par les époux Ehrenfest au début du vingtième siècle pour réconcilier l'irréversibilité des lois de la thermodynamique et la réversibilité de celles de la mécanique.

60. Cette inégalité joue un rôle fondamental dans la théorie des probabilités.

Exercice 319 (④ Comparaison de $\mathbf{E}(X)^2$ et $\mathbf{E}(X^2)$)**.** *a) Soit X une variable aléatoire réelle. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (***3.4***), montrer que*

$$\mathbf{E}(X)^2 \leq \mathbf{E}(X^2).$$

b) Soit $x \in [-1,1]$. Montrer qu'il existe une variable aléatoire réelle X telle que

$$\mathbf{E}(X) = x \qquad et \qquad \mathbf{E}(X^2) = 1.$$

On pourra considérer les variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,1\}$.

9.4 La linéarité de l'espérance

Une propriété fondamentale en probabilités est la *linéarité de l'espérance*, qu'exprime le théorème ci-après. La démonstration se fait par récurrence sur n à partir du cas $n = 2$. Le cas $n = 2$ découle par exemple de la remarque 3 du paragraphe précédent.

Théorème 10 (Linéarité de l'espérance)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles. Alors*

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(X_i).$$

Ce théorème entraîne que, pour déterminer l'espérance de X, il suffit d'écrire X comme somme de variables aléatoires dont les espérances sont connues, ce qui ne nécessite nullement de connaître la loi de X. On l'utilise souvent en écrivant X comme somme d'indicatrices, i.e. de variables de Bernoulli. Nous donnons ci-dessous deux exemples d'applications, suivis d'exercices.

Exemples

1. *Nombre d'expériences ayant réussi*

   On se donne $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. On considère n expériences aléatoires ayant chacune la probabilité p de réussir. On note N la variable aléatoire donnant le nombre d'expériences ayant effectivement réussi. Si $1 \leq i \leq n$, soit X_i la variable de Bernoulli égale à 1 si la i-ième expérience a réussi, à 0 sinon : c'est une variable de Bernoulli de paramètre p. Or

   $$N = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

   Par suite

   $$\mathbf{E}(N) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(X_i) = np.$$

   Le résultat vaut en particulier si les X_i sont indépendantes, ce qui donne l'espérance d'une variable aléatoire binomiale. Mais l'hypothèse d'indépendance n'est en rien nécessaire.

2. *Le problème de l'ascenseur*

   Un ascenseur embarque, au rez-de-chaussée d'un immeuble, m personnes. Il dessert n étages. Sous les hypothèses d'indépendance des choix des personnes et d'équiprobabilité du choix de l'étage d'arrêt de chaque personne, quelle est l'espérance du nombre d'arrêts de l'ascenseur ? [61]

61. Version plus conceptuelle. On se donne une application aléatoire de $\{1, \ldots, m\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$ suivant la loi uniforme sur l'ensemble des n^m applications possibles. Quelle est l'espérance du cardinal de l'image ?

Si $1 \leq i \leq n$, soit X_i la variable de Bernoulli égale à 1 si l'ascenseur s'arrête à l'étage i. Le nombre d'arrêts de l'ascenseur est $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Or,

$$\mathbf{P}(X_i = 0) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m \qquad \mathbf{P}(X_i = 1) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m.$$

Donc

$$\mathbf{E}(X) = n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m\right).$$

Si $m = n$, posons $Y_n = X$, pour indiquer la dépendance en n. Alors (complément, **5.2**)

$$\frac{\mathbf{E}(Y_n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \frac{1}{e}.$$

Pour de grandes valeurs de n, l'ascenseur s'arrête a environ 63/100 des arrêts.

Exercice 320 (② Espérance d'une variable hypergéométrique)**.** *Les notations sont celles de l'exercice 292. Déduire de l'exemple 1 l'espérance de X.*

Exercice 321 (③ Marches aléatoires)**.** *Soient X une variable aléatoire, $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de X et*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

a) Exprimer $\mathbf{E}(S_n)$ en fonction de n et $\mathbf{E}(X)$.

b) Exprimer $\mathbf{E}({S_n}^2)$ en fonction de n, $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(X^2)$.

Exercice 322 (③ Marches aléatoires : concentration autour de $n\mathbf{E}(X)$)**.** *On reprend les notations de l'exercice précédent.*

a) On suppose $\mathbf{E}(X) = 0$. Montrer, en appliquant l'inégalité de Markov (exercice 318) à ${S_n}^2$ que, pour $a \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\mathbf{P}(|S_n| \geq a\sqrt{n}) \leq \frac{\mathbf{E}(X^2)}{a^2}.$$ [62]

b) On revient au cas général. En considérant $Y := X - \mathbf{E}(X)$, montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\mathbf{P}(|S_n - n\mathbf{E}(X)| \geq a\sqrt{n}) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{a^2},$$

où $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$ est la variance de X. [63]

Exercice 323 (④)**.** *On considère une assemblée de n personnes. On ignore les années bissextiles. Sous les hypothèses d'indépendance des dates d'anniversaire des personnes et d'équiprobabilité de la date de naissance de chaque personne, quelle est l'espérance du nombre de paires de personnes ayant même anniversaire ? Pour $1 \leq i < j \leq n$, on introduira la variable aléatoire de Bernoulli $X_{i,j}$ égale à 1 si les personnes i et j ont même anniversaire.*

62. Ainsi, la probabilité que $|S_n|$ soit très grand devant $\sqrt{n}$ est très faible.

63. C'est bien entendu l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. On voit que la probabilité que $|S_n - n\mathbf{E}(X)|$ soit très grand devant $\sqrt{n}$ est très faible.

Exercice 324 (④). *Une population est formée de $2n$ individus répartis en n couples. Parmi ces $2n$ individus, m choisis aléatoirement et de manière équiprobable parmi la population initiale meurent. Quel est l'espérance du nombre de couples survivants ?*[64] *Numérotant les couples de 1 à n, on introduira, si $1 \leq i \leq n$, la variable de Bernoulli X_i égale à 1 si le couple i survit.*

Exercice 325 (④). *Soit $n \geq 2$ un entier. Une entreprise suit la stratégie suivante pour recruter ses n employés. L'employé 1 fonde l'entreprise et recrute l'employé 2 ; l'un des deux employés 1 et 2 recrute l'employé 3 ; l'un des trois employés 1, 2 et 3 recrute l'employé 4 et ainsi de suite. On suppose que, si $1 \leq i \leq n-1$, chaque employé parmi $1, \ldots, i$ a la même probabilité de recruter l'employé $i+1$.*

a) Si $1 \leq i \leq n$, quelle est la probabilité que l'employé i ne recrute personne ?

b) Soit N le nombre d'employés n'ayant recruté personne. Calculer $\mathbf{E}(N)$.

Exercice 326 (④ Nombre de points fixes d'une permutation). *On se donne n boules numérotées de 1 à n, n urnes également numérotées de 1 à n. On place une boule dans chaque urne, les choix étant équiprobables. Quelle est l'espérance du nombre de boules placées dans l'urne portant leur numéro ?*[65] *Pour $1 \leq i \leq n$, on introduira la variable de Bernoulli X_i égale à 1 si la boule i est placée dans l'urne i.*

Exercice 327 (⑤ Nombre de records d'une permutation). *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, σ une permutation aléatoire de $\{1, \ldots, n\}$, suivant la loi uniforme sur l'ensemble des $n!$ permutations de $\{1, \ldots, n\}$. Pour $1 \leq i \leq n$, on dit que σ admet un record en i si $\sigma(i)$ est strictement supérieur aux $i-1$ entiers $\sigma(1), \ldots, \sigma(i-1)$.*

a) Si $1 \leq i \leq n$, soit X_i la variable indicatrice de l'événement « σ admet un record en i ». Déterminer la loi de X_i.

b) Soit N le nombre de records de σ. Calculer $\mathbf{E}(N)$.

Exercice 328 (⑤ Retours à l'origine de la marche de Bernoulli symétrique). *On reprend les notations de l'exercice 311. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note R_n le nombre de $k \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $S_k = 0$.*

a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbf{E}(R_{2n}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k}.$$

b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbf{E}(R_{2n}) = \frac{(2n+1)\binom{2n}{n}}{4^n} - 1.$$

c) En utilisant l'exercice 249 de **8.6**, *déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{E(R_{2n})}{\sqrt{2n}}\right)_{n\geq 1}$, puis celle de la suite $\left(\dfrac{E(R_n)}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$. Ainsi, en moyenne, la marche aléatoire revient à l'origine environ $c\sqrt{n}$ fois avant l'instant n, où $c > 0$ est déterminé dans cette question.*

64. Problème posé par D. Bernoulli en 1768.

65. C'est le *problème des rencontres* de Montmort. Version plus conceptuelle. On se donne une permutation aléatoire de $\{1, \ldots, n\}$, suivant la loi uniforme sur l'ensemble des $n!$ permutations possibles. Quelle est l'espérance du nombre de points fixes ?

Exercice 329 (⑤ Retours à l'origine de la marche de Bernoulli non symétrique)**.** *On reprend ici les notations de l'exercice 310 et on suppose que* $p \neq \dfrac{1}{2}$.

a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbf{E}(R_{2n}) = \sum_{k=1}^{n} \binom{2k}{k} (pq)^k.$$

b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbf{E}(R_{2n}) \leq \sum_{k=1}^{n} (4pq)^k.$$

c) En déduire que la suite $(\mathbf{E}(R_{2n}))_{n\geq 1}$ *est majorée.*

d) Montrer finalement que la suite $(\mathbf{E}(R_n))_{n\geq 1}$ *est croissante et majorée, donc convergente. Ce résultat contraste fortement avec celui de l'exercice précédent.*

10 Nombres complexes

Les nombres complexes ont été introduits par les algébristes italiens de la Renaissance, non pas pour « résoudre » l'équation $x^2 = -1$ comme il serait tentant de le croire, mais afin d'obtenir des formules pour les solutions des équations de degré 3 analogues au

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

de l'équation de degré 2. On trouvera quelques indications sur cette question dans le paragraphe **11.5**. [66] Ce sont donc des nombres, donc des objets algébriques, mais que l'on peut également voir de façon très profitable comme des points ou des vecteurs du plan. Ce double point de vue, qui permet de relier étroitement géométrie et calcul, est une des richesses du sujet.

Il a été reconnu depuis longtemps que l'utilité des nombres complexes excède de très loin la résolution des équations du troisième degré, tant en mathématiques (selon Hadamard, « le plus court chemin entre deux vérités relatives aux nombres réels passe souvent par les complexes ») qu'en physique (électricité, physique ondulatoire, mécanique quantique). C'est un exemple, parmi de nombreux autres (dont beaucoup très récents), de l'efficacité que peuvent avoir des notions élaborées à des fins a priori purement théoriques pour décrire le « réel ».

10.1 Forme algébrique d'un nombre complexe

On postule l'existence d'un « nombre » i tel que $i^2 = -1$. On définit alors les nombres complexes comme les combinaisons $a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (écriture unique). On munit l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l'addition et de la multiplication naturelles. L'unicité de l'écriture entraîne que, si $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors z est nul si et seulement si $a = b = 0$. L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est appelée *forme algébrique de* z.

Tout nombre réel est un nombre complexe : si $a \in \mathbb{R}$, on écrit $a = a + i0$.

On démontre que les opérations sur les nombres complexes jouissent des mêmes propriétés que celles sur les nombres réels :

- commutativité et associativité de l'addition et de la multiplication ;
- distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ;
- relations $0 + z = z, 1.z = z$;
- tout nombre complexe z admet un opposé $-z$;
- tout nombre complexe non nul admet un inverse $\frac{1}{z}$;
- le produit de deux nombres complexes est nul si et seulement si l'un d'entre eux est nul. [67]

Rappelons le calcul de l'inverse d'un nombre complexe non nul, sur lequel nous reviendrons dans le paragraphe suivant :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \qquad \frac{1}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

66. Le chapitre **11**, portant sur les polynômes, est à plusieurs égards un prolongement naturel de l'étude des nombres complexes.

67. La démonstration propre de tout ceci demande un peu de travail. Il y a plusieurs méthodes pour construire les nombres complexes à partir des nombres réels et démontrer les propriétés des opérations. La plus élémentaire (qui n'est pas la plus éclairante) consiste à partir de l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de nombres réels muni des lois appropriées. Nous n'entrerons pas dans le détail de ces questions. Notons par ailleurs qu'il n'y a pas de façon raisonnable de prolonger la relation d'ordre $\leq$ à $\mathbb{C}$.

Les identités remarquables relatives à $(a\pm b)^2$, a^2-b^2, la somme d'une progression géométrique, la factorisation de a^n-b^n (et de a^n+b^n si n est impair) rappelées en **2.1** valent si a et b sont des nombres complexes. Les démonstrations sont les mêmes que pour les nombres réels.

On peut donc calculer avec les nombres complexes comme avec les nombres réels. En particulier, il n'est pas forcément utile d'écrire d'emblée les nombres complexes sous forme algébrique. Par exemple, on résout l'équation du premier degré $(2+i)z+3-i=0$ en écrivant

$$(2+i)z+3-i=0 \iff z=\frac{-3+i}{2+i}=\frac{1}{5}\left((-3+i)(2-i)\right)=-1+i.$$

Si $z=a+ib$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on dit que *a est la partie réelle de z et b la partie imaginaire de z*. On note

$$a=\mathrm{Re}(z) \quad \text{et} \quad b=\mathrm{Im}(z).$$

Les nombres réels sont donc les nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle. Les nombres complexes dont la partie réelle est nulle, i.e. de la forme ib, $b\in\mathbb{R}$, sont appelés *nombres imaginaires purs*. Leur ensemble est souvent noté $i\mathbb{R}$.

Notons que, pour z et z' dans $\mathbb{C}$:

$$\mathrm{Re}(z+z')=\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(z') \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z+z')=\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(z').$$

Pour les produits, on a les formules suivantes, immédiates à retrouver

$$\mathrm{Re}(zz')=\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z')-\mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(z') \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(zz')=\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z')+\mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Re}(z').$$

Exercice 330 (①). *Écrire sous forme algébrique*

$$a=(1+i)^2, \quad b=(3-2i)(1-i)-(2+i)^2, \quad c=\frac{3-2i}{2+5i}, \quad d=\frac{4+i}{1-i}+\frac{2-i}{3-i}, \quad e=\left(\frac{1+i}{i}\right)^3.$$

Exercice 331 (①). *Pour $n\in\mathbb{N}$, calculer i^n.*

Exercice 332 (①). *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du premier degré $2iz+4=z-4i$.*

Exercice 333 (②). *Soit $z=\dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}}$. Calculer z^3.* [68]

Exercice 334 (①). *Déterminer les nombres complexes z tels que $z^2=i$.* [69]

Exercice 335 (②). *a) Quels sont les nombres complexes dont le carré est un nombre réel ?*

b) Quels sont les nombres complexes dont le carré est un nombre imaginaire pur ?

Exercice 336 (③). *Trouver les nombres complexes non nuls z tels que $Z=z+\dfrac{1}{z}$ soit réel. Idem en remplaçant « réel » par « imaginaire pur ».*

68. Cet exercice devient bien plus simple avec la forme trigonométrique.
69. Nous étudierons plus généralement les racines carrées d'un nombre complexe en **10.10** et **11.4**.

10.2 Conjugué et module

Conjugué

Le *conjugué* du nombre complexe $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est

$$\overline{z} = a - ib.$$

On vérifie que l'application $z \longmapsto \overline{z}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, dite *conjugaison complexe*, possède les propriétés suivantes :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \qquad \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad \text{et} \quad \overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}.$$

On a, d'autre part, pour $z \in \mathbb{C}$:

$$z \in \mathbb{R} \iff \overline{z} = z \qquad \text{et} \qquad z \in i\mathbb{R} \iff \overline{z} = -z.$$

Pour les deux exercices suivants, on utilisera la forme algébrique, de manière à se ramener à un système de deux équations à deux inconnues.

Exercice 337 (②)**.** *Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.*

$$z = 1 - \overline{z} + 3i, \qquad \frac{z + 2i}{\overline{z} + i} = 1.$$

Exercice 338 (②)**.** *Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:*

$$iz^2 - 2\overline{z} + z - i = 0.$$

Exercice 339 (④ Caractérisation de la conjugaison)**.** *Dans les questions a), b), c), f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(1) = 1$ et que*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(xy) = f(x)\, f(y).$$

a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \qquad f(x) = x.$$

b) Soient x et y deux nombres réels tels que $y \geq x$. En utilisant le nombre réel $\sqrt{y - x}$, montrer que $f(y) - f(x) \geq 0$. Ainsi, f est croissante.

c) Déduire de a) et b) que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x.$$

Dans les questions suivantes, g est une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $g(1) = 1$ et que

$$\forall (u, v) \in \mathbb{C}^2, \qquad g(u + v) = g(u) + g(v), \quad g(uv) = g(u)\, g(v).$$

d) Montrer que $g(i) \in \{-i, i\}$.

e) On suppose que $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Montrer que g est l'identité de $\mathbb{C}$ ou la conjugaison complexe.[70]

70. Il est par ailleurs évident que ces deux applications vérifient les conditions imposées.

Module

On introduit également le *module* de $z = a + ib$: c'est l'élément $|z|$ de $\mathbb{R}^+$ défini par

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\,\overline{z}}, \quad \text{i.e.} \quad |z|^2 = z\overline{z}.$$

Le module de z est nul si et seulement si z l'est. La seconde écriture du module, qui ne fait pas appel à l'écriture algébrique, est souvent utile. Elle montre par exemple immédiatement que le module est *multiplicatif* :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \qquad |zz'| = |z|\,|z'|.$$

Une récurrence permet de montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \qquad |z^n| = |z|^n.$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}^*, \qquad |z^n| = |z|^n.$$

Le conjugué et le module interviennent naturellement dès que l'on calcule l'inverse d'un nombre complexe non nul $z = a + ib$. En effet

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Exercice 340 (③). *Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:*

$$2z - |z|^2 + 1 - 2i = 0, \qquad z|z| = 2 + i\sqrt{3}.$$

Exercice 341 (③). *Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:*

$$z^2 + 8i = |z|^2 - 2.$$

Exercice 342 (④). *Déterminer l'image de $\mathbb{C}$ par l'application f définie par*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad f(z) = z + |z|.$$

10.3 Représentation géométrique des nombres complexes

Munissons le plan $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel. On associe au nombre complexe $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ le point M de coordonnées (a, b) du plan. On dit que ce point est *l'image de z* dans le plan, ou que *z est l'affixe de M*. On identifie souvent un nombre complexe et son image ; on parle alors de $\mathbb{C}$ comme du *plan complexe*. Dans la suite, nous ferons souvent cette identification sans la rappeler.

On définit également l'affixe du vecteur $\vec{v}$ de coordonnées (a, b) comme le nombre complexe $a + ib$. Ainsi, l'affixe du point A est celle du vecteur $\overrightarrow{OA}$. Plus généralement, si A a pour affixe a et B pour affixe b, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a$.

Il est souvent agréable, parfois crucial, d'utiliser la représentation géométrique des nombres complexes.

Exemples

1. *Droite passant par deux points*
   La droite passant par les points d'affixes a et b est l'image de l'ensemble des nombres complexes de la forme $a + \lambda(b - a)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. En effet, si on note A et B les images de A et B, la droite considérée est l'ensemble des points de la forme
   $$A + \lambda \overrightarrow{AB} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
2. *Parallélogramme*
   Si a, b, c, d sont des nombres complexes d'images respectives A, B, C, D, $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, i.e. si
   $$b - a = c - d.$$
3. *Milieu*
   Si a et b sont des nombres complexes d'images respectives A et B, le milieu de $[AB]$ a pour affixe $\dfrac{a+b}{2}$.
4. *Conjugué*
   Le conjugué $\overline{z}$ de z a pour image le symétrique de z par rapport à l'axe réel.
5. *Module, distances, cercles*
   Le module $|z|$ de z est la distance entre le point M et l'origine O. Plus généralement, si M et M' sont les points d'affixes z et z', on a
   $$MM' = |z - z'|.$$
   Ainsi, si $a \in \mathbb{C}$ a pour image A et $r \in \mathbb{R}^+$, un point M du plan appartient au cercle de centre A et de rayon r si et seulement si son affixe z vérifie $|z - a| = r$.

Les premiers exercices de ce paragraphe appellent (et se résument pour beaucoup à) un dessin.

Exercice 343 (①). *a) Soient z un nombre complexe, M son image dans le plan, M' le symétrique de M par rapport à (Oy). Quelle est l'affixe z' de M' ?*

b) Même question pour M'', symétrique de M par rapport à O.

Exercice 344 (①). *Décrire et représenter les images des ensembles suivants de nombres complexes :*

$$E = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ Re(z) = 4\} \quad F = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ Im(z) = -2\}, \quad G = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ Re(z) = Im(z)\},$$

$$H = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z - 3 + i| = 2\}, \ I = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ Im(z) > 0\}, \ J = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ 2 \leq Re(z) < 4\}.$$

Exercice 345 (②). *a) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :*

$$(1) \qquad |z - i| = |z + i|$$

par deux méthodes :

- par un calcul en écrivant z sous forme algébrique ;

- en interprétant géométriquement la relation (1).

b) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

$$|z - i| < |z + i|$$

Exercice 346 (②). *Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z| = |z-1| = 1$. Interpréter géométriquement.*

Exercice 347 (②). *Déterminer l'ensemble des nombres complexes non nuls z tels que $\dfrac{1+z}{\overline{z}}$ soit réel. Quelle est l'image de cet ensemble ?*

Exercice 348 (②). *Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $z^3 + 3z^2 + 3z + 9$ soit réel. Quelle est l'image de cet ensemble dans le plan complexe ?*

Exercice 349 (②). *Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $z^2 - 2i = \overline{z}^2 + 2i$. Quelle est l'image de cet ensemble dans le plan complexe ?*

Exercice 350 (③ Nombres complexes et théorème de la médiane). *a) Soient z et z' deux nombres complexes. Montrer :*

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right).$$

b) Donner une interprétation géométrique de cette égalité en considérant un parallélogramme, les longueurs de ses côtés, les longueurs de ses diagonales.

c) Soient A, B, C trois points non alignés du plan, I le milieu de $[BC]$. Déduire de b) une expression de AI^2 en fonction de AB^2, BC^2, CA^2. [71]

Exercice 351 (②). *Soient z et z' deux nombres complexes, M et M' leurs images dans le plan complexe. Montrer qu'un point appartient au segment $[MM']$ si et seulement si son affixe est de la forme $\lambda z + (1-\lambda)z'$ avec $\lambda \in [0,1]$.*

Exercice 352 (③ Point de concours des médianes). *Soient a, b, c trois nombres complexes, A, B, C leurs images dans le plan. On suppose que A, B, C ne sont pas alignés. Montrer que les médianes du triangle ABC passent par le point G d'affixe $g = \dfrac{a+b+c}{3}$ (qui est le centre de gravité du triangle ABC).*

Exercice 353 (⑤). *Montrer que l'ensemble des nombres complexes non nuls z tels que $\left|z + \dfrac{1}{z}\right| = 2$ a pour image la réunion de deux cercles que l'on précisera.*

10.4 Nombres complexes de module 1, exponentielle imaginaire

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, c'est-à-dire des $a + ib$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a^2 + b^2 = 1$. L'ensemble $\mathbb{U}$ possède les propriétés de stabilité suivantes :

- si z et z' sont dans $\mathbb{U}$, il en est de même de zz' (par multiplicativité du module) ;
- si z est dans $\mathbb{U}$, $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$ est dans $\mathbb{U}$.

On a en fait, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$z \in \mathbb{U} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{z} = \frac{1}{z},$$

71. Ce résultat est parfois appelé *théorème de la médiane* ; il donne en effet l'expression de la longueur d'une médiane en fonction des longueurs des côtés.

caractérisation souvent commode des éléments de $\mathbb{U}$.

Le nombre complexe z appartient à $\mathbb{U}$ si et seulement si son image appartient au cercle de centre O et de rayon 1, autrement dit si et seulement s'il existe θ dans $\mathbb{R}$ tel que

$$z = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

On note alors

$$\exp(i\theta) = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Noter que θ n'est pas unique. Précisément :

$$\forall(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2, \qquad e^{i\theta} = e^{i\theta'} \quad \Longleftrightarrow \quad \theta' \equiv \theta\ [2\pi].$$

En particulier

$$\forall\theta \in \mathbb{R}, \qquad e^{i\theta} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \theta \equiv 0\ [2\pi].$$

Cette notation exponentielle imaginaire est très utile, notamment grâce à la propriété fondamentale suivante :

$$(1) \qquad \forall(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2, \qquad e^{i\theta}\, e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}.$$

Cette relation est en fait équivalente aux formules d'addition pour le cosinus et le sinus ; son écriture est beaucoup plus synthétique. Elle donne l'inverse d'un élément de $\mathbb{U}$:

$$\forall\theta \in \mathbb{R}, \qquad \left(e^{i\theta}\right)^{-1} = e^{-i\theta}.$$

Voici quelques exemples de nombres complexes de module 1 qu'il est bon de connaître, ou tout au moins de savoir retrouver très vite en s'aidant du cercle trigonométrique.

$$e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\pi/2} = i, \quad e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Notons enfin les *formules d'Euler*, qui expriment $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ en fonction de $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$:

$$\forall\theta \in \mathbb{R}, \qquad \cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right).$$

Exercice 354 (①). *Écrire sous forme algébrique* $e^{i\pi/6}, e^{i5\pi/6}$.

Exercice 355 (③). *Retrouver l'exercice 108 de* **4.1** *en utilisant la formule d'Euler pour* sin.

Exercice 356 (④). *Il est conseillé, dans cet exercice, d'éviter les parties réelles et imaginaires et de travailler avec les carrés des modules écrits avec l'aide du conjugué. Soit* $a \in \mathbb{C}$.

a) Montrer que, si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$,

$$\forall z \in \mathbb{U}, \qquad \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \in \mathbb{U}.$$

b) Soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < 1\}$. *Montrer que, si* $a \in \mathbb{D}$, *alors*

$$\forall z \in \mathbb{D}, \qquad \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \in \mathbb{D}.$$

La formule de Moivre

À partir de (1), un raisonnement par récurrence permet de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n .$$

C'est la *formule de Moivre*, que nous utiliserons en **10.7** couplée avec la formule du binôme.

Exercice 357 (③)**.** *Quels sont les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que*

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad (\sin(\theta) + i\cos(\theta))^n = \sin(n\theta) + i\cos(n\theta)?$$

10.5 Arguments d'un nombre complexe non nul, forme trigonométrique

Soit z un nombre complexe non nul. Alors $w = \dfrac{z}{|z|}$ est un nombre complexe de module 1. On peut donc écrire

$$(1) \qquad z = |z|\, e^{i\theta}$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$. Un tel θ est un *argument* de z.

Attention, si θ est un argument de z, il en est de même de tous les nombres réels congrus à θ modulo 2π. **Cette ambiguïté fait qu'il est préférable d'éviter la notation** $\arg(z)$**.**

La *forme trigonométrique* de z est l'écriture (1). On pose souvent $r = |z|$, de sorte que $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et que (1) se réécrit

$$(2) \qquad z = r\, e^{i\theta}.$$

Dans cette écriture, $r = |z|$ est la distance de l'image M de z à l'origine O, θ une détermination de l'angle entre la demi droite des nombres réels positifs et la demi-droite d'origine O et passant par M.

Si $r \in \mathbb{R}^{+*}$, l'ensemble des nombres complexes de la forme $re^{i\theta}$ où θ décrit $\mathbb{R}$ est le cercle de centre 0 et de rayon r. Si $\theta \in \mathbb{R}$, l'ensemble des nombres complexes de la forme $re^{i\theta}$ où r décrit $\mathbb{R}^+$ (resp $\mathbb{R}$) est la demi-droite (resp. la droite) passant par 0 et dirigée par le vecteur d'affixe $e^{i\theta}$.

La forme algébrique et la forme trigonométrique ont des avantages différents. La forme trigonométrique est, par exemple, bien adaptée aux multiplications. En effet, si $z = r\, e^{i\theta}$ et $z' = r'\, e^{i\theta'}$ avec r et r' dans $\mathbb{R}^{+*}$ et θ et θ' dans $\mathbb{R}$, alors la forme trigonométrique de zz' est :

$$z\, z' = (r\, r')\, e^{i(\theta+\theta')}.$$

Exercice 358 (①)**.** *Soit $a \in \mathbb{C}$. Quelle est l'image de l'ensemble $\{a + 2e^{i\theta}\ ;\ \theta \in \mathbb{R}\}$?*

Exercice 359 (②)**.** *Soient $a \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Quelle est l'image de l'ensemble des nombre complexes de la forme $a + re^{i\alpha}$ lorsque r décrit $\mathbb{R}$? $\mathbb{R}^+$? $[0, R]$ où $R \in \mathbb{R}^{+*}$ est fixé ?*

Exercice 360 (①)**.** *Soit $z = \dfrac{-4}{1 + i\sqrt{3}}$. Écrire z sous forme trigonométrique puis calculer z^3. Retrouver le résultat de l'exercice 333 de* **10.1**.

Exercice 361 (②)**.** *Mettre $1 + i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique et trouver les entiers naturels n tels que*

$$(1 + i\sqrt{3})^n \in \mathbb{R}^+.$$

Exercice 362 (②). *Soit f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par*

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \qquad f(z) = \frac{1}{z}.$$

On identifie $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$, un point du plan et son affixe, en particulier 0 et O. On considère une droite D passant par 0, un cercle C de centre 0.

a) Montrer que l'image de $D \setminus \{0\}$ par f est de la forme $D' \setminus \{0\}$ où D' est une droite passant par 0 que l'on précisera.

b) Montrer que l'image de C par f est un cercle que l'on précisera.

Exercice 363 (②). *a) En utilisant la forme trigonométrique, déterminer les nombres complexes dont le carré est un nombre réel.*

b) En utilisant la forme trigonométrique, déterminer les nombres complexes dont le carré est un nombre imaginaire pur.

Exercice 364 (②). *Pour $n \in \mathbb{N}$, soit*

$$u_n = (1+i)^n + (1-i)^n.$$

a) Écrire $(1+i)^n$ et $(1-i)^n$ sous forme trigonométrique.

b) En déduire une expression de u_n.

c) Pour quels n a-t-on $u_n = 0$?

Exercice 365 (②). *On veut résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:*

$$(1) \qquad z^5 = \overline{z}.$$

Montrer que, si z vérifie (1), alors z est nul ou de module 1. Conclure ; on montrera en particulier que l'équation admet 7 solutions.

10.6 Interprétation géométrique du module et de l'argument de $\dfrac{c-a}{b-a}$

Soient a, b, c trois nombres complexes distincts, A, B, C leurs images dans le plan. La relation

$$\frac{c-a}{b-a} = re^{i\theta}, \quad r \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

se traduit géométriquement par les deux conditions suivantes, qui mettent respectivement en jeu le rapport des longueurs et l'angle des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$(1) \quad AC = r\,AB, \qquad\qquad (2) \quad (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \theta\ [2\pi].$$

Ainsi, A, B, C sont alignés si et seulement si

$$\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}.$$

De même, le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si

$$\frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}.$$

Les relations précédentes ont les conséquences suivantes. Soient a et b deux nombres complexes distincts, $\mathcal{D}$ la droite passant par les points d'affixes a et b dans le plan complexe. Le point M d'affixe z est sur $\mathcal{D}$ si et seulement si

$$\frac{z-a}{b-a} = \overline{\left(\frac{z-a}{b-a}\right)},$$

ce qui s'écrit comme une relation linéaire en z et $\overline{z}$. De même, si c est un troisième nombre complexe, le point M d'affixe z est sur la perpendiculaire à AB passant par C si et seulement si

$$\frac{z-c}{b-a} = -\overline{\left(\frac{z-c}{b-a}\right)}.$$

Exercice 366 (③)**.** *Quels sont les nombres complexes non nuls z tels que les points d'affixes $i, z, \frac{1}{z}$ soient alignés ?*

Exercice 367 (③)**.** *Quels sont les nombres complexes z tels que le triangle dont les sommets ont pour affixes $1, i, z$ soit rectangle en z ?*

Exercice 368 (④)**.** *Soient a, b, c trois nombres complexes distincts, A, B, C leurs images dans le plan.*

a) À quelle condition sur $\frac{c-a}{b-a}$ le triangle ABC est-il équilatéral de sens direct ? de sens indirect ?

b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$.

Les deux exercices ci-après utilisent ces remarques pour établir les résultats classiques relatifs à la droite et au cercle d'Euler d'un triangle. Il est évidemment possible d'établir ces théorèmes par des raisonnements géométriques directs.

Exercice 369 (④ Droite d'Euler d'un triangle)**.** *Soient, dans les questions a) à c), a, b, c trois éléments distincts de $\mathbb{U}$, A, B, C leurs images.*

a) Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ?

b) Soit M un point du plan d'affixe z. En remarquant que le conjugué d'un élément de $\mathbb{U}$ est égal à son inverse, montrer que M appartient à la hauteur du triangle ABC issue de C si et seulement si

$$\overline{z} = \frac{z}{ab} + \frac{1}{c} - \frac{c}{ab}.$$

c) Montrer que les trois hauteurs de ABC concourent au point d'affixe

$$h = a + b + c.$$

d) Montrer que dans un triangle quelconque ABC, l'orthocentre H, le centre de gravité G et le centre du cercle circonscrit O sont alignés et vérifient la relation d'Euler

$$\overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}\,.$$

Exercice 370 (⑤ Cercle d'Euler d'un triangle, encore appelé cercle des neuf points)**.** *On reprend les notations de l'exercice précédent.*

a) Montrer que le cercle de rayon $\frac{1}{2}$ et dont le centre a pour affixe $\frac{h}{2}$ contient les milieux des côtés de ABC, les milieux des segments joignant l'orthocentre aux sommets, les pieds des hauteurs.

b) Énoncer le théorème établi dans un triangle quelconque.

10.7 La formule du binôme

La formule du binôme généralise les identités remarquables rappelées en **2.1** :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

On adopte la convention usuelle en algèbre :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad z^0 = 1.$$

Théorème 11 (Formule du binôme)**.** *Soient n un élément de $\mathbb{N}$, a et b des nombres complexes. Alors :*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Explicitement :

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n.$$

Notons que la formule peut également s'écrire, par symétrie des coefficients binomiaux :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Preuve. Fixons a et b dans $\mathbb{C}$. Pour n dans $\mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n$ l'assertion :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Puisque

$$\binom{0}{0} = 1,$$

la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie, c'est-à-dire :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

On a alors :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\ (a+b)^n\,,$$

soit encore, grâce à $\mathcal{P}_n$:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\right)$$

ou encore

$$(a+b)^{n+1} = a\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\right) + b\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\right),$$

c'est-à-dire :

$$(1) \qquad (a+b)^{n+1} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}\right).$$

Isolons le terme correspondant à $k = 0$ de la première somme, le terme correspondant à $k = n$ de la seconde. Il vient :

$$(2) \qquad (a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}\right) + b^{n+1}.$$

Dans la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k}\ b^{k+1}.$$

effectuons le changement d'indice $j = k + 1$, de sorte que j décrit $\{1, \ldots, n\}$ lorsque k décrit $\{0, \ldots, n-1\}$. Il vient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^{n+1-j}\ b^j.$$

La variable de sommation étant muette, cette somme peut encore s'écrire :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k}\ b^k.$$

La formule (2) entraîne alors :

$$(3) \qquad (a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) a^{n-k+1} b^k\right) + b^{n+1}.$$

En utilisant, pour k dans $\{1, \ldots, n\}$, la formule de Pascal :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

et les égalités

$$\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1,$$

on obtient bien :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k}\ b^k.$$

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est établie.

Exemples

1. *Somme des coefficients binomiaux d'indice pair (resp. impair)*
   Soit n dans $\mathbb{N}^*$. En prenant $b = 1$, on obtient, pour tout nombre complexe a :

$$(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k.$$

   En particulier :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} = (1-1)^n = 0.$$

Notons que la première égalité est également vraie pour $n = 0$, contrairement à la seconde.

Notons maintenant A_n (resp. B_n) la somme des $\binom{n}{k}$ pour k décrivant l'ensemble des entiers pairs (resp. impairs) de $\{0, \dots, n\}$:

$$A_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j}, \quad B_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1}$$

Ce qui précède montre que

$$A_n + B_n = 2^n \quad \text{et} \quad A_n - B_n = 0.$$

Ainsi

$$A_n = B_n = 2^{n-1}.$$

2. *Dérivation*
   En posant $a = x$ dans l'égalité de l'exemple 1 et en dérivant par rapport à x, on obtient, pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1} = n\,(1+x)^{n-1}\,.$$

   En dérivant à nouveau, il vient, , pour $n \geq 2$ entier et x dans $\mathbb{R}$:

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^{k-2} = n(n-1)\,(1+x)^{n-2}\,.$$

   On peut bien sûr répéter cette opération.

3. *Application de la formule de Moivre*
   En développant le second membre avec la formule du binôme et en identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient des expressions de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

   Par exemple, pour $n = 3$:

$$\cos(3x) + i\sin(3x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) + i\left(3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)\right).$$

   Donc :

$$\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x),$$
$$\sin(3x) = 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x).$$

   Les polynômes de Tchebychev, étudiés en **11.7** sont définis à partir d'une généralisation de ce calcul.

4. *Linéarisation*
   On peut également utiliser la formule du binôme pour écrire $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$ comme combinaison de fonctions

$$x \longmapsto \cos(kx), \qquad x \longmapsto \sin(kx), \qquad k \in \{0, \dots, n\}.$$

Il suffit de partir des *formules d'Euler* :

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

d'élever ces formules à la puissance n et de développer le second membre par la formule du binôme. Par exemple :

$$\sin^3(x) = \frac{-1}{8i}\left(e^{3ix} - e^{-3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix}\right) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x).$$

5. *Inégalité de Bernoulli*

   Soient n un élément de $\mathbb{N}^*$, x un élément de $\mathbb{R}^+$. Comme les termes $\binom{n}{k}x^k$, $k \in \{2, \dots, n\}$, sont positifs, on obtient l'*inégalité de Bernoulli* :

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Exercice 371 (③)**.** *Pour $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, donner une expression simple de la somme*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Exercice 372 (②)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la moyenne des cardinaux des parties de $\{1, \dots, n\}$?*

Exercice 373 (③ Variance d'une variable aléatoire binomiale $*$)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. Déduire de l'exemple 2 la variance d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n,p)$.*

Les quatre exercices suivants sont des applications des exemples 3 et 4 ci-dessus.

Exercice 374 (②)**.** *Trouver deux fonctions polynomiales P et Q telles que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(4x) = P(\cos(x)), \quad \sin(4x) = \sin(x)\, Q(\cos(x)).$$

Exercice 375 (③)**.** *a) Déterminer une fonction polynomiale P telle que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(5x) = P(\cos(x)).$$

b) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Exercice 376 (② Linéarisation $*$)**.** *a) Écrire $x \mapsto \cos^3(x)$ comme combinaison linéaire des fonctions*

$$x \mapsto \cos(kx), \quad k \in \{0, \dots, 3\}.$$

b) Écrire $x \mapsto \cos^4(x)$ comme combinaison linéaires des fonctions

$$x \mapsto \cos(kx), \quad k \in \{0, \dots, 4\}.$$

Exercice 377 (④ Linéarisation, suite $*$)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

a) Montrer que la fonction :

$$x \longmapsto \cos^n(x)$$

est une combinaison linéaire des fonctions :

$$x \longmapsto \cos(kx), \quad k \in \{0, \dots, n\}.$$

b) Calculer en utilisant a) :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 378 (③ Retour sur les intégrales de Wallis)**.** *Soit $p \in \mathbb{N}$. À l'aide de l'exercice précédent, retrouver l'intégrale W_{2p} de* **8.6**.

Exercice 379 (③ Linéarisation et primitives de fonctions trigonométriques)**.** *a) Montrer que, si $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, la fonction*

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(x)^m \sin(x)^n$$

est combinaison linéaire de fonctions de la forme

$$u_p \ : x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(x)^p \quad \textit{et} \quad v_p : x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(x)^p \sin(x), \ \textit{avec} \quad p \in \mathbb{N}.$$

b) Expliquer comment calculer les primitives de u_p et v_p sur $\mathbb{R}$.

c) Application numérique : déterminer les primitives de

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(x)^3 \ \sin(x)^5 \quad \textit{et de} \quad x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(x)^3 \ \sin(x)^4.$$

Le dernier exercice ne concerne pas les nombres complexes. Sa présence ici s'explique car la démonstration demandée est calquée sur celle de la formule du binôme ; il existe d'ailleurs un cadre conceptuel permettant une généralisation commune des deux résultats.

Exercice 380 (④ Formule de Leibniz $*$)**.** *Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$. Montrer que la dérivée n-ième du produit fg est donnée par la formule de Leibniz :*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

10.8 Complément : technique de l'arc moitié

Pour θ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$e^{i\theta} - 1 = e^{i\theta/2} \left(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2} \right) = 2i \ \sin(\theta/2) \ e^{i\theta/2} = 2 \ \sin(\theta/2) \ e^{i(\theta/2+\pi/2)}.$$

De même,

$$e^{i\theta} + 1 = e^{i\theta/2} \ \left(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2} \right) = 2 \ \cos(\theta/2) \ e^{i\theta/2}.$$

Ces formules donnent le module et un argument de $1 \pm e^{i\theta}$. Attention, un peu de soin est nécessaire, car il faut tenir compte des signes de $\sin(\theta/2)$ et $\cos(\theta/2)$.

Exercice 381 (②). *Soient α et β deux réels, $Z = e^{i\alpha} + e^{i\beta}$.*

a) En factorisant $e^{i\alpha}$ dans Z, trouver le module de Z et, si Z est non nul, un argument de Z.

b) Retrouver les formules donnant $\cos(\alpha) + \cos(\beta)$ et $\sin(\alpha) + \sin(\beta)$.

Exercice 382 (③). *Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$. En appliquant la formule du binôme à $(1 + e^{ix})^n$ et en utilisant la technique de l'arc moitié, établir les formules*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) = 2^n \left(\cos(x/2)\right)^n \ \cos(nx/2), \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx) = 2^n \left(\cos(x/2)\right)^n \ \sin(nx/2).$$

Exercice 383 (③). *Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, donner une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k e^{ikx}$.*

En déduire des expressions simples de

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \cos(kx), \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \sin(kx).$$

Exercice 384 (③). *Soit f l'application de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par*

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \qquad f(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Quelle est l'image par f de $\mathbb{U} \setminus \{1\}$?

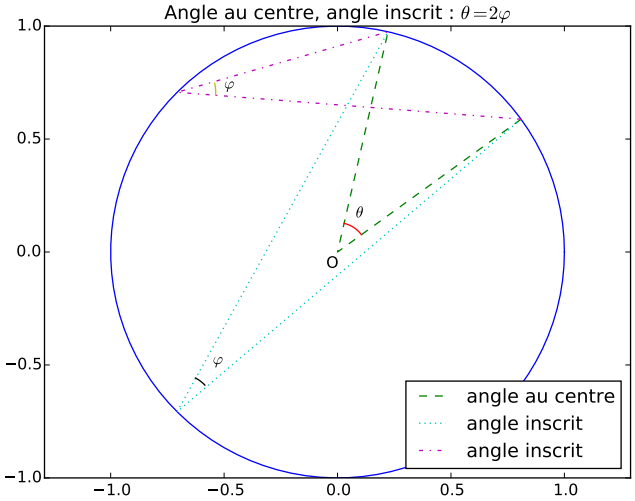
Remarque *Application au théorème de l'angle inscrit*

La transformation précédente entraîne le *théorème de l'angle inscrit*. Soient en effet θ et θ' dans $]0, 2\pi[$ avec $\theta < \theta'$, A, B, C les points du plan complexe d'affixes respectives $1, e^{i\theta}, e^{i\theta'}$, O le point d'affixe 0. L'angle au centre $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est $\theta' - \theta$. L'angle inscrit est $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ correspondent respectivement aux complexes $e^{i\theta} - 1$ et $e^{i\theta'} - 1$. Le quotient

$$\frac{e^{i\theta'} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{\sin(\theta'/2)}{\sin(\theta/2)} \, e^{i\frac{(\theta' - \theta)}{2}}$$

a pour argument $(\theta' - \theta)/2$: l'angle au centre est le double de l'angle inscrit. [72] Cette remarque est illustrée par le dessin ci-après.

72. Modulo 2π, bien sûr.



10.9 Complément : calcul de sommes trigonométriques

On rencontre fréquemment des sommes du type :

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx), \qquad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx),$$

avec n dans $\mathbb{N}$ et x dans $\mathbb{R}$. Le calcul de ces sommes est standard. On pose :

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx},$$

de sorte que $C_n(x)$ et $S_n(x)$ sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de $U_n(x)$. Or, $U_n(x)$ étant la somme d'une progression géométrique, le calcul de $U_n(x)$ est connu. Si x est de la forme $2\pi m$ avec $m \in \mathbb{Z}$, $U_n(x)$ vaut $n+1$, d'où :

$$C_n(x) = n+1, \qquad S_n(x) = 0.$$

Dans le cas contraire, la raison e^{ix} de la progression géométrique apparaissant dans U_n est différente de 1, ce qui conduit, via la technique de l'arc moitié, à :

$$U_n(x) = \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

En prenant les parties réelle et imaginaire, il vient :

$$C_n(x) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}, \qquad S_n(x) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Exercice 385 (③). *Soient $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(x) \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les sommes*

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos(x)^k} \quad et \quad V_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(kx)}{\cos(x)^k}$$

Exercice 386 (④). *Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, donner une expression simple de $\sum_{k=0}^{n} C_k(x)$.*

Exercice 387 (④). *Soient x un nombre réel, n un élément de $\mathbb{N}^*$. Simplifier la somme*

$$K_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) x\right)$$

et montrer que :

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)\ K_n(x) \geq 0.$$

10.10 Racines n-ièmes de l'unité, racines n-ièmes d'un nombre complexe

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Les nombres complexes z tels que $z^n = 1$, appelés *racines n-ièmes de* 1 ou *racines n-ièmes de l'unité*, interviennent dans un grand nombre de questions. Nous allons les déterminer.

Écrivons z sous la forme $re^{i\theta}$ avec θ réel et r dans $\mathbb{R}^+$. La relation $z^n = 1$ équivaut à :

$$r^n = 1 \quad \text{et} \quad e^{in\theta} = 1$$

ou encore à

$$r = 1 \quad \text{et} \quad n\theta \in 2\pi\mathbb{Z},$$

enfin à

$$r = 1 \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{2k\pi}{n}.$$

D'autre part, pour k et k' dans $\mathbb{Z}$, l'égalité

$$\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) = \exp\left(\frac{2ik'\pi}{n}\right)$$

équivaut à

$$\frac{2\pi(k'-k)}{n}\ \in\ 2\pi\mathbb{Z},$$

c'est-à-dire au fait que n divise $k' - k$. On a établi le résultat suivant.

Théorème 12 (Racines n-ièmes de l'unité). *L'équation $z^n = 1$ admet exactement n racines complexes, à savoir les :*

$$\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right),\ k \in \{0, \ldots, n-1\},$$

ou encore :

$$1,\ \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right),\ \exp\left(\frac{4i\pi}{n}\right), \ldots,\ \exp\left(\frac{2i(n-1)\pi}{n}\right).$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note classiquement $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de 1 :

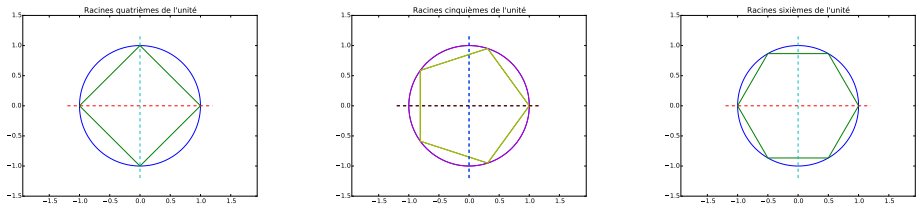
$$\mathbb{U}_n = \left\{ \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \ ; \ k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}.$$

Les images des racines n-ièmes de l'unité dans le plan complexe sont les points du cercle unité d'arguments $0, \dfrac{2\pi}{n}, \dfrac{4\pi}{n}, \dots, \dfrac{2(n-1)\pi}{n}$ modulo 2π. Ce sont les sommets d'un polygone régulier à n sommets, centré au point O, et dont un des sommets est égal à 1. Plus généralement, soient c un nombre complexe, $z_0, \dots, z_{n-1}$ les sommets successifs, dans le sens trigonométrique, d'un polygone régulier de centre c. Alors

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \qquad z_k - c = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)(z_0 - c).$$

Les racines de l'unité sont donc intimement liées aux polygones réguliers.

On a représenté ci-dessous les polygones réguliers, dont les sommets ont pour affixe les racines n-ièmes de l'unité, pour $n = 4, 5$ et 6.



Exemples

1. Pour $n = 2$, les racines carrées de l'unité sont 1 et -1.
2. Pour $n = 3$, les racines cubiques de 1 sont 1,

$$j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right) = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad j^2 = \exp\left(\frac{4i\pi}{3}\right) = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

   Les notations j et j^2 sont d'usage courant, de même que les relations $j^2 = \overline{j}$ et $1 + j + j^2 = 0$.
3. Pour $n = 4$, les racines quatrièmes de 1 sont $1, i, -1, -i$.

Exercice 388 (①)**.** *Écrire sous forme algébrique les racines sixièmes de* 1*, puis les racines huitièmes de* 1*.*

Exercice 389 (②)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme des éléments de $\mathbb{U}_n$.*

Exercice 390 (③)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme des puissances p-ièmes des éléments de $\mathbb{U}_n$.*

Exercice 391 (⑤ Formule d'inversion de Fourier discrète)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $(z_0, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, on pose*

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \qquad Z_k = \sum_{j=0}^{n-1} z_j \exp\left(-\frac{2ijk\pi}{n}\right).$$

Démontrer les formules suivantes, qui expriment $(z_0, \dots, z_{n-1})$ en fonction de $(Z_0, \dots, Z_{n-1})$:

$$\forall p \in \{0, \dots, n-1\}, \qquad z_p = \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} Z_\ell \exp\left(\frac{2i\ell p\pi}{n}\right).$$

Exercice 392 (③)**.** *Montrer, pour x réel et n entier ≥ 2 :*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(x + \frac{2k\pi}{n}\right) = 0.$$

Exercice 393 (①)**.** *Calculer le produit des éléments de $\mathbb{U}_n$.*

Exercice 394 (③)**.** *Soit n un entier ≥ 3. On note P_n et A_n le périmètre et l'aire du polygone (régulier) dont les sommets sont les racines n-ièmes de 1. Donner une expression simple de P_n et de A_n. Déterminer les limites des suites $(P_n)_{n\geq 3}$ et $(A_n)_{n\geq 3}$.*

Exercice 395 (④)**.** *Soit $m \geq 2$ un entier.*

a) Donner une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} e^{\frac{ik\pi}{m}}$.

b) On note $A_0, \dots, A_{2m-1}$ les sommets successifs (selon le sens trigonométrique) d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1. Donner une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} A_k A_{2m-k}$.

Exercice 396 (⑤ Rationnels r tels que $\cos(\pi r)$ soit rationnel)**.** *On se propose de déterminer les nombres rationnels r tels que $\cos(\pi r)$ soit un nombre rationnel. On considère un tel rationnel r. On écrit :*

$$2\cos(\pi r) = \frac{a}{b}$$

où a est dans $\mathbb{Z}$, b dans $\mathbb{N}^*$ et où la fraction a/b est irréductible. Pour k dans $\mathbb{N}$, on pose :

$$u_k = 2\cos\left(2^k \pi r\right).$$

a) Pour k dans $\mathbb{N}$, exprimer u_{k+1} en fonction de u_k.

b) Montrer que, pour tout k dans $\mathbb{N}$, u_k est rationnel. Si on écrit $u_k = a_k/b_k$ où a_k est dans $\mathbb{Z}$, b_k dans $\mathbb{N}^*$, la fraction a_k/b_k irréductible, exprimer b_{k+1} en fonction de b_k.

c) On écrit $r = p/q$ avec p dans $\mathbb{Z}$, q dans $\mathbb{N}^*$. En remarquant que, pour k dans $\mathbb{N}$, $\exp\left(i2^k\pi r\right)$ est une racine $2q$-ième de 1, montrer que l'ensemble

$$\{u_k,\ k \in \mathbb{N}\}$$

est fini. En déduire que l'on peut choisir k_0 dans $\mathbb{N}^*$ tel que b_{k_0} soit maximal.

d) En utilisant $k_0 + 1$, montrer que b_{k_0} vaut 1, puis que $2\cos(\pi r)$ est entier. Conclure. [73]

73. On trouvera une démonstration plus savante mais plus intéressante dans l'exercice 517 de **12.5**.

Exercice 397 (④). *Soient m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$. À quelle condition a-t-on l'inclusion $\mathbb{U}_m \subset \mathbb{U}_n$?*

Exercice 398 (③ Calcul de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ $*$). *Soient $z = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{5}\right)$, $x = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.*

a) Montrer que $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$.

b) Vérifier l'égalité $x = z + \dfrac{1}{z}$.

c) Exprimer x^2 en fonction de z. En utilisant a), trouver alors une équation du second degré vérifiée par x. En déduire une expression simple du nombre $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$. [74]

d) Calculer $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 399 (⑤ Construction du pentagone régulier). *Pour $0 \leq k \leq 4$, soit A_k le point d'affixe $\exp\left(\dfrac{2ik\pi}{5}\right)$. Soit O le point d'affixe 0.*

a) On note I le point d'affixe i, J le point d'affixe $\dfrac{-1}{2}$, $\mathcal{C}$ le cercle de centre J passant par I. Montrer que $\mathcal{C}$ coupe l'axe réel en deux points M et N, où l'abscisse de M (resp. N) est strictement positive (resp. strictement négative).

b) Soit H le milieu de $[OM]$. Déterminer l'affixe de H.

c) Montrer que la perpendiculaire à l'axe réel passant par H coupe le cercle unité en les points A_1 et A_4.

d) En déduire une construction des points A_k, $1 \leq k \leq 4$, à la règle et au compas une fois connus O et A_0. [75]

Remarque *Polygones constructibles*

Dans l'exercice précédent et dans les exercices 95, 96 et 102 de **4.1**, on part d'un réel de la forme $\cos(\pi r)$ avec r rationnel, que l'on arrive à calculer en utilisant uniquement les rationnels, les quatre opérations et des extractions de racines carrées.

Ces formules sont intimement liées à des problèmes géométriques. Plus précisément, en étudiant la constructibilité à la règle et au compas des polygones réguliers, Gauss a déterminé tous les rationnels r possédant la propriété précédente. Il existe ainsi une expression du type susmentionné (mais fort compliquée) de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{17}\right)$.

Exercice 400 (④). *Soit $x = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$. En utilisant la méthode de l'exercice 398, trouver des entiers relatifs a, b, c tels que $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.*

74. On trouve une démonstration rapide mais moins naturelle (en fait basée sur la connaissance du résultat) dans l'exercice 102 de **4.1**.

75. On sait construire la perpendiculaire à une droite passant par un point à la règle et au compas. Question pour le lecteur : comment ,

Exercice 401 (③). *Soit n un entier ≥ 2. Déterminer les complexes z tels que :*

$$(z-i)^n = (z+i)^n .$$

On pourra noter qu'une solution z de cette équation est nécessairement différente de i et réécrire l'équation sous la forme :

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1.$$

Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z \in \mathbb{C}^*$. Écrivons Z sous forme trigonométrique : $Z = r\, e^{i\varphi}$, avec $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. Soit maintenant $z \in \mathbb{C}$. Si $z^n = Z$, alors $r = |Z| = |z|^n$, d'où $|z| = \sqrt[n]{r}$. Posons donc $z = \sqrt[n]{r}\, e^{i\theta}$ où θ est un nombre réel. Alors

$$z^n = Z \quad \Longleftrightarrow \quad n\,\theta \equiv \varphi\ [2\pi] \quad \Longleftrightarrow \quad \theta \equiv \frac{\varphi}{n}\ \left[\frac{2\pi}{n}\right].$$

Nous venons de démontrer la généralisation suivante du théorème 12. [76]

Théorème 13 (Racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul). *Soit $Z \in \mathbb{C}^*$. Écrivons Z sous forme trigonométrique : $Z = r\, e^{i\varphi}$, avec $R \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. L'équation $z^n = Z$ d'inconnue z admet exactement n racines, les*

$$\sqrt[n]{r}\, \exp\left(i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) \quad \text{où} \quad k \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

On remarquera que, si on connaît une racine n-ième de Z, les autres s'obtiennent en multipliant la première par les éléments de $\mathbb{U}_n$.

Exercice 402 (②). *Si Z est un nombre complexe non nul, placer les racines carrées de Z dans le plan complexe.*

Exercice 403 (②). *Exprimer les racines carrées de $2i\, e^{-i\pi/4}$ sous forme trigonométrique.*

Exercice 404 (①). *Déterminer, en utilisant la forme trigonométrique, les nombres complexes z tels que $z^2 = i$.*

Exercice 405 (②). *Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^4 = 2i$, $z^7 - (1+i)z^2 = 0$. On donnera les solutions sous forme trigonométrique et, pour la première, également sous forme algébrique.*

Exercice 406 (②). *Montrer que si z appartient à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, alors z admet une unique racine carrée dont la partie réelle est strictement positive.*

Exercice 407 (④). *Trouver les nombres complexes z tels que*

$$(z-1)^3 = i(z+1)^3.$$

On déterminera d'abord les racines cubiques de i.

76. Bien sûr, l'équation $z^n = 0$ a pour seule solution $z = 0$.

10.11 Complément : inégalité triangulaire

On appelle *inégalité triangulaire* le résultat fondamental suivant.

Théorème 14 (Inégalité triangulaire pour deux nombres complexes)**.** *Soient z et z' deux nombres complexes. Alors :*

$$|z+z'| \leq |z| + |z'|.$$

Il y a égalité si et seulement si les nombres complexes z et z' sont sur une même demi-droite issue de 0.[77]

Preuve. Les deux quantités étant positives, les comparer revient à comparer leurs carrés. Or :

$$|z+z'|^2 = (z+z')\,\overline{(z+z')} = (z+z')\left(\overline{z}+\overline{z'}\right) = z\overline{z} + z\overline{z'} + \overline{z'}z + z'\overline{z'} = |z|^2 + |z'|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\overline{z}z'),$$

tandis que :

$$(|z| + |z'|)^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'|.$$

Par conséquent, posant $\omega = \overline{z}z'$:

$$(|z| + |z'|)^2 - |z+z'|^2 = 2\,(|zz'| - \mathrm{Re}\,(\overline{z}z')) = 2\,(|\omega| - \mathrm{Re}\,(\omega))\,.$$

Il est clair géométriquement que, pour tout nombre complexe ω, on a :

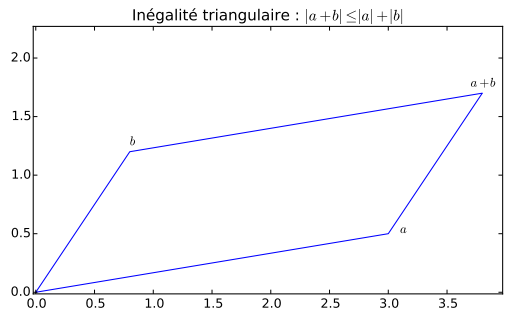
$$(1) \qquad |\omega| \geq \mathrm{Re}\,(\omega),$$

et que (1) est une égalité si et seulement si $\omega \in \mathbb{R}^+$. La preuve est du reste immédiate. Posant $\omega = x + iy$ avec x et y dans $\mathbb{R}$, l'inégalité $y^2 \geq 0$ et la croissance de la fonction racine carrée entraînent :

$$(2) \qquad |z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2},$$

et que (2) est une égalité si et seulement si $y = 0$. Comme $\sqrt{x^2} = |x| \geq x$, avec égalité si et seulement si $x \in \mathbb{R}^+$, le théorème suit.

La signification de l'inégalité triangulaire est illustrée par le dessin ci-dessous : la distance de l'origine O au point C d'affixe $a+b$ est plus petite que la somme de la distance de O au point A d'affixe a et de la distance de A au point C. En d'autres termes, la ligne droite est le plus court chemin !



77. Autrement dit, si z et z' sont non nuls, que z et z' ont mêmes arguments.

Exercice 408 (③ Inégalité de Ptolémée)**.** *a) Soient a, b, c, d quatre nombres complexes. Vérifier que*

$$(a-c)(b-d) = (b-a)(d-c) + (b-c)(a-d).$$

b) Soient A, B, C, D quatre points du plan. Montrer que

$$AC.BD \leq AB.CD + BC.DA.$$ [78]

L'inégalité triangulaire se généralise à la somme de n nombres complexes.

Théorème 15 (Inégalité triangulaire pour n nombres complexes)**.** *Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes. Alors :*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i|.$$

Il y a égalité si et seulement si $z_1, \ldots, z_n$ sont sur une même demi-droite issue de 0.

Preuve de la première partie du théorème 15. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : « pour toute famille $z_1, \ldots, z_n$ de nombres complexes, l'inégalité

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i|$$

est vérifiée. »

La propriété $\mathcal{P}_1$ est évidente. Soient n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie, $z_1, \ldots, z_{n+1}$ des nombres complexes. Posons :

$$a = \sum_{i=1}^{n} z_i, \qquad b = z_{n+1}.$$

On a :

$$(1) \qquad a + b = \sum_{i=1}^{n+1} z_i.$$

L'inégalité triangulaire pour deux nombres complexes donne

$$(2) \qquad |a+b| \leq |a| + |b|.$$

Grâce à $\mathcal{P}_n$, on a d'autre part :

$$(3) \qquad |a| \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i|.$$

En sommant (2) et (3) et en tenant compte de (1), on obtient :

$$\left|\sum_{i=1}^{n+1} z_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n+1} |z_i|.$$

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est démontrée.

Exercice 409 (③ Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire $*$)**.** *Démontrer la seconde partie du théorème 15.*

78. « Le produit des diagonales d'un quadrilatère est majoré par la somme des produits des côtés opposés ». Par ailleurs, le cas d'égalité peut être caractérisé.

11 Polynômes et équations algébriques

Pendant longtemps, l'algèbre s'est identifiée à la « résolution des équations algébriques », c'est-à-dire la recherche des racines des polynômes. Les polynômes sont par ailleurs des objets mathématiques centraux, tant en algèbre qu'en analyse ; corollairement, ils fournissent une liste inépuisable de thèmes d'exercices et de problèmes.

Nous avons rencontré les polynômes à de nombreuses reprises : sommes des puissances p-ièmes des n premiers entiers naturels (**2.3**), trinôme du second degré (**3.3**), nombre de racines d'équations polynomiales réelles (**6.3.1**), linéarisation (**10.7**), racines de l'unité (**10.10**), détermination d'une équation polynomiale à coefficients entiers satisfaite par $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, puis par $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ (**10.10**). Nous en présentons ici une étude plus systématique, qui reste cependant élémentaire. La richesse du sujet transparaît dans le grand nombre de compléments proposés.

On s'autorise le léger abus de langage consistant à employer simultanément « polynôme » « fonction polynôme » ou « fonction polynomiale ».

11.1 Polynômes

Les sommes indexées permettent d'écrire de manière claire des polynômes de degré arbitraire. Notons $\mathbb{K}$ l'un des deux ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle *fonction polynôme* ou *fonction polynomiale* à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute fonction de la forme :

$$P\ : x \in \mathbb{K} \longmapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

où les a_i sont des éléments de $\mathbb{K}$. Plus précisément, une fonction de la forme précédente est dite *polynomiale de degré au plus n.*

Bien évidemment une fonction polynomiale à coefficients réels peut être vue, puisque $\mathbb{R}$ est contenu dans $\mathbb{C}$, comme une fonction polynomiale à coefficients complexes.

L'énoncé suivant dit que la restriction à $\mathbb{R}$ de la fonction polynomiale P détermine les coefficients a_k. Il justifie donc un certain nombre de raisonnements par identification.

Théorème 16 (Unicité de l'écriture d'un polynôme)**.** *Soient $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n$ des nombres complexes tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k.$$

Alors :

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}, \qquad a_k = b_k.$$

Preuve abrégée. Supposons d'abord les a_k dans $\mathbb{R}$, pour disposer de la notion de limite. Pour x dans $\mathbb{R}^*$, on divise par x^n l'égalité obtenue des deux côtés :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k x^{k-n} = \sum_{k=0}^{n} b_k x^{k-n}.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, le premier membre tend vers a_n, le second vers b_n. On a donc :

$$a_n = b_n.$$

En revenant alors à l'hypothèse et en divisant cette fois par x^{n-1} :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^{k-(n-1)}.$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on a maintenant :

$$a_{n-1} = b_{n-1}.$$

Il reste à répéter cet argument. La mise en forme requiert une récurrence dont la formalisation est laissée au lecteur.

Le cas où les a_k sont complexes se traite de la même façon en décomposant, pour tout k, $a_k = u_k + iv_k$ avec u_k et v_k dans $\mathbb{R}$ et en considérant les parties réelle et imaginaire de $P(x)$.

Si P n'est pas identiquement nulle, on peut donc écrire de manière unique :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

où les a_k sont des éléments de $\mathbb{K}$ et $a_n \neq 0$. On dit alors que n *est le degré de* P et que a_n *est le coefficient dominant de* P. Ainsi, une fonction polynomiale de degré 0 est constante non nulle, une fonction polynomiale de degré 1 est affine non constante etc.

Si le coefficient dominant de P vaut 1, on dit que P *est unitaire*. Par ailleurs, a_0, qui n'est autre que $P(0)$, est le *coefficient constant* de P.

Notons au passage le fait suivant : si P et Q sont deux fonctions polynomiales non identiquement nulles de degrés respectifs m et n, de coefficients dominants respectifs a et b, alors

$$x \longmapsto P(x)\ Q(x)$$

est une fonction polynomiale de degré $m+n$, de coefficient dominant ab. On peut plus précisément donner une formule pour les coefficients de PQ. Supposons que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k, \quad Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k.$$

Alors

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad (PQ)(x) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k x^k \quad \text{où} \quad c_k = \sum_{\substack{0 \leq i \leq m;\ 0 \leq j \leq n \\ i+j=k}} a_i b_j.$$

Remarques

1. *Sur le résultat et la démonstration*
   La démonstration précédente fait appel à un argument d'analyse. Dans le paragraphe **11.6**, on établira de manière plus algébrique un énoncé plus fort (théorème 23). On peut d'ores et déjà noter que la démonstration utilise un argument de comportement asymptotique en $+\infty$, on peut donc remplacer l'hypothèse

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

par l'existence de $A \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in [A, +\infty[, \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k.$$

2. *Polynômes pairs, impairs*
   Soit P une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

   Supposons P paire :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = P(-x).$$

   Alors :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \qquad a_k = (-1)^k a_k.$$

   Cette égalité équivaut au fait que a_k est nul pour k impair. Une fonction polynomiale est donc paire si et seulement si elle est de la forme :

$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{m} a_k x^{2k}.$$

   On caractérise de même les polynômes impairs.
3. *Application à une identité remarquable*
   L'utilisation des polynômes permet de démontrer simplement certaines « identités remarquables ».[79] Voici un exemple. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k = (1+x)^{2n} = ((1+x)^n)^2 = \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j \right)^2.$$ [80]

   Comparant les coefficients de x^n dans les deux membres, il vient

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 410 (① $*$)**.** *Que dire du degré de la somme de deux fonctions polynomiales ?*

Exercice 411 (③ Fonctions polynomiales périodiques $*$)**.** *Soit T un élément de $\mathbb{R}^{+*}$. Quelles sont les fonctions polynomiales à coefficients réels P telles que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x+T) = P(x) \ ?$$

79. C'est un premier exemple de la méthode des « fonctions génératrices ».
80. L'identité est bien sûr tout aussi vraie pour $x \in \mathbb{C}$.

Exercice 412 (②). *Soit P une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{C}$:*

$$\forall x \in \mathbb{C}, \qquad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- si $k \in \{0, \dots, n\}$ n'est pas multiple de 3, a_k est nul ;

- pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(jz) = P(z)$, où $j = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{3}\right)$.

Exercice 413 (④). *Soit P une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$. Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :*

- il existe une fonction polynomiale Q à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = Q(x^2 - x);$$

- pour tout $x \in \mathbb{K}$, $P(x) = P(1 - x)$.

Exercice 414 (④). *Établir la formule de l'exemple 3 par un raisonnement combinatoire.*

Exercice 415 (⑤ Identités de Vandermonde $*$). *a) Généraliser l'exemple 3 en calculant le coefficient de x^k dans $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m\,(1+x)^m$ de deux manières.*

b) Retrouver le résultat obtenu par une démonstration combinatoire.

11.2 Complément : polynômes de Bernoulli

Il existe de nombreuses familles « classiques » de polynômes. Nous en présenterons deux, naturellement reliées à des questionss déjà abordées dans ce texte :

- la suite $(B_p)_{p\geq 0}$ des *polynômes de Bernoulli*, mentionnée en **2.3**, objet de ce paragraphe ;

- la suite $(T_p)_{p\geq 0}$ des *polynômes de Tchebychev*, qui apparaît naturellement en trigonométrie, est construite en **11.7**.

Théorème 17 (Polynômes de Bernoulli). *Il existe une unique suite $(B_p)_{p\geq 0}$ de polynômes à coefficients réels telle que B_0 soit le polynôme constant égal à 1 et que*

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad B_p' = p\, B_{p-1} \quad \text{et} \quad \int_0^1 B_p(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$ [81]

On a, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$B_{p+1}(x+1) - B_{p+1}(x) = (p+1)\, x^p.$$

En particulier,

$$\forall (p,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}\left(B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(1)\right).$$ [82]

81. Cette seconde condition assure l'unicité ; son intérêt, très réel, n'apparaîtra pas ici.
82. Cette relation provient d'une sommation télescopique à partir de la formule précédente.

Posant $F_p(x) = \dfrac{1}{p+1}\left(B_{p+1}(x+1) - B_{p+1}(1)\right)$, on obtient la formule (1) annoncée en **2.3** : si $S_{p,n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$ est la somme des puissances p-ièmes des n premiers entiers naturels non nuls, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_{p,n} = F_p(n).$$

Preuve. Unicité (ou analyse). Si $(B_p)_{p\geq 0}$ existe, elle est définie par B_0 et par la relation

$$(1) \qquad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad B_p(x) = p\left(\int_0^x B_{p-1}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \left(\int_0^y B_{p-1}(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y\right).$$

En effet, B_p est une primitive de $p\ B_{p-1}$, et le choix de la constante de l'intégration est imposé par le fait que B_p est d'intégrale nulle sur $[0,1]$. La condition $B_0 = 1$ et la relation (1) définissent la suite $(B_p)_{p\geq 0}$ de manière unique.

Existence (ou synthèse). Les primitives d'une fonction polynomiale sont polynomiales. On définit bien une suite de polynômes en prenant pour B_0 la fonction constante égale à 1 et en exigeant que la relation de récurrence (1) soit satisfaite. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, les formules

$$B_p' = p\ B_{p-1} \quad \text{et} \quad \int_0^1 B_p(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

sont immédiates.

Calcul de $B_{p+1}(x+1) - B_{p+1}(x)$. On établit par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ la propriété

$$(\mathcal{P}_p) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad B_{p+1}(x+1) - B_{p+1}(x) = (p+1)\ x^p.$$

Notons d'abord que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad B_1(x) = x - \frac{1}{2},$$

ce qui donne immédiatement $\mathcal{P}_0$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_p$ vraie et posons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad C_p(x) = B_{p+2}(x+1) - B_{p+2}(x).$$

Alors, en utilisant $\mathcal{P}_p$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad C_p'(x) = B_{p+2}'(x+1) - B_{p+2}'(x) = (p+2)\ \left(B_{p+1}(x+1) - B_{p+1}(x)\right) = (p+2)(p+1)x^p.$$

Il s'ensuit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad C_p(x) - C_p(0) = (p+2)x^{p+1}.$$

Il reste à noter que

$$C_p(0) = B_{p+2}(1) - B_{p+2}(0) = \int_0^1 B_{p+2}'(t)\,\mathrm{d}t = (p+2)\int_0^1 B_{p+1}(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

où la dernière relation vient du fait que $p+1 \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 416 (①). *Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $B_2(x)$ et $B_3(x)$.*

Exercice 417 (①)**.** *Si $p \geq 2$, montrer que $B_p(1) = B_p(0)$.*

Exercice 418 (②)**.** *Montrer que, si $p \in \mathbb{N}$, B_p est à coefficients rationnels, de degré p, de coefficient dominant 1.*

Exercice 419 (④)**.** *Montrer que*

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad B_p(1-x) = (-1)^p \, B_p(x).$$

Exercice 420 (③)**.** *Si $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, que vaut $\displaystyle\int_x^{x+1} B_p(t)\,\mathrm{d}t$?*

Exercice 421 (⑤)**.** *Soit $p \in \mathbb{N}^*$ un nombre impair. Montrer qu'il existe un polynôme Q_p à coefficients réels tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_p(n) = Q_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right).$$ [83]

11.3 Racines d'une équation polynomiale

Si P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ et r un élément de $\mathbb{K}$, on dit que *r est racine de P* si et seulement si

$$P(r) = 0.$$

Les premiers exercices n'utilisent que la définition des racines.

Exercice 422 (④ Racines réelles d'un polynôme à coefficients réels ∗)**.** *a) Si n est un entier pair, donner un exemple de polynôme à coefficients réels n'admettant pas de racine réelle.*

b) Si n est un entier impair et P un polynôme à coefficients réels de degré n, montrer que P admet au moins une racine réelle. On pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 423 (④ On ne peut pas piper un dé pour que la somme de deux lancers soit uniforme)**.** *On se donne deux dés. Pour $1 \leq i \leq 6$, on note p_i (resp. q_i) la probabilité d'obtenir i en lançant le premier dé (resp. le second). Les lancers sont supposés indépendants. On note S la variable aléatoire donnant la somme des deux lancers. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose*

$$P(t) = \sum_{i=1}^{6} p_i t^i \quad \text{et} \quad Q(t) = \sum_{i=1}^{6} q_i t^i.$$

a) Si $t \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\mathbf{E}(t^S) = P(t)\, Q(t).$$

b) On suppose que S suit la loi uniforme sur $\{2, \ldots, 12\}$. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \mathbf{E}(t^S) = \frac{t^2\,(t^{11}-1)}{11\,(t-1)}.$$

c) En considérant les racines réelles des polynômes P et Q, montrer que S ne peut suivre la loi uniforme sur $\{2, \ldots, 12\}$. [84]

83. Résultat déjà connu de Faulahber, qui généralise la formule $S_{3,n} = (S_{1,n})^2$ de **2.3**.

84. Cet exercice est traité de manière très différente dans l'exercice 294 de **9.5**. La méthode employée ici est un premier exemple d'utilisation des *fonctions génératrices* en probabilités.

Exercice 424 (② ∗)**.** *Soient P une fonction polynomiale à coefficients réels, z dans $\mathbb{C}$ une racine de P. Montrer que $\overline{z}$ est racine de P.*

L'exercice suivant permet de borner les racines d'un polynôme complexe en fonction des coefficients.

Exercice 425 (④ Majoration du module des racines d'un polynôme ∗)**.** *Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $a_0, \ldots, a_{n-1}$ des nombres complexes, P le polynôme défini par*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad P(z) = z^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i.$$

a) Pour $0 \leq i \leq n-1$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$, montrer que $|z^i| \leq |z^{n-1}|$.

b) Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P. Montrer, en utilisant l'inégalité triangulaire, que

$$|z| \leq \max\left(1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right).$$

Le résultat ci-après est fondamental.

Théorème 18 (Factorisation d'un polynôme admettant une racine)**.** *Soient P une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$, r un élément de $\mathbb{K}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) le nombre r est racine de P ;

(ii) il existe une fonction polynomiale Q à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = (x - r)\, Q(x).$$ [85]

Preuve. L'implication $(ii) \implies (i)$ est évidente. Prouvons la réciproque. Supposons (i) et écrivons :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

où $a_0, \ldots, a_n$ sont dans $\mathbb{K}$. On a, pour x dans $\mathbb{K}$:

$$P(x) = P(x) - P(r) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n} a_k r^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (x^k - r^k).$$

Le terme correspondant à $k = 0$ de cette somme est nul. Par ailleurs, pour $k \in \{1, \ldots, n\}$:

$$x^k - r^k = (x - r) \left(\sum_{j=0}^{k-1} r^{k-1-j} x^j\right).$$

En combinant ces deux résultats et la linéarité de la somme, on voit que l'on peut bien écrire :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = (x - r)\, Q(x)$$

où Q est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad Q(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} r^{k-1-j} x^j\right).$$

L'application Q est polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$, ce qui achève la démonstration.

85. Le polynôme Q est unique ; si P est de degré $n \in \mathbb{N}^*$, Q est de degré $n - 1$.

Exercice 426 (②). *a) Vérifier que* 4 *est racine de l'équation*

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

puis résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation suivante, après en avoir déterminé une « racine évidente » : :*

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

L'implication $(ii) \Longrightarrow (i)$ du théorème précédent admet une généralisation utile.

Théorème 19 (Factorisation d'un polynôme admettant n racines). *Soient P une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $x_1, \ldots, x_m$ des racines de P dans $\mathbb{K}$ deux à deux distinctes. Il existe une fonction polynomiale Q à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que :*

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = \prod_{k=1}^{m} (x - x_k)\ Q(x).$$

Preuve. Montrons par récurrence sur l'élément m de $\mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}_m$: « si P est une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ admettant m racines distinctes $x_1, \ldots, x_m$ dans $\mathbb{K}$, alors il existe une fonction polynomiale Q à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que l'égalité

$$P(x) = \prod_{k=1}^{m} (x - x_k)\ Q(x)$$

soit vérifiée pour tout x de $\mathbb{K}$ ».

La propriété $\mathcal{P}_1$ est l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ du théorème précédent.

Supposons $\mathcal{P}_m$ vraie. Soit P une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ admettant $m+1$ racines distinctes $x_1, \ldots, x_{m+1}$ dans $\mathbb{K}$. En particulier $x_1, \ldots, x_m$ sont des racines de P, ce qui donne, grâce à $\mathcal{P}_m$ une fonction polynomiale R à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = \prod_{k=1}^{m} (x - x_k)\ R(x).$$

Comme x_{m+1} est racine de P et n'appartient pas à $\{x_1, \ldots, x_m\}$, R admet x_{m+1} pour racine. Il existe donc, grâce au théorème précédent, une fonction polynomiale Q à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad R(x) = (x - x_{m+1})\ Q(x).$$

On obtient en fin de compte la relation suivante, qui établi la propriété $\mathcal{P}_{m+1}$:

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = \prod_{k=1}^{m+1} (x - x_k)\ Q(x).$$

Exemple *Factorisation de* $z^n - 1$

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Les n racines n-ièmes de 1 vérifient l'équation

$$z^n - 1 = 0.$$

Il existe donc une fonction polynomiale Q à coefficients complexes telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(z - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) \; Q(z).$$

La comparaison des coefficients dominants montre que Q est identiquement égale à 1. On a donc :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(z - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right).$$

Exercice 427 (③)**.** *Soit n un entier ≥ 2.*

a) Justifier la formule

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \prod_{\ell=1}^{n-1} \left(z - e^{\frac{2i\ell\pi}{n}}\right).$$

b) En appliquant la formule précédente en $z = 1$, calculer le produit $P_n = \displaystyle\prod_{\ell=1}^{n-1} \sin\left(\frac{\ell\pi}{n}\right)$.

Exercice 428 (③)**.** *Soient n un entier ≥ 3, $A_0, \ldots, A_{n-1}$ les sommets d'un polygone régulier du plan. On note O le centre de ce polygone, R le rayon du cercle de centre O passant par les a_k. Montrer que, si M est un point du plan,*

$$\prod_{k=0}^{n-1} A_k M \leq OM^n + R^n.$$

On commencera par le cas où les A_k sont les racines n-ièmes de l'unité (et donc $R = 1$); on utilisera alors la factorisation de $z^n - 1$.

Le théorème 19 admet la conséquence fondamentale suivante.

Théorème 20 (Factorisation d'un polynôme admettant n racines)**.** *Soient n dans $\mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ avec $a_n \neq 0$, P la fonction polynôme définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Alors P admet au plus n racines dans $\mathbb{K}$.

Preuve. Soient $x_1, \ldots, x_{n+1}$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$. Nous allons montrer que si les x_k, pour $1 \leq k \leq n+1$, sont racines de P, alors P est identiquement nul. Le résultat s'en déduira. Grâce au théorème précédent, le fait que $x_1, \ldots, x_{n+1}$ soient racines de P impose l'existence d'une fonction polynomiale Q à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = \prod_{k=1}^{n+1} (x - x_k) \; Q(x).$$

Si Q n'était pas identiquement nulle, on aurait, en notant d le degré de Q :

$$n = (n+1) + d.$$

Cette égalité est évidemment contradictoire.

Exercice 429 (④)**.** *Soit P une fonction polynomiale de degré $n \geq 2$ à coefficients réels. Montrer que le graphe de P ne peut contenir $n+1$ points distincts alignés.*

11.4 Complément : l'équation du second degré dans $\mathbb{C}$

L'équation polynomiale à coefficients réels $z^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle. L'introduction des nombres complexes permet de lui donner des solutions. Nous allons voir que toute équation du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$ admet des solutions dans $\mathbb{C}$.

La mise sous forme canonique du trinôme du second degré s'applique sans changement aux équations à coefficients complexes. Soient en effet a, b, c dans $\mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Posons :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Pour z dans $\mathbb{C}$, on peut écrire :

$$az^2 + bz + c = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right).$$

On a ainsi :

$$az^2 + bz + c = 0 \iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Ce calcul ramène la résolution de l'équation du second degré dans $\mathbb{C}$ à la recherche des racines carrées d'un nombre complexe. Or on a le résultat suivant, dont nous avons déjà établi la première partie en utilisant la forme trigonométrique des nombres complexes en **10.10** (théorème 13, $n = 2$), et que nous allons maintenant établir par voie algébrique.

Théorème 21 (Racines carrées d'un nombre complexe sous forme algébrique)**.** *Soit Z dans $\mathbb{C}^*$. L'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:*

$$z^2 = Z$$

admet exactement deux racines dans $\mathbb{C}$. Ces deux racines sont opposées. Elles peuvent se calculer à partir des parties réelle et imaginaire de z par des formules ne mettant en jeu que les opérations usuelles et la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$. [86]

Preuve utilisant la forme algébrique des nombres complexes. Écrivons $Z = a + ib$ avec (a, b) dans $\mathbb{R}^2$ et cherchons z sous la forme $x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La relation $z^2 = Z$ équivaut au système de deux équations :

$$x^2 - y^2 = a, \qquad 2xy = b.$$

- Si $b = 0$ et $a > 0$, le système équivaut à :

$$x^2 = a, \qquad y = 0,$$

soit :

$$z = \pm\sqrt{a}.$$

- Si $b = 0$ et $a < 0$, le système équivaut à :

$$x^2 = 0, \qquad y^2 = -a,$$

soit :

$$z = \pm i\sqrt{-a}.$$

- Si $b \neq 0$, le système équivaut à :

$$x \neq 0, \qquad y = \frac{b}{2x}, \qquad x^2 - \frac{b^2}{4x^2} = a.$$

86. Par « opérations usuelles », on entend somme, différence, produit, quotient.

La dernière équation s'écrit, en posant $t = x^2$:

$$t^2 - at - \frac{b^2}{4} = 0.$$

Vu que $-b^2/4 < 0$, cette équation admet deux racines non nulles et de signes opposés. Seule la racine positive

$$\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

est un carré. On obtient bien deux possibilités opposées pour x. Comme la valeur de x impose celle de y, le résultat est établi. Notons que ce raisonnement conduit à la formule

$$z = \pm \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \frac{b}{\sqrt{2\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}} \right),$$

qu'il serait bien entendu absurde d'apprendre par cœur !

Remarques

1. *Retour sur la démonstration*
   En pratique, on peut simplifier un peu les calculs en observant que z vérifie forcément
   $$|z|^2 = |Z|,$$
   c'est-à-dire :
   $$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$
   On connaît donc la somme et la différence de x^2 et y^2, à savoir a et $\sqrt{a^2 + b^2}$. On en déduit x^2 et y^2, ce qui donne a priori quatre valeurs possibles pour le couple (x, y). Les deux qui conviennent sont celles qui vérifient la relation manquante $2xy = b$. En fait, la condition « xy a le signe de b » suffit pour déterminer les bons couples.
2. *Absence d'une fonction racine carrée raisonnable sur* $\mathbb{C}$
   Un réel positif est le carré de deux nombres réels opposés dont un seul est positif, ce qui permet de définir sans ambiguïté la racine carrée $\sqrt{x}$ de l'élément x de $\mathbb{R}^+$ comme le seul réel ≥ 0 dont le carré est x. Il n'existe aucune manière naturelle de définir une fonction racine carrée sur le plan complexe. Il faut donc éviter la notation $\sqrt{z}$ pour $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 430 (②)**.** *Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de* $3 + 4i, 3 - 3i, 5 - 2i$ *dans* $\mathbb{C}$*.*

En combinant la forme canonique au résultat précédent, on obtient l'énoncé suivant.

Théorème 22 (L'équation du second degré dans $\mathbb{C}$)**.** *Soient* a, b, c *des nombres complexes, avec* $a \neq 0$*,* $\Delta = b^2 - 4ac$*. L'équation*

$$az^2 + bz + c = 0$$

admet deux racines distinctes z_1 *et* z_2 *si* $\Delta \neq 0$*, une racine double* $z_1 = z_2$ *si* $\Delta = 0$*. On a :*

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \qquad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

Preuve. Le premier point résulte du travail précédent. Pour le second, on peut utiliser les expressions de z_1 et z_2, mais il est de loin préférable d'observer que l'on a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad az^2 + bz + c = a\,(z - z_1)\,(z - z_2)\,,$$

d'où par identification

$$b = -a(z_1 + z_2), \qquad c = az_1z_2.$$

On peut lire « à l'envers » la seconde partie de ce résultat : deux nombres complexes z_1 et z_2 de somme s et de produit p sont tous les deux racines de l'équation :

$$z^2 - sz + p = 0.$$

La généralisation de ces formules fait l'objet du paragraphe **11.8**.

Remarque *Cas d'un trinôme à coefficients réels*

Si a, b, c sont réels et $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux racines complexes non réelles conjuguées.

Voici un exemple. Soit θ dans $\mathbb{R}$. Le trinôme

$$x^2 - 2\cos(\theta)x + 1$$

a pour discriminant

$$\Delta = 4\left(\cos^2(\theta) - 1\right) = -4\sin^2(\theta) = (2i\sin(\theta))^2\,.$$

Les racines de ce trinôme sont donc $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$; Δ est nul si et seulement si $\sin(\theta) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si θ est un multiple entier de π. Dans tous les cas, on a :

$$\forall x \in \mathbb{C}, \qquad x^2 - 2\cos(\theta)x + 1 = \left(x - e^{i\theta}\right)\left(x - e^{-i\theta}\right).$$

Noter les relations donnant la somme et le produit des racines :

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\ \cos(\theta) \quad \text{et} \quad e^{i\theta}\ e^{-i\theta} = 1.$$

Exercice 431 (①)**.** *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation*

$$z^2 + 10z + 169 = 0.$$

Exercice 432 (②)**.** *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *les équations*

$$z^2 - 2iz + i = 0, \quad z^2 + iz - 1 = 0, \quad (1 + 2i)z^2 + 3iz - (4 + i) = 0.$$

Exercice 433 (②)**.** *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation*

$$z^8 - z^4 + 1 = 0.$$

Exercice 434 (③)**.** *Pour* λ *dans* $\mathbb{R}$*, soit* E_λ *l'équation d'inconnue complexe* z *:*

$$z^2 - 2\lambda z + 1 = 0.$$

Décrire l'ensemble des racines des équations E_λ *lorsque* λ *parcourt* $\mathbb{R}$*.*

Exercice 435 (④). *Adapter les exercices* **11** *et* **12** *de* **1.4** *aux suites complexes.*

Pour des suites récurrentes d'ordre 2 réelles, on peut être obligé de passer par les complexes pour donner une expression. C'est le cas dans l'exemple suivant.

Exercice 436 (④). *a) Déterminer, en utilisant l'exercice précédent, les suites réelles* $(u_n)_{n\geq 0}$ *telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = \frac{6}{5}u_{n+1} - u_n.$$

b) Montrer que ces suites sont bornées.

11.5 Complément : les équations de degré 3 et 4

Comme dit au début du chapitre **10**, les algébristes italiens de la Renaissance ont introduit les nombres complexes pour « résoudre » les équations de degré 3 et 4. Par « résoudre », on entend ici donner des formules exprimant les racines en fonction des coefficients, formules faisant intervenir les opérations usuelles (somme, différence, produit, quotient) ainsi que des radicaux (carrés et cubiques).

La résolution des équations de degré 3 et 4 marque un tournant dans l'histoire de l'algèbre. Nous présentons ici, sous forme d'exercices, une méthode possible pour chacun des degrés 3 et 4.

Commençons par une remarque. Soient a, b, c des nombres complexes et P le polynôme défini par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad P(z) = z^3 + az^2 + bz + c.$$

On observe que, si $h \in \mathbb{C}$, alors

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad P(z+h) = z^3 + (3h+a)z^2 + (3h^2+2ha+b)z + h^3 + ah^2 + bh + c.$$

Soit $h = -\dfrac{a}{3}$. Alors

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad Q(z) = P(z+h) = z^3 + pz + q \quad \text{où} \quad p = -\frac{a^2}{3} + b, \quad q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c.$$

On a alors

$$P(z) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Q(z-h) = 0$$

où le polynôme Q est défini par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad Q(z) = z^3 + pz + q.$$

La recherche des solutions de l'équation $P(z) = 0$ est ainsi ramenée au problème analogue pour l'équation $Q(z) = 0$. Le polynôme Q a l'avantage sur P de ne pas comporter de terme en z^2.[87] Nous travaillerons désormais avec de tels polynômes.

L'exercice ci-après donne une méthode ramenant la recherche des racines d'une équation complexe de degré 3 à l'extraction de racines carrées et cubiques. Les formules obtenues in fine, dites *formules de Cardan*, théoriquement intéressantes, sont inexploitables en pratique.

87. Rappelons que nous avons déterminé dans l'exercice 168 de **6.3.1** le nombre de racines réelles d'une équation de degré 3 de la forme $x^3 + px + q = 0$ lorsque p et q sont réels.

Exercice 437 (④ Résolution de l'équation de degré 3 par la méthode de Cardan)**.** *Soient p et q des nombres complexes et P le polynôme défini par :*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad P(z) = z^3 + pz + q.$$

Nous allons expliquer comment résoudre l'équation

$$(1) \qquad P(z) = 0.$$

L'idée fondamentale du calcul est présentée dans la question suivante : on cherche une éventuelle racine de Q sous la forme d'une somme de deux nombres complexes auxquels on impose une relation supplémentaire qui simplifie le calcul.

a) Soit z un nombre complexe. Expliquer pourquoi il existe deux nombres complexes u et v (éventuellement égaux) tels que

$$z = u + v, \qquad 3uv = -p.$$

b) On écrit le nombre complexe z sous la forme $u+v$ où $3uv = -p$. Montrer que l'équation (1) *se réécrit*

$$u^3 + v^3 = -q.$$

c) À partir des relations

$$3uv = -p, \qquad u^3 + v^3 = -q,$$

déterminer une équation du second degré dont u^3 et v^3 sont racines.

d) Montrer que l'on peut exprimer les solutions de (1) *à partir des coefficients p et q par des formules faisant intervenir les opérations usuelles et l'extraction de racines carrées et cubiques.*

Exercice 438 (⑤ Formules de Cardan pour les équations de degré 3 à coefficients réels)**.** *On reprend les notations de l'exercice précédent. On suppose p et q réels et on note $\Delta = -4p^3 - 27q^2$.*

a) On sait depuis l'exercice 168 de **6.3.1** *que, si $\Delta < 0$, alors l'équation* (1) *a une unique racine réelle. Expliciter cette racine en fonction de p et q en utilisant les fonctions racine carrée et racine cubique ainsi que les opérations usuelles.*

b) On sait depuis l'exercice 168 de **6.3.1** *que, si $\Delta > 0$, alors l'équation* (1) *admet trois racines réelles. Reprendre la question a)*[88]

Exercice 439 (③)**.** *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - 6z - 40 = 0$ par la méthode de Cardan. En déduire que*

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4.$$

Exercice 440 (③)**.** *Résoudre l'équation $z^3 + 5z - 2 = 0$ par la méthode de Cardan et retrouver le résultat de l'exercice 33 de* **2.1**.

88. On constatera que l'utilisation de i et l'extraction de racines cubiques de nombres complexes semblent s'imposer. Ce phénomène, connu sous le nom de « casus irreducibilis » a longtemps intrigué les algébristes. P. Wantzel, puis, plus complètement, O. Hölder, ont montré que l'intervention des nombres complexes est en fait inévitable.

Exercice 441 (③ Résolution de l'équation de degré 4 par la méthode de Ferrari)**.** *On se propose d'indiquer comment une équation de degré* 4 *peut être ramenée à une équation de degré* 3*.*

a) En adaptant le raisonnement fait au début de ce paragraphe, montrer que l'on peut se borner au cas d'une équation de la forme $P(z) = 0$ *où :*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad P(z) = z^4 + pz^2 + qz + r, \quad \textit{avec} \ \ (p, q, r) \in \mathbb{C}^3.$$

b) Soit λ *un nombre complexe. Expliciter un polynôme complexe* T_λ *de degré au plus* 2 *tel que :*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad P(z) = \left(z^2 + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - T_\lambda(z).$$

c) Montrer que T_λ *est le carré d'un polynôme de degré au plus* 1 *si et seulement si* λ *vérifie une équation de degré* 3 *que l'on précisera.*

d) En déduire une méthode de résolution d'une équation du quatrième degré. Constater que les solutions peuvent s'exprimer à partir des coefficients à l'aide des opérations usuelles et de l'extraction de racines carrées et cubiques de nombres complexes.

Remarques

1. *Le théorème de d'Alembert-Gauss*

   On a établi dans ce texte que les équations polynomiales du second degré à coefficients complexes et les équations de la forme

   $$z^n - a = 0 \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{C}$$

   admettaient au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Les deux exercices précédents montrent qu'il en est de même des équations de degré 3 et 4. Le *théorème de d'Alembert-Gauss* assure qu'il en est de même de toute équation polynomiale de degré $n \geq 1$. Ce résultat est l'un des plus fondamentaux des mathématiques.

2. *Les équations de degré supérieur ou égal à* 5

   En revanche, il n'existe pas de méthode de résolution des équations de degré supérieur ou égal à 5 généralisant celles qui existent pour les degrés plus petits que 4. Ce fait, dont on trouve l'intuition chez Lagrange dès 1770, a été suscité beaucoup de recherches, ayant radicalement changé l'algèbre (Abel et surtout Galois, vers 1830). Mais c'est là une autre histoire !

11.6 Complément : rigidité des polynômes

Les résultats de **11.3** permettent de démontrer l'énoncé ci-après, qui est une manifestation remarquable de la *rigidité des polynômes* : une application polynomiale de degré inférieur ou égal à n est déterminée par ses valeurs en $n + 1$ points.

Cette propriété est une amélioration considérable du théorème d'unicité 16. Elle n'est pas surprenante. Une fonction polynomiale P de degré n est déterminée par $n + 1$ coefficients. Il est donc raisonnable d'espérer que les $n + 1$ conditions correspondant aux valeurs en $n + 1$ points déterminent P. En première année post-bac, le cours d'algèbre linéaire permettra de rendre rigoureux ce raisonnement heuristique.

Théorème 23 (Rigidité des polynômes)**.** *Soient n dans $\mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n$ des éléments de $\mathbb{K}$. Soient $x_1, \ldots, x_{n+1}$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$ tels que :*

$$\forall j \in \{1, \ldots, n+1\}, \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k {x_j}^k = \sum_{k=0}^{n} b_k {x_j}^k.$$

Alors :

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}, \qquad a_k = b_k.$$

En particulier, si deux applications polynomiales coïncident sur un ensemble infini, elles sont égales.

Preuve. Posons, pour x dans $\mathbb{K}$:

$$R(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k)\, x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n} b_k x^k.$$

Le polynôme R est de degré $\leq n$ et admet $n+1$ racines distinctes. Ses coefficients sont donc tous nuls, ce qui est le résultat désiré.

Ce théorème est un moyen très efficace d'établir des égalités polynomiales.

L'exercice ci-après précise le théorème 23 par une formule permettant de reconstituer une fonction polynomiale de degré au plus n à l'aide de ses valeurs sur $n+1$ point distincts. Cette formule a de très nombreuses applications.

Exercice 442 (④ Formule d'interpolation de Lagrange)**.** *Soient n dans $\mathbb{N}$, $x_0, \ldots, x_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Pour j dans $\{0, \ldots, n\}$, on pose :*

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad L_j(x) = \prod_{\substack{0 \leq i \leq n \\ i \neq j}} \left(\frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right).$$

a) Montrer que, pour j et k dans $\{0, \ldots, n\}$, $L_j(x_k)$ vaut 0 si $j \neq k$, 1 si $j = k$.

b) Soit P une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré au plus n. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = \sum_{k=0}^{n} P(x_k)\, L_k(x).$$

L'exercice ci-après est une application du précédent.

Exercice 443 (④)**.** *a) Soient $n \in \mathbb{N}$, P un polynôme de degré n à coefficients complexes. On suppose qu'il existe $n+1$ nombres rationnels distincts $x_0, \ldots, x_n$ tels que*

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}, \qquad P(x_k) \in \mathbb{Q}.$$

Montrer que P est à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

b) Réciproquement, soient $n \in \mathbb{N}$, $x_0, \ldots, x_n$ des nombres rationnels distincts, $y_0, \ldots, y_n$ des nombres rationnels. Montrer qu'il existe un polynôme P de degré au plus n à coefficients rationnels tel que

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}, \qquad P(x_k) = y_k.$$

L'exercice ci-après, indépendant de celui sur l'interpolation de Lagrange, montre que, si P est un polynôme de degré au plus $n-1$, la valeur de P au centre d'un polygone régulier à n sommets est la moyenne des valeurs de P sur les sommets de ce polygone.

Exercice 444 (④)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, P un polynôme complexe de degré au plus $n-1$.*

a) Montrer que

$$P(0) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P\left(\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)\right).$$

On pourra utiliser l'exercice 390 de **10.10**.

b) En déduire que, si $a \in \mathbb{C}$, alors

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad P(z) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P\left(z + a\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)\right).$$

11.7 Complément : polynômes de Tchebychev

Le lecteur connaît la formule de duplication du cosinus

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1,$$

qui montre que $\cos(2\theta)$ est une fonction polynomiale de $\cos(\theta)$. Il s'agit d'un phénomène général, qui met en évidence une suite de polynômes d'une grande ubiquité, découverte par Tchebychev lors de travaux sur la théorie de « l'approximation uniforme ».

Théorème 24 (Polynômes de Tchebychev)**.** *Si $p \in \mathbb{N}$, il existe une unique fonction polynomiale T_p telle que :*

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad T_p(\cos(\theta)) = \cos(p\theta).$$

Le polynôme T_p est à coefficients entiers. On a $T_0 = 1$. Si $p \in \mathbb{N}^*$, T_p est de degré p et a pour coefficient dominant 2^{p-1}.

Preuve. Existence. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on part de la formule de Moivre (**10.4**) :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^p = \cos(p\theta) + i\sin(p\theta).$$

On applique ensuite la formule du binôme :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \cos(\theta)^{p-k}\ i^k\ \sin(\theta)^k.$$

Si $k \in \mathbb{N}$, i^k est égal à $\pm i$ si k est impair, à ± 1 si k est pair. La partie réelle de l'expression ci-dessus est donc la partie de la somme correspondant aux indices pairs. Si $k = 2\ell$ avec ℓ entier, on a par ailleurs $i^{2\ell} = (-1)^\ell$. Ainsi, en prenant les parties réelles, il vient

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \cos(p\theta) = \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \binom{p}{2\ell} (-1)^\ell \cos(\theta)^{p-2\ell} \sin(\theta)^{2\ell}.$$

Posons alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad T_p(x) = \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \binom{p}{2\ell} (-1)^\ell x^{p-2\ell}(1-x^2)^\ell = \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \binom{p}{2\ell} x^{p-2\ell}(x^2-1)^\ell.$$

On a bien

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad T_p(\cos(\theta)) = \cos(p\theta).$$

Par construction, le polynôme T_p est à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et de degré p. Son coefficient dominant est égal à

$$\sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \binom{p}{2\ell} = 2^{p-1},$$

où la dernière égalité vient de l'exemple 1 de **10.7**.

Unicité. Si U_p est un polynôme vérifiant la même propriété que T_p, alors T_p et U_p coïncident sur $[-1,1]$, qui est un ensemble infini. Ils sont donc égaux d'après le théorème 23.

Exercice 445 (②)**.** *Montrer que la fonction polynomiale T_p est paire si p est pair, impaire si p est impair.*

Exercice 446 (③)**.** *a) Montrer que*

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad T_p(x) + T_{p+2}(x) = 2xT_{p+1}(x).$$

b) Retrouver à l'aide de la question a) le degré et le coefficient dominant de T_p si $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 447 (①)**.** *Expliciter les fonctions polynomiales T_3 et T_4.*

Exercice 448 (③)**.** *a) Pour p dans $\mathbb{N}^*$, déterminer les réels θ tels que* $\cos(p\theta) = 0$.

b) Pour p dans $\mathbb{N}^*$, établir la factorisation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad T_p(x) = 2^{p-1} \prod_{k=0}^{p-1} \left(x - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2p} \right) \right).$$

Exercice 449 (②)**.** *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les éléments de $[-1,1]$ tels que $|T_p(x)| = 1$ et les ranger dans l'ordre croissant.* [89]

Exercice 450 (④)**.** *a) Soit $p \in \mathbb{N}$. En dérivant l'égalité qui définit T_p, montrer qu'il existe une unique fonction polynomiale U_p tel que :*

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \sin(\theta)\ U_p(\cos(\theta)) = \sin(p\theta).$$

Préciser le degré, le coefficient dominant, la parité de U_p.

b) Pour quels $p \in \mathbb{N}$ existe-t-il une fonction polynomiale P telle que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \sin(p\theta) = P(\sin(\theta)) \ ?$$

Dans l'exercice 398, on a ramené l'équation du quatrième degré $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$ à une équation de degré 2 par le changement de variable $Z = z + \dfrac{1}{z}$. Nous allons généraliser cette méthode.

89. On observera que T_p « oscille » beaucoup ; c'est la raison fondamentale de son intervention dans un certain nombre de questions d'analyse.

Exercice 451 (⑤ Équations réciproques)**.** *Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ à coefficients complexes :*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k.$$

On suppose que P est un polynôme réciproque, ce qui signifie que

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \qquad a_k = a_{n-k}.$$

a) Montrer que les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont non nulles et que, si z est racine de P, il en est de même de $\dfrac{1}{z}$.

b) Si $p \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}^*$, montrer que

$$T_p\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z^p + \frac{1}{z^p}\right).$$

c) En déduire que, si n est pair égal à $2m$ et si on pose $Z = z + \dfrac{1}{z}$, l'équation $P(z) = 0$ équivaut à une équation de degré m en z.

d) Que se passe-t-il si n est impair ?

11.8 Complément : vers les formules de Viète

Il est en général impossible d'expliciter simplement les racines d'une équation algébrique. En revanche, certaines quantités liées aux racines se lisent directement sur les coefficients du polynôme. Notons que, puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, nous pouvons nous limiter à des polynômes à coefficients complexes.

Commençons par le cas d'un polynôme complexe de degré 3, que l'on écrit d'une part à l'aide de ses coefficients, d'autre part sous forme factorisée :

$$\forall x \in \mathbb{C}, \qquad P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,(x - x_3),$$

où $a, b, c, d, x_1, x_2, x_3$ sont dans $\mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. En développant

$$\forall x \in \mathbb{C}, \qquad ax^3 + bx^2 + cx + d = a\,(x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3).$$

Par identification :

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a}, \quad x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}.$$

Ces formules, qui remontent à Viète (fin du seizième siècle), sont les analogues de celles qui donnent la somme et le produit des deux racines d'une équation de degré 2.

Exercice 452 (②)**.** *On conserve les notations précédentes. Exprimer $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ en fonction de a, b, c, d.*

Exercice 453 (③)**.** *En utilisant l'exercice 400 de* **10.10***, calculer la somme et le produit des trois réels*

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{7}\right), \qquad k \in \{1, 2, 3\}.$$

Les deux exercices suivants montrent l'intérêt qu'il peut y avoir à voir des nombres complexes comme les racines d'une équation polynomiale.

Exercice 454 (③). *Soient x_1, x_2, x_3 trois nombres complexes. On note P le polynôme unitaire défini par :*

$$\forall x \in \mathbb{C}, \qquad P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

On écrit aussi

$$\forall x \in \mathbb{C}, \qquad P(x) = x^3 - sx^2 + ux - p.$$

En sommant les égalités

$$x_i^3 = sx_i^2 - ux_i + p \quad \textit{pour} \quad i \in \{1, 2, 3\},$$

obtenir une identité remarquable relative à

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3.$$

Exercice 455 (④). *On reprend les notations de l'exercice précédent et on suppose que x_1, x_2, x_3 sont dans $\mathbb{R}^{+*}$, que $x_1x_2x_3 = 1$ et que*

$$x_1 + x_2 + x_3 > \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}.$$

Montrer que l'un exactement des trois réels x_1, x_2, x_3 est strictement supérieur à 1.

Exercice 456 (②). *Écrire les formules de Viète pour un polynôme de degré 4.*

Généralisons à un degré quelconque. Soient $a_0, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_n$ des éléments de $\mathbb{C}$ tels que $a_n \neq 0$ et que

$$(1) \qquad \forall x \in \mathbb{C}, \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n \prod_{j=1}^{n} (x - x_j).$$

En développant, on voit que le coefficient de x^{n-1} dans le membre de droite est

$$-a_n \times \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right)$$

alors que le coefficient constant est

$$a_n \, (-1)^n \prod_{j=1}^{n} x_j.$$

Par identification des coefficients, on en déduit que

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \qquad \prod_{j=1}^{n} x_j = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Ces formules généralisent celles vues pour le trinôme du second degré. On peut les généraliser encore en considérant tous les coefficients a_k. Apparaissent des sommes indexées par des ensembles plus compliqués, dites *fonctions symétriques élémentaires* des racines $x_1, \ldots, x_n$. Ainsi, les coefficients d'un polynôme permettent de calculer toutes les quantités que l'on peut exprimer à partir des fonctions symétriques élémentaires des racines, et ce sans connaître les racines elles-mêmes.

Exercice 457 (③). *a) Déterminer le coefficient de x^{n-2} dans le membre de droite de* (1).

b) Exprimer la somme $\sum_{j=1}^{n} {x_j}^2$ en fonction de a_n, a_{n-1}, a_{n-2}.

La somme et le produit des racines n-ièmes de 1 ont été calculés dans les exercices de **10.10**. On peut les retrouver moins économiquement à partir des relations précédentes.

Exercice 458 (②). *Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Calculer la somme et le produit des racines n-ièmes de 1 à partir de la factorisation :*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(z - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right).$$

11.9 Problème : un second calcul de $\zeta(2)$

Nous avons donné dans le paragraphe **8.10** une démonstration de l'égalité

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},$$

fondée sur une expression intégrale des sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

On propose ici une autre preuve de cette égalité, dont le point de départ est très différent. Pour $m \in \mathbb{N}$, on sait, en utilisant une formule de Viète, donner une expression exacte de la somme

$$T_m = (2m+1)^2 \sum_{k=1}^{m} \operatorname{cotan}^2 \left(\frac{k\pi}{2m+1} \right),$$

où la fonction cotan est définie en **4.4**. D'autre part, comme $x \operatorname{cotan}(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$, on peut montrer que $S_m - T_m \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui permet de conclure. [90]

Problème 2 (⑤ Calcul de $\zeta(2)$). *1. Démontrer, pour t dans $]0, \pi/2]$, les inégalités :*

$$\operatorname{cotan}(t) \leq \frac{1}{t}, \qquad \frac{1}{t^2} - 1 \leq \operatorname{cotan}^2(t) \leq \frac{1}{t^2}.$$

2. Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

a) Pour z dans $\mathbb{C}$, établir la formule :

$$(z+i)^n - (z-i)^n = 2ni \prod_{k=1}^{n-1} \left(z - \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n} \right) \right).$$

b) Soit m dans $\mathbb{N}$. Pour z dans $\mathbb{C}$, montrer que :

$$(z+i)^{2m+1} - (z-i)^{2m+1} = (4m+2)i \prod_{k=1}^{m} \left(z^2 - \operatorname{cotan}^2 \left(\frac{k\pi}{2m+1} \right) \right).$$

90. Pour rester élémentaire, la démonstration proposée passe par un encadrement de cotan.

3.a) Soit m dans $\mathbb{N}^*$. En utilisant la formule du binôme, calculer le coefficient de z^{2m-2} dans le développement de :

$$(z+i)^{2m+1} - (z-i)^{2m+1}.$$

b) Soit m dans $\mathbb{N}^*$. Déduire des questions 3.a) et 2.b) la formule :

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) = \frac{m(2m-1)}{3}.$$

On pourra utiliser le polynôme Q_m défini par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad Q_m(t) = \prod_{k=1}^{m} \left(t^2 - \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right).$$

4. Déduire des questions 1.d) et 3.b) la valeur de $\zeta(2)$.

12 Arithmétique

L'arithmétique des nombres entiers est un sujet très ancien (on en trouve un traitement dans Euclide) mais inépuisable ; on y rencontre vite des questions d'énoncé simple mais actuellement inaccessibles.

Nous n'avons pas rédigé les définitions et démonstrations de base (divisibilité, division euclidienne, algorithme d'Euclide, relation de Bézout). Mais nous avons mis en évidence la structure de l'exposé « standard » de la théorie, aboutissant au théorème de décomposition en produit de facteurs premiers.

Ce chapitre, assez nettement différent des précédents, s'adresse en priorité aux lecteurs fortement motivés. [91] En effet, l'arithmétique des entiers joue dans l'immédiat post-bac un rôle moindre que les autres thèmes abordés dans ce texte, [92] et on y rencontre vite des exercices difficiles. Par la beauté de son architecture, la richesse des thèmes abordés et la variété des méthodes utilisées, elle offre cependant une excellente préparation aux mathématiques de l'enseignement supérieur.

12.1 Divisibilité, division euclidienne, congruences

Les premiers problèmes relatifs aux entiers sont les problèmes de divisibilité et de division euclidienne. Certains peuvent être traités par des techniques purement algébriques (identités remarquables, ce qui nous ramène à **2.1** et **10.7**).

Exercice 459 (②). *Déterminer les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x^2 - y^2 = 12$.*

Exercice 460 (②). *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, n^2 divise $(n+1)^n - 1$.*

Exercice 461 (②). *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, a et b dans $\mathbb{Z}$.*

a) Montrer que $a - b$ divise $a^n - b^n$.

b) On suppose que n est impair. Montrer que $a + b$ divise $a^n + b^n$.

Exercice 462 (③). *Soient m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$, $a \geq 2$ un entier.*

a) Montrer que, si m divise n, $a^m - 1$ divise $a^n - 1$.

b) On suppose que le reste de la division euclidienne de n par m est r. Montrer que le reste de la division euclidienne de $a^n - 1$ par $a^m - 1$ est $a^r - 1$.

Exercice 463 (②). *Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la factorisation $(n+1)(n-1) = n^2 - 1$, montrer que $n + 1$ divise $n^2 + 1$ si et seulement si $n + 1$ divise 2. En déduire l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $n + 1$ divise $n^2 + 1$.*

Exercice 464 (③). *En adaptant la méthode de l'exercice précédent, déterminer les $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n + 3$ divise $n^3 + 3$.*

Exercice 465 (④). *En utilisant l'exercice 30 de* **2.1**, *déterminer les $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ tels que*

$$x + y + z = 3 \quad et \quad x^3 + y^3 + z^3 = 3.$$

91. Ces lecteurs pourront trouver des compléments de niveau plus élevé sur le site de la POFM.
92. Ainsi, en CPGE, elle n'est véritablement abordée qu'en MPSI et en MPII.

L'exercice suivant est de nature différente.

Exercice 466 (③). *a) Montrer par un raisonnement arithmétique que le produit de trois entiers relatifs consécutifs est divisible par* 6.

b) Montrer que, si $k \in \mathbb{N}^*$, *le produit de* k *entiers relatifs consécutifs est divisible par* $k!$. *On utilisera les coefficients binomiaux.*[93]

Les congruences permettent de traiter de façon très économique et efficace les problèmes de divisibilité et de division euclidienne. On vérifie le résultat ci-après, qui exprime la *compatibilité des congruences avec les opérations*.

Théorème 25. *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$, a, a', b, b' *des entiers relatifs tels que*

$$a \equiv a' \ [n] \quad et \quad b \equiv b' \ [n].$$

Alors

$$a + b \equiv a' + b' \ [n], \qquad a - b \equiv a' - b' \ [n], \qquad ab \equiv a'b' \ [n].$$

Une conséquence est l'implication suivante :

$$a \equiv a' \ [n] \quad \Longrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad a^k \equiv {a'}^k \ [n].$$

Les questions relatives à une congruence modulo un entier explicite et petit peuvent être résolues par exploration systématique des cas. Cette méthode montre cependant vite ses limites.

Exercice 467 (①). *Soit* $n \in \mathbb{Z}$. *Déterminer le reste de la division euclidienne de* $n(n+1)$ *par* 6.

Exercice 468 (①). *Soit* $x \in \mathbb{Z}$. *Quelles sont les valeurs possibles de* x^2 *modulo* 4 *? modulo* 8 *?*

Exercice 469 (①). *Quels sont les* $x \in \mathbb{Z}$ *tels que* $x^2 \equiv x \ [10]$ *?*

Exercice 470 (②). *Quel est le reste de la division de* 5^{2022} *par* 8 *?*

Exercice 471 (②). *Montrer que, si* $x \in \mathbb{Z}$, $11 \mid 2x + 3 \iff 11 \mid 5x + 2$.

Exercice 472 (②). *Quels sont les* $x \in \mathbb{Z}$ *tels que* 12 *divise* $x^2 - 1$ *? tels que* 12 *divise* $x^2 - 2$ *?*

Exercice 473 (②). *Trouver le dernier chiffre de l'écriture décimale de* 3^{2022}.

Exercice 474 (②). *Retrouver l'exercice 461 en utilisant des congruences modulo* $a - b$ *et* $a + b$.

Exercice 475 (②). *a) Vérifier que, si* $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+3)^3 \equiv n^3 \ [9] \quad et \quad 7^{n+3} \equiv 7^n \ [9].$$

b) Quel est le reste de la division euclidienne de $7^n + n^3$ *par* 9 *?*

93. Le caractère entier des coefficients binomiaux provient de leur interprétation combinatoire. Une démonstration arithmétique est possible, mais non immédiate.

Exercice 476 (③). *Soit $(F_n)_{n\geq 0}$ la suite de Fibonacci (***1.3***, exemple 1). Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer le reste de la division euclidienne de F_n par 8.*

Exercice 477 (③). *Soient a et b dans $\mathbb{Z}$. On suppose que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $ax + b \equiv 0\ [m]$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $ax + b = 0$.*

Les congruences permettent d'établir les critères de divisibilité classiques.

Exercice 478 (①). *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

a) Montrer que n est divisible par 2 si et seulement si son dernier chiffre en base 10 est pair.

b) Montrer que n est divisible par 5 si et seulement si son dernier chiffre en base 10 est 0 ou 5.

Exercice 479 (②). *Soient x un entier naturel que l'on écrit en base 10 :*

$$x = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k \quad \text{où} \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad a_k \in \{0, \dots, 9\}.$$

a) Montrer que $x \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k\ [9]$.

b) Montrer de même que $x \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k\ [11]$.

On peut montrer que certaines équations diophantiennes n'ont pas de solution en examinant des congruences judicieuses.

Exercice 480 (④). *Montrer que l'équation $x^2 + y^2 = 3z^2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^3$ autre que $(0, 0, 0)$. On commencera par montrer que, si (x, y, z) est une solution alors x, y, z sont divisibles par 3.*

Exercice 481 (④). *Soit n un entier qui peut s'écrire comme somme de trois carrés d'entiers.*

a) Montrer que n n'est pas congru à 7 modulo 8.

b) Montrer que n n'est pas de la forme $4^a(8b + 7)$ avec $(a, b) \in \mathbb{N}^2$.

12.2 Nombres premiers

Rappelons qu'un nombre entier p est *premier* s'il est différent de 1 et n'admet comme diviseurs dans $\mathbb{N}^*$ que 1 est lui-même.

Nous noterons $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Les éléments de $\mathcal{P}$ inférieurs ou égaux à 100 sont $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$.

On a établi dans l'exemple 2 de **1.3** le théorème suivant, que nous préciserons en **12.6**. Il entraîne en particulier que tout entier relatif n tel que $|n| \geq 2$ admet au moins un diviseur premier.

Théorème 26 (Existence d'une décomposition en facteurs premiers). *Tout nombre entier ≥ 2 est produit de nombres premiers.*

On a établi dans l'exemple 2 de **1.4** le théorème suivant.

Théorème 27 (Il y a une infinité de nombres premiers)**.** *L'ensemble $\mathcal{P}$ est infini.*

Les premiers exercices reposent sur des techniques algébriques (factorisation).

Exercice 482 (①)**.** *Soient a et b deux entiers naturels non premiers entre eux. Montrer que l'ensemble $E_{a,b} = \{ka + b\ ;\ k \in \mathbb{N}\}$ contient au plus un nombre premier.* [94]

Exercice 483 (②)**.** *Montrer que, pour tout nombre premier $p \geq 5$, 24 divise $p^2 - 1$.*

Exercice 484 (③ Nombres de Mersenne)**.** *Soient a et n deux entiers ≥ 2. On suppose que l'entier naturel $a^n - 1$ est premier.*

a) Montrer que $a = 2$.

b) Montrer que n est premier. [95]

c) Montrer que $2^{11} - 1$ n'est pas premier.

Exercice 485 (③ Nombres de Fermat)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^n + 1$ soit premier. Montrer que n est une puissance de 2.* [96]

Exercice 486 (④)**.** *Déterminer, parmi les nombres 101, 10101, 1010101... ceux qui sont premiers.*

Exercice 487 (②)**.** *En utilisant l'exercice 32 de* **2.1***, montrer que, si m et n sont dans $\mathbb{N}^*$, $m^4 + 4n^4$ est premier si et seulement si $m = n = 1$.*

Exercice 488 (③)**.** *Montrer que, si $n \geq 2$, aucun des nombres $n! + k$, $2 \leq k \leq n$, n'est premier. Il existe donc des suites d'entiers consécutifs de longueur arbitraire dont aucun n'est premier.*

Exercice 489 (③)**.** *Quels sont les $k \in \mathbb{N}$ tels que l'ensemble des entiers n tels que $k+1 \leq n \leq k+10$ contienne le plus grand nombre de nombres premiers ? On s'intéressera aux nombres pairs et aux nombres impairs divisibles par 3.*

Voici un cas particulier élémentaire du théorème de la progression arithmétique de Dirichlet.

Exercice 490 (④ Il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4)**.** *a) Soit $n \in \mathbb{N}$ congru à 3 modulo 4. Montrer que n admet au moins un diviseur premier congru à 3 modulo 4.*

b) En adaptant la démonstration du théorème 27, en déduire que l'ensemble des nombres premiers congrus à 3 modulo 4 est infini.

Dans l'exercice suivant, on montre qu'il n'existe pas de polynôme à coefficients entiers non constant prenant des valeurs premières sur tous les entiers naturels (résultat dû à Goldbach).

94. Réciproquement, si a et b sont premiers entre eux, l'ensemble $E_{a,b}$ contient une infinité de nombres premiers. C'est un théorème difficile de Dirichlet (circa 1840), dont la preuve sort nettement du cadre de l'arithmétique élémentaire. On trouvera des exemples élémentaires dans les exercices 490 et 548.

95. Les nombres premiers de la forme $M_p := 2^p - 1$ avec p premier sont les *nombres de Mersenne*. On ignore à ce jour (2021) si leur ensemble est infini, mais on conjecture que oui. Les nombres de Mersenne fournissent en tout cas de très grands nombres premiers. Record actuel (novembre 2022) : $M_{82589933}$, qui s'écrit avec 24862048 chiffres.

96. Les nombres premiers de la forme $F_n := 2^{2^n} + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$ sont les *nombres de Fermat*. On ignore à ce jour (2021) si leur ensemble est infini ; on conjecture que les seuls nombres de Fermat premiers sont F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4.

Exercice 491 (④)**.** *Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$.*

a) Montrer que

$$\forall (k,m,n) \in \mathbb{Z}^3, \qquad P(n+km) \equiv P(n)\ [m].$$

b) En déduire que

$$\forall (k,n) \in \mathbb{Z}^2, \qquad P(n) \mid P(n+kP(n)).$$

c) Conclure que, si P n'est pas constant et si $n \in \mathbb{N}$ est tel que $P(n)$ soit premier, l'ensemble des $k \in \mathbb{Z}$ tels que $P(n+kP(n))$ soit premier est fini.

12.3 PGCD de deux entiers, théorème de Bézout

On définissait jadis à l'école primaire le *pgcd* de deux entiers naturels à partir de la décomposition en nombres premiers de ces entiers. Cette approche très naturelle (et tout à fait pertinente du point de vue pédagogique) est en fait implicitement fondée sur un résultat non immédiat, l'unicité de la décomposition en facteurs premiers, que nous établirons en **12.6**.

Dans le cadre d'un premier exposé rigoureux de l'arithmétique des nombres entiers, on définit le pgcd de deux éléments a et b de $\mathbb{N}^*$ comme le dernier reste non nul de l'algorithme d'Euclide appliqué à a et b. Nous retrouverons en **12.6** le lien avec la décomposition en facteurs premiers.

L'algorithme d'Euclide fournit les deux premiers points du théorème suivant [97] ; le troisième point se déduit immédiatement des deux premiers.

Théorème 28 (Propriétés du pgcd)**.** *Soient a et b deux éléments de $\mathbb{N}^*$.*

- *Le pgcd de a et b divise a et b.*
- *Il existe $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que le pgcd de a et b s'écrive $ax+by$ (relation de Bézout).*
- *Tout diviseur commun à a et b divise le pgcd de a et b.* [98]

Si a et b sont deux entiers relatifs, les diviseurs de a (resp. b) dans $\mathbb{Z}$ sont les diviseurs de $|a|$ (resp. $|b|$). On définit alors le pgcd de a et b comme le pgcd de $|a|$ et $|b|$. On convient que, pour tout $b \in \mathbb{Z}$, le pgcd de 0 et b est $|b|$. Il est immédiat de vérifier que les propriétés exprimées dans le théorème 28 subsistent.

Nous noterons $a \wedge b$ le pgcd de a et b. On a bien sûr $a \wedge b = b \wedge a$.

On dit que les deux entiers relatifs a et b sont *premiers entre eux* si $a \wedge b = 1$, i.e. si les seuls diviseurs communs à a et b dans $\mathbb{Z}$ sont 1 et -1.

Remarques

1. *Factorisation par le pgcd*
   Il découle immédiatement de la définition du pgcd que, si a et b sont deux éléments de $\mathbb{Z}^*$, on peut écrire $a = (a \wedge b)\, a', b = (\, a \wedge b)\, b'$ où a' et b' sont deux entiers premiers entre eux.
2. *Une condition nécessaire et suffisante pour que deux entiers ne soient pas premiers entre eux.*
   Si a et b ne sont pas premiers entre eux, $a \wedge b$ admet un diviseur premier p (grâce au théorème 26, existence de la décomposition en facteurs premiers). On voit ainsi que a et b ne sont pas premiers entre eux si et seulement s'il existe un diviseur premier qui les divise tous deux.

97. On voit en descendant l'algorithme que chacun des restes obtenus est de la forme $xa+yb$ avec x et y dans $\mathbb{Z}$; tel est en particulier le cas du pgcd de a et b. D'autre part, on voit en remontant l'algorithme que le pgcd de a et b divise chacun des restes.

98. Insistons sur le caractère non immédiat de ce résultat. Il serait raisonnable de définir le pgcd de a et b comme le plus grand diviseur commun de a et b au sens de la relation $\leq$. Montrer que tout diviseur commun à a et b divise le pgcd de a et b demande alors un certain effort.

3. *Nombres premiers à un nombre premier*
   Si $p \in \mathcal{P}$, alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, une et une seule des deux propriétés suivantes est vraie :
   - le nombre p divise n ;
   - les entiers p et n sont premiers entre eux.
4. *Ppcm*
   À côté du pgcd de deux éléments a et b de $\mathbb{N}^*$, on peut définir leur plus petit commun multiple, ou *ppcm*. Pour ce faire, on note d'abord que l'ensemble des éléments de $\mathbb{N}^*$ multiples de a et b est non vide (il contient ab). On remarque ensuite que, si m et n sont deux éléments de cet ensemble, il en est de même du reste de la division euclidienne de n par m. Le plus petit multiple commun à a et b dans $\mathbb{N}^*$ (au sens de la relation d'ordre) divise donc tous les autres. Ce nombre est noté $a \vee b$.[99]

Voici deux conséquences utiles du théorème de Bézout.

Théorème 29 (Caractérisation de Bézout des couples d'entiers premiers entre eux)**.** *Soient a et b deux entiers relatifs. Alors a et b sont premiers entre eux si et seulement s'il existe $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que*

$$(1) \qquad ax + by = 1.$$

Preuve. La relation de Bézout montre en effet que cette condition est nécessaire. D'autre part, si on a (1), tout diviseur commun à a et b divise $ax + by = 1$.

Théorème 30 (Si n est premier à des entiers, il est premier à leur produit)**.** *Soient a, b, n des entiers relatifs. Supposons que n est premier à a et b. Alors n est premier à ab.*

Plus généralement, si $r \geq 2$ est un entier, si $a_1, \ldots, a_r$ sont des entiers relatifs et si n est un entier relatif premier à chacun des a_i, $1 \leq i \leq r$, alors n est premier à $\prod_{i=1}^{r} a_i$.

Preuve. Prouvons le premier point. On dispose de r, s, t, u dans $\mathbb{Z}$ tels que

$$rn + sa = 1 \quad \text{et} \quad tn + ub = 1.$$

En faisant le produit de ces deux égalités, il vient

$$(us)ab + (rtn + rub + sta)n = 1.$$

Le second point s'en déduit par une récurrence laissée au lecteur.

Exercice 492 (①)**.** *Écrire l'algorithme d'Euclide pour $a = 1771$ et $b = 276$. Déterminer $a \wedge b$, ainsi qu'un couple de Bézout.*

Exercice 493 (②)**.** *Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que les nombres entiers $14n+3$ et $21n+4$ sont premiers entre eux. On explicitera une relation de Bézout.*

Exercice 494 (②)**.** *Soit $(F_n)_{n\geq 0}$ la suite de Fibonacci (**1.3**, exemple 1). Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $F_n \wedge F_{n+1}$.*

99. La définition du ppcm est donc en un certain sens plus simple que celle du pgcd.

Exercice 495 (②). *Soient a et b deux éléments de $\mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que x^a et x^b sont des nombres rationnels si et seulement si $x^{a\wedge b}$ est un nombre rationnel.*

Exercice 496 (③). *Soient a et b deux éléments de $\mathbb{N}^*$. Montrer que a et b sont premiers entre eux si et seulement si $a+b$ et ab sont premiers entre eux.*

Exercice 497 (③). *Soient a et b deux entiers relatifs premiers entre eux, $(k,\ell) \in {\mathbb{N}^*}^2$.*

a) Montrer que a^k et b sont premiers entre eux. On déduira d'une relation de Bézout entre a et b une relation de Bézout entre a^k et b.

b) Montrer que a^k et b^ℓ sont premiers entre eux.

Exercice 498 (③). *Soient m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n = \mathbb{U}_{m\wedge n}$.*

Exercice 499 (③). *Soient m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Montrer que tout élément z de $\mathbb{U}_{mn}$ s'écrit $z = uv$ avec $u \in \mathbb{U}_m$ et $v \in \mathbb{U}_n$.*

Exercice 500 (③). *Soient u et v deux entiers supérieurs ou égaux à 2 et premiers entre eux. Montrer que le nombre $\dfrac{\ln(v)}{\ln(u)}$ est irrationnel.*

Exercice 501 (④). *En utilisant l'exercice 462, montrer que, si $a \geq 2$ est un entier, m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$, alors $a^m - 1$ et $a^n - 1$ ont pour pgcd $a^{m\wedge n} - 1$.*

Exercice 502 (④). *Selon la valeur de $n \in \mathbb{Z}$, déterminer le pgcd de $n^3 + n$ et $2n + 1$.*

12.4 Lemme de Gauss, inversion modulaire

La relation de Bézout entraîne immédiatement le théorème suivant, dit *lemme de Gauss*.

Théorème 31 (Lemme de Gauss). *Soient a, b, c trois entiers relatifs tels que a divise bc et que a et b soient premiers entre eux ; alors a divise c.*

Preuve. Soient x et y deux entiers tels que $ax + by = 1$. Alors $acx + bcy = c$. Comme a divise bc, a divise le premier membre de l'égalité, donc aussi le second membre c.

Voici une conséquence utile.

Théorème 32 (Si un entier est divisible par des entiers premiers entre eux, il est divisible par leur produit). *Si a, b, c sont trois entiers relatifs tels que a et b sont premiers entre eux et que a et b divisent c, alors ab divise c. En d'autres termes, le ppcm de deux éléments de $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux est leur produit.*

Plus généralement, si $r \geq 2$ est un entier, si $a_1, \ldots, a_r$ sont des entiers deux à deux premiers entre eux et si c est un entier divisible par chacun des a_i, $1 \leq i \leq r$, alors il est divisible par $\displaystyle\prod_{i=1}^{r} a_i$.

Preuve abrégée. Pour le premier point, on écrit $c = au$ avec $u \in \mathbb{Z}$. Alors b divise c, donc u grâce au lemme de Gauss : $u = bv$ avec $v \in \mathbb{Z}$ et $c = abv$.

Le second point se démontre par récurrence sur r, le point important étant que, grâce au théorème 30 (**12.3**), a_r est premier à $\prod_{i=1}^{r-1} a_i$.

Exercice 503 (③)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

a) Vérifier que

$$(2n+1)\binom{2n}{n} = (n+1)\binom{2n+1}{n}.$$

b) Montrer que $n+1$ divise $\binom{2n}{n}$.

Les deux exercices suivants sont consacrés à l'équation diophantienne $ax + by = c$. On traite d'abord un exemple, puis le cas général.

Exercice 504 (② L'équation diophantienne $6x - 15y = 3$ $*$)**.** *On se propose de déterminer l'ensemble E des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $6x - 15y = 3$.*

a) Montrer que, si $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, on a

$$(x, y) \in E \iff 2(x-3) = 5(y-1).$$

b) En utilisant le lemme de Gauss, montrer que

$$E = \{(5t+3, 2t+1)\ ;\ t \in \mathbb{Z}\}.$$

Exercice 505 (④ L'équation diophantienne $ax + by = c$ $*$)**.** *Soient a et b deux éléments de $\mathbb{N}^*$ et $c \in \mathbb{Z}$. On note δ le pgcd de a et b. On se propose de déterminer l'ensemble E des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $ax + by = c$. On écrit $a = \delta a', b = \delta b'$ où a' et b' sont deux entiers premiers entre eux.*

a) Montrer que E est non vide si et seulement si $\delta \mid c$.

On suppose dans la suite que $\delta \mid c$. On fixe un élément (x_0, y_0) de E.

b) Pour $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, vérifier que

$$(x, y) \in E \iff a'(x - x_0) = b'(y_0 - y).$$

b) Montrer que

$$E = \{(x_0 + tb', y_0 - ta')\ ;\ t \in \mathbb{Z}\}.$$

Les deux exercices suivants étudient les combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{N}$ de deux entiers naturels premiers entre eux.

Exercice 506 (⑤ Relation de Bézout à coefficients dans $\mathbb{N}$)**.** *Soient a et b deux éléments de $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux.*

a) Montrer que $ab - a - b$ n'est pas de la forme $au + bv$ avec u et v dans $\mathbb{N}$.

b) Montrer que si n est un entier $\geq ab - a - b + 1$ alors n s'écrit $au + bv$ où $(u, v) \in \mathbb{N}^2$. On pourra remarquer que les $n - au$ pour $u \in \{0, \ldots, b-1\}$ sont supérieurs ou égaux à $1 - b$ et ont des classes modulo b distinctes.

Exercice 507 (⑤ Relation de Bézout à coefficients dans $\mathbb{N}$, suite)**.** *Les notations sont celles de l'exercice précédent.*

a) Montrer que si l'entier $n \leq ab - a - b - 1$ s'écrit $au + bv$ avec u et v dans $\mathbb{N}$, alors cette écriture est unique.

b) Soit $N = ab - a - b$. Dénombrer l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \ ; \ ax + by \leq N\}$.

c) Déterminer le nombre d'entiers naturels qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme $au + bv$ avec $(u, v) \in \mathbb{N}^2$.

Nous allons conclure ce paragraphe par l'*inversion modulaire* décrite dans le théorème suivant.

Théorème 33 (Condition nécessaire et suffisante pour que a admette un inverse modulo b)**.** *Soient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

- Il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $ax \equiv 1\ [b]$.

- Les nombres a et b sont premiers entre eux.

Si tel est le cas, les $y \in \mathbb{Z}$ tels que $ay \equiv 1\ [b]$ sont les entiers congrus à x modulo b. Il en existe donc un et un seul dans $\{0, \dots, b-1\}$. [100]

Preuve. Étape 1. D'après le paragraphe précédent, a et b sont premiers entre eux si et seulement s'il existe $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $ax + by = 1$, i.e. s'il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $ax \equiv 1\ [b]$.

Étape 2. Soient $x \in \mathbb{Z}$ tel que $ax \equiv 1\ [b]$. Si $y \in \mathbb{Z}$, on a

$$ay \equiv 1\ [b] \quad \iff \quad ay \equiv ax\ [b] \quad \iff \quad b \mid a\,(y - x) \quad \iff \quad b \mid (y - x),$$

où la dernière équivalence vient du lemme de Gauss.

Un entier x tel que $ax \equiv 1\ [b]$ est un *inverse de a modulo b*. Par exemple, $7 \times 6 \equiv 1\ [41]$, donc 7 est un inverse de 6 modulo 41.

Remarque *Application à la résolution de congruences*

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux, a' un inverse de a modulo b, et $c \in \mathbb{Z}$. Pour $x \in \mathbb{Z}$, on a alors, grâce à la compatibilité des congruences et de la multiplication,

$$ax \equiv c\ [b] \quad \iff \quad x \equiv a'c\ [b].$$

Reprenons l'exercice 471 de **12.1**. Soit $x \in \mathbb{Z}$. Comme 6 est un inverse de 2 modulo 11, on a

$$11 \mid (2x + 3) \quad \iff \quad 2x \equiv -3\ [11] \quad \iff \quad x \equiv -18\ [11] \quad \iff \quad x \equiv 4\ [11].$$

De même, comme -2 est un inverse de 5 modulo 11,

$$11 \mid (5x + 2) \quad \iff \quad 5x \equiv -2\ [11] \quad \iff \quad x \equiv 4\ [11].$$

Exercice 508 (①)**.** *Déterminer un inverse de 7 modulo 100, puis résoudre dans $\mathbb{Z}$ la congruence $7x \equiv 54\ [100]$.*

100. Qui est bien sûr dans $\{1, \dots, b-1\}$.

Exercice 509 (①). *a) Calculer les inverses modulo* 8 *des entiers de* $\{0,\dots,7\}$ *premiers à* 8.

b) Calculer les inverses modulo 10 *des entiers de* $\{0,\dots,9\}$ *premiers à* 10.

Exercice 510 (②). *Soit* $n \geq 2$ *un entier. Montrer que* n *est premier si et seulement si tout élément de* $\{1,\dots,n-1\}$ *admet un inverse modulo* n.

La démonstration d'Euler du théorème de Wilson donnée dans l'exercice suivant est une application intéressante de l'inversion modulaire.

Exercice 511 (④ Théorème de Wilson $*$). *Soit* p *un nombre premier.*

a) Justifier que tout $a \in \{1,\dots,p-1\}$ *admet un unique inverse modulo* p, *que l'on note* $i(a)$.

b) Montrer que les seuls $a \in \{1,\dots,p-1\}$ *tel que* $i(a) = a$ *sont* 1 *et* $p-1$ *(qui sont égaux si* $p = 2$, *distincts sinon).*

c) En regroupant judicieusement les facteurs du produit $\prod_{a=1}^{p-1} a$, *établir le théorème de Wilson :*

$$(p-1)! \equiv -1\ [p].$$

d) On suppose que $n \geq 2$ *est un entier tel que* $(n-1)! \equiv -1\ [n]$. *Montrer que tout élément de* $\{1,\dots,n-1\}$ *admet un inverse modulo* n *et en déduire que* n *est premier.* [101]

Exercice 512 (④ Complément au théorème de Wilson). *Soit* $n \geq 6$ *un entier non premier. Montrer que* n *divise* $(n-1)!$.

12.5 Complément : racines rationnelles d'un polynôme

Le théorème suivant donne un moyen pratique de déterminer les racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers. En dépit de sa simplicité, il a beaucoup d'applications.

Théorème 34 (Test des racines rationnelles pour un polynôme à coefficients entiers). *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0,\dots,a_n$ *des nombres entiers relatifs, avec* $a_0 a_n \neq 0$, P *la fonction polynomiale définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Soit r *une racine rationnelle de* P. *On écrit* $r = \dfrac{p}{q}$ *où* $p \in \mathbb{Z}$ *et* $q \in \mathbb{N}^*$ *sont premiers entre eux. Alors* q *divise* a_n *et* p *divise* a_0.

En particulier, si P *est unitaire, les racines rationnelles de* P *sont entières.*

Preuve. La relation $P(r) = 0$ s'écrit, après multiplication par q^n,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k p^k q^{n-k} = 0.$$

Si $0 \leq k \leq n-1$, $n-k \geq 1$ et q divise q^{n-k}. Il s'ensuit que q divise $\sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k q^{n-k}$, donc que q divise $a_n p^n$. Comme p et q sont premiers entre eux, q et p^n le sont aussi grâce au théorème 30. On

101. Vu le coût de $n!$, ce résultat ne peut malheureusement fonder aucun test de primalité.

peut alors appliquer le lemme de Gauss pour obtenir que q divise a_n. On montre que p divise a_0 de manière tout à fait analogue.

Redémontrons à titre d'exemple l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Posons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = x^2 - 2.$$

Le théorème 34 entraîne que, si x est une racine rationnelle de P, x est un entier divisant 2, donc égal à ± 1 ou à ± 2. Aucun de ces quatre nombres n'est racine de P, donc les racines de P sont irrationnelles, i.e. $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 513 (②). *On a montré en* **6.3.1** *que l'équation $x^5 - 5x + 7 = 0$ admet une unique solution réelle. Déduire du théorème 34 que cette solution est un nombre irrationnel.*

Exercice 514 (②). *Déduire du théorème 34 que, si $k \geq 2$ est un entier et $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre $\sqrt[k]{n}$ est un rationnel si et seulement s'il est entier, i.e. si et seulement si n est puissance k-ième d'un entier.*

Exercice 515 (③). *Trouver un polynôme unitaire de degré 4 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ dont $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ soit racine et en déduire que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est irrationnel, ce que l'on a établi autrement dans l'exercice 21 de* **1.4**.

L'exercice ci-après combine le théorème 34 aux formules de Viète.

Exercice 516 (④). *a) Soient x_1 et x_2 deux nombres rationnels tels que $x_1 + x_2$ et x_1x_2 soient entiers. Montrer que x_1 et x_2 sont entiers.*

b) Donner deux nombres réels irrationnels x_1 et x_2 tels que $x_1 + x_2$ et x_1x_2 soient entiers.

c) Soient x_1, x_2 et x_3 trois nombres rationnels tels que $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ et $x_1x_2x_3$ soient entiers. Montrer que x_1, x_2 et x_3 sont entiers.

Dans l'exercice ci-après, on utilise une variante de la suite des polynômes de Tchebychev pour donner une démonstration plus naturelle du résultat de l'exercice 396 de **10.10** (détermination des nombres rationnels r tels que $\cos(\pi r)$ soit rationnel).

Exercice 517 (④ Rationnels r tels que $\cos(\pi r)$ soit rationnel, suite). *a) Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme P_n à coefficients réels tels que*

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad P_n(2\ \cos(\theta)) = 2\ \cos(n\theta).$$

b) Expliciter P_0, P_1, P_2 et P_3.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

c) Montrer que, si $n \geq 1$, P_n est unitaire.

d) En utilisant la question c) de l'exercice précédent, montrer que, si r est un nombre rationnel tel que $\cos(\pi r)$ soit rationnel, alors $2\cos(\pi r)$ est entier : c'est le résultat de l'exercice 396.

12.6 Décomposition en facteurs premiers

On déduit immédiatement du lemme de Gauss le premier point de l'énoncé ci-dessous (souvent nommé *lemme d'Euclide*). Le second point s'en déduit par récurrence.

Théorème 35 (Lemme d'Euclide)**.** *Soit p un nombre premier.*

- Si a et b sont deux entiers relatifs tels que p divise ab, alors p divise a ou b.

- Si $m \in \mathbb{N}^*$, si $a_1, \ldots, a_m$ sont des entiers relatifs tels que p divise $\prod_{i=1}^{m} a_i$, alors p divise au moins un des a_i.

Exercice 518 (②)**.** *Déduire le théorème 30 de l'énoncé précédent et de la remarque 2 de* **12.3**.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème fondamental ci-après.

Théorème 36 (Existence et unicité de la décomposition en facteurs premiers)**.** *Tout entier naturel $n \geq 1$ se décompose en produit de facteurs premiers. Cette décomposition est unique à l'ordre près.*

Preuve abrégée. Le théorème comporte deux assertions de difficulté bien différentes :

- l'*existence* de la décomposition est une récurrence forte facile, détaillée en **1.3** et rappelée en **12.2** ;

- l'unicité de la décomposition, qui repose sur le lemme d'Euclide.

Établissons, sans formaliser complètement, l'unicité de la décomposition. Cette unicité est évidente pour $n = 2$. Supposons que $n \geq 3$ et que tout entier compris entre 2 et $n-1$ admette, à renumérotation près, une unique écriture comme produit de nombres premiers. Écrivons

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i = \prod_{j=1}^{s} q_j$$

où r et s sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$ et les p_i et les q_j sont des nombres premiers. Comme p_1 divise le produit $\prod_{j=1}^{s} q_j$, le lemme d'Euclide montre qu'il existe j tel que p_1 divise q_j. Quitte à renuméroter les q_j, on peut supposer que p_1 divise q_1. Comme p_1 et q_1 sont premiers, il s'ensuit que $p_1 = q_1$. Ainsi

$$\frac{n}{p_1} = \prod_{i=2}^{r} p_i = \prod_{j=2}^{s} q_j.$$

En utilisant l'unicité à l'ordre près de la décomposition en facteur premiers de l'entier $\dfrac{n}{p_1}$ (récurrence), on peut conclure à l'unicité, à l'ordre près, de la décomposition en facteurs premiers de n.

Remarques *Conséquences de la décomposition en facteurs premiers*

1. *Nombre de diviseurs d'un élément de $\mathbb{N}^*$*

   Écrivons $n = \prod_{i=1}^{r} {p_i}^{\alpha_i}$ où $p_1 < \cdots < p_r$ sont des nombres premiers et où les α_i sont des éléments de $\mathbb{N}^*$; alors les diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$ sont les

   $$\prod_{i=1}^{r} {p_i}^{\beta_i} \quad \text{où} \quad \forall i \in \{1, \ldots, r\}, \quad \beta_i \in \{0, \ldots, \alpha_i\}.$$

On note classiquement $d(n)$ le nombre de diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$. Ce qui précède établit que

$$d(n) = \prod_{i=1}^{r}(1+\alpha_i).$$

En effet, si $1 \leq i \leq r$, il y a exactement $1+\alpha_i$ choix pour l'exposant β_i.

2. *Valuations*
Le théorème 36 permet de définir, si $n \in \mathbb{N}^*$ et si p est un nombre premier, la *p-valuation de n* comme l'exposant $v_p(n)$ (bien défini par unicité) de p dans la décomposition de n en facteurs premiers. L'entier naturel $v_p(n)$ est égal à 0 si et seulement si p ne divise pas n.

On notera que

$$\forall p \in \mathcal{P}, \qquad v_p(1) = 0.$$

Les valuations permettent d'exprimer simplement un certain nombre de propriétés. Ainsi,

$$\forall (a,b) \in {\mathbb{N}^*}^2, \quad \forall p \in \mathcal{P}, \qquad v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b).$$

Par conséquent, on a, pour m et n dans $\mathbb{N}^*$, l'équivalence

$$m|n \iff \forall p \in \mathcal{P},\ v_p(m) \leq v_p(n),$$

ce qui redonne de façon plus ramassée la description ci-dessus des diviseurs de n.

3. *Calcul du pgcd et du ppcm à partir de la décomposition en facteurs premiers*
Soient m et n dans $\mathbb{N}^*$. D'après la fin de la remarque précédente, la décomposition en facteurs premiers de $m \wedge n$ est donnée par

$$\forall p \in \mathcal{P}, \qquad v_p(m \wedge n) = \min(v_p(m), v_p(n)).$$ [102]

De même, la décomposition en facteurs premiers de $m \vee n$ est donnée par

$$\forall p \in \mathcal{P}, \qquad v_p(m \vee n) = \max(v_p(m), v_p(n)).$$ [103]

Comme

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \qquad \min(u,v) + \max(u,v) = u + v,$$

on en déduit aisément la relation

$$\forall (m,n) \in {\mathbb{N}^*}^2, \qquad (m \wedge n)\,(m \vee n) = mn.$$

4. *Nombres premiers entre eux et décomposition en facteurs premiers*
Un cas particulier du point précédent est que m et n sont premiers entre eux si et seulement si leurs décompositions ne contiennent aucun facteur premier commun.

Application. Si m et n sont premiers entre eux, si k et ℓ sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$, alors m^k et n^ℓ sont premiers entre eux, résultat prouvé autrement dans l'exercice 497 de **12.3**.

5. *Retour sur certains résultats précédents*
Le théorème 36 implique, de façon très explicite, plusieurs des résultats précédents, notamment les théorèmes 29 à 32. Cependant, la route choisie fait que le théorème 31 (lemme de Gauss) joue un rôle crucial dans la démonstration du théorème 36. [104]

102. Si u et v sont deux nombres réels, le symbole $\min(u,v)$ désigne le plus petit des deux nombres u et v.
103. Si u et v sont deux nombres réels, le symbole $\max(u,v)$ désigne le plus grand des deux nombres u et v.
104. Les relations entre les diverses propriétés sont clarifiées par les faits élémentaires de l'*arithmétique des anneaux commutatifs*.

6. *Caractérisation des puissances k-ièmes, applications*
   Soient $a \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 2$ un entier. Alors il existe $a' \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = a'^k$ si et seulement si, pour tout nombre premier p (ou pour tout nombre premier p divisant a), $v_p(a)$ est un multiple de k.
7. *Irrationalité de $\sqrt[k]{n}$*
   On peut utiliser la remarque précédente pour démontrer le résultat suivant (dont on trouve une approche différente dans l'exercice 514 de **12.5**) : si $k \geq 2$ est un entier et si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\sqrt[k]{n}$ n'est rationnel que s'il est entier, i.e. si n est puissance k-ième d'un élément de $\mathbb{N}^*$. Supposons en effet que
   $$\sqrt[k]{n} = \frac{a}{b} \quad \text{où} \quad (a,b) \in \mathbb{N}^{*2}.$$
   Alors, $b^k n = a^k$. Si p est un nombre premier, on en déduit que
   $$v_p(b^k) + v_p(n) = v_p(a^k) \quad \text{i.e.} \quad v_p(n) = k\,(v_p(a) - v_p(b))\,,$$
   ce qui entraîne que $v_p(n)$ est divisible par k.

Exercice 519 (①). *a) Déterminer les diviseurs de* 75000. *Quel est leur nombre ?*
b) Mêmes questions avec 2022.

Exercice 520 (②). *Déterminer les couples (x,y) d'éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que $x \wedge y = 5$ et $xy = 300$.*

Exercice 521 (②). *Quels sont les entiers naturels n pouvant s'écrire sous la forme ab où a et b sont deux entiers supérieurs ou égaux à 2 et premiers entre eux ?*

Exercice 522 (②). *Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \vee 6 = 96$.*

Exercice 523 (②). *Quel est le plus petit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $d(n) = 10$?*

Exercice 524 (②). *Soient a et b dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que a divise b si et seulement si a^2 divise b^2.*

Exercice 525 (③). *Soient a et b dans $\mathbb{N}^*$ tels que, pour tout entier $n \geq 1$, a^n divise b^{n+1}. Montrer que a divise b.*

Exercice 526 (③). *Soient a et b deux éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que $a^2 = b^3$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = c^3$ et $b = c^2$.*

Exercice 527 (③). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer en fonction de la décomposition en facteurs premiers de n le nombre de couples $(x,y) \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que $xy = n$ et $x \wedge y = 1$.*

Exercice 528 (②). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que n est le carré d'un nombre entier si et seulement si $d(n)$ est impair.*

Exercice 529 (③). *a) Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Quel est le minimum de la fonction*

$$x \in [1, +\infty[\longmapsto \frac{1+ax}{1+x} \ ?$$

b) Soient $n \geq 2$, $k \geq 2$ et $r \geq 1$ des entiers. On suppose que n admet r diviseurs premiers. Montrer que

$$d(n^k) \geq \left(\frac{k+1}{2}\right)^r \ d(n).$$

Exercice 530 (③). *Soit $E = \{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \ ; \ m^2 - 1 = 2^n\}$.*

a) Montrer que, si $(m,n) \in E$, $m-1$ et $m+1$ sont de la forme 2^k avec $k \in \mathbb{N}$.

b) Déterminer E.

Exercice 531 (④). *Soit $E = \{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \ ; \ 3^m - 1 = 2^n\}$.*

a) Montrer que, si $(m,n) \in E$ et $n \geq 3$, alors m est pair. On pourra utiliser une congruence avec un module bien choisi.

b) Déterminer E.

Exercice 532 (②). *Soient p un nombre premier, a et b deux éléments de $\mathbb{N}^*$. Montrer que*

$$v_p(a+b) \geq \min(v_p(a), v_p(b)).$$

Si $v_p(a) \neq v_p(b)$, montrer que cette inégalité est une égalité.

Exercice 533 (③). *Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n^2+n+1}$ est un nombre irrationnel. On pourra appliquer la remarque 7.*

L'exercice ci-après est souvent utile dans l'étude d'équations diophantiennes.

Exercice 534 (③). *Soient $k \geq 2$ un entier, a et b deux éléments de $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux, $c \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $ab = c^k$. Montrer qu'il existe a' et b' dans $\mathbb{N}^*$ tels que $a = a'^k$ et $b = b'^k$.*

Exercice 535 (④). *Soient $k \geq 2$ un entier, $n \in \mathbb{N}^*$.*

a) Montrer que $n(n+1)$ n'est pas de la forme m^k avec $m \in \mathbb{N}^*$. On utilisera l'exercice précédent.

b) Montrer que $n(n+1)(n+2)$ n'est pas de la forme m^k avec $m \in \mathbb{N}^*$. On utilisera l'exercice précédent.

Exercice 536 (④ Triplets pythagoriciens). *Les triplet pythagoriciens*[105] *sont les (x,y,z) de $\mathbb{N}^{*3}$ tels que*

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Le triplet pythagoricien (x,y,z) est dit primitif si le seul diviseur commun de x, y et z dans $\mathbb{N}^*$ est 1. Exemple : $(3,4,5)$.

Le but de l'exercice est de décrire les triplets pythagoriciens.

105. Ainsi nommés parce qu'ils paramètrent les triangles rectangles dont les longueurs des côtés sont entières.

a) Montrer que tout triplet pythagoricien s'écrit (du, dv, dw) où $d \in \mathbb{N}^*$ et où (u, v, w) est un triplet pythagoricien primitif.

Dans les questions b) à d), (x, y, z) est un triplet pythagoricien primitif.

b) Montrer que x et y n'ont pas la même parité et que z est impair.

c) Montrer qu'il existe deux éléments u et v de $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que

$$z + x = 2u \quad et \quad z - x = 2v.$$

d) Montrer qu'il existe r et s dans $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $r > s$ et que

$$(x, y, z) = (r - s, 2rs, r + s).$$

e) Soient r et s deux éléments premiers entre eux de $\mathbb{N}^*$ tels que $r > s$. Montrer que

$$(x, y, z) = (r - s, 2rs, r + s)$$

est un triplet pythagoricien primitif.

Exercice 537 (④ Nombres parfaits)**.** *Un entier naturel $n \geq 2$ est parfait si la somme des diviseurs de n autres que n dans $\mathbb{N}^*$ est égale à n, autrement dit si la somme des diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$ est égale à $2n$.*

a) Vérifier que 6 et 28 sont des nombres parfaits.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $p := 2^n - 1$ soit premier (i.e. un nombre de Mersenne, exercice 484). On pose $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$. Montrer que N est parfait. [106]

Exercice 538 (⑤ Nombres parfaits, suite)**.** *Montrer que tout nombre parfait pair est de la forme décrite dans l'exercice précédent.* [107]

Exercice 539 (③ Entiers dont les diviseurs premiers appartiennent à un ensemble fini prescrit)**.**
a) Soient $m \in \mathbb{N}^*$, p un diviseur premier de m. Montrer que

$$v_p(m) \leq \frac{\ln(m)}{\ln(p)}.$$

b) Soient $r \in \mathbb{N}^*$, $p_1 < \cdots < p_r$ des nombres premiers, A l'ensemble des éléments de $\mathbb{N}^*$ dont les diviseurs premiers appartiennent à $\{p_1, \ldots, p_r\}$. Montrer que

$$|A \cap \{1, \ldots, n\}| \leq \prod_{i=1}^{r} \left(1 + \frac{\ln(n)}{\ln(p_i)}\right).$$

Exercice 540 (⑤)**.** *Soit P un polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{Z}$. En utilisant éventuellement l'exercice précédent, montrer que l'ensemble des nombres premiers p tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $P(n) \neq 0$ et $p | P(n)$ soit infini, ce qui généralise en un certain sens l'exercice 491.*

106. Résultat présent chez Euclide.
107. Résultat dû à Euler. On ignore en 2024 s'il existe des nombres parfaits impairs.

12.7 Le petit théorème de Fermat

Théorème 37 (Petit théorème de Fermat)**.** *Soit p un nombre premier. Alors*

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \qquad x^p \equiv x \ [p].$$

De manière équivalente, pour tout $x \in \mathbb{Z}$ non divisible par p, on a $x^{p-1} \equiv 1 \ [p]$.

Preuve du théorème 37. Étape 1. On commence par noter le résultat suivant, intéressant en lui-même et souvent utile.

Théorème 38 (Coefficients binomiaux $\binom{p}{k}$ si p est premier)**.** *Soient p un nombre premier et $k \in \{1, \dots, p-1\}$. Alors p divise $\binom{p}{k}$.*

Preuve du théorème 38. Le coefficient binomial $\binom{p}{k} = \dfrac{p!}{k!\,(p-k)!}$ est entier, donc $k!\,(p-k)!$ divise $p! = p\,(p-1)!$. Mais, comme $1 \leq k \leq p-1$ et p premier, p est premier à $k!\,(p-k)!$, donc $k!\,(p-k)!$ divise $(p-1)!$ grâce au lemme de Gauss. C'est le résultat désiré.

Étape 2. Pour $x \in \mathbb{Z}$, on a

$$(x+1)^p - (x+1) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k - (x+1).$$

Le théorème 38 entraîne alors que

$$(x+1)^p - (x+1) \equiv x^p - x \ [p].$$

En particulier

$$(x+1)^p \equiv x+1 \ [p] \quad \Longleftrightarrow \quad x^p \equiv x \ [p].$$

Étape 3. Comme $0^p \equiv 0 \ [p]$, l'étape 2 permet de montrer par récurrence que

$$\forall x \in \mathbb{N}, \qquad x^p \equiv x \ [p],$$

puis, toujours par récurrence, que

$$\forall x \in \mathbb{N}, \qquad (-x)^p \equiv -x \ [p].$$

On en déduit la première forme du résultat.

Étape 4. Supposons x non divisible par p, donc premier à p puisque p est premier. Puisque p divise $x^p - x = x(x^{p-1} - 1)$, le lemme de Gauss assure que p divise $x^{p-1} - 1$.

Exercice 541 (①)**.** *Soient p un nombre premier, $x \in \mathbb{Z}$, m et n deux entiers naturels tels que $m \equiv n \ [p-1]$. Montrer que $x^n \equiv x^m \ [p]$.*

Exercice 542 (②)**.** *Quels sont les nombres premiers p tels que p divise $7^p + 8^p$?*

Exercice 543 (②)**.** *Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $x^{11} \equiv x \ [33]$.*

Exercice 544 (③)**.** *a) Décomposer* 2730 *en facteurs premiers.*

b) Montrer que, pour tout nombre premier p *divisant* 2730, $p-1$ *divise* 12*.*

c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$*, on a* $x^{13} \equiv x\ [2730]$*.*

Exercice 545 (③ Nombres de Carmichaël)**.** *a) Décomposer* $n = 561$ *en produits de facteurs premiers et vérifier que, pour tout diviseur premier* p *de* n*,* $p-1$ *divise* $n-1$*.*

b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$*,*

$$x^{561} \equiv x\ [561].$$

Ainsi, 561*, qui n'est pas premier, vérifie cependant la congruence donnée par le petit théorème de Fermat.*

c) Plus généralement, soient $r \geq 2$ *un entier,* $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ *des nombres premiers et* $n = \prod_{i=1}^{r} p_i$*. On suppose que, pour tout* $i \in \{1, \ldots, r\}$*,* $p_i - 1$ *divise* $n-1$*. Montrer que*

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \qquad x^n \equiv x\ [n].$$ [108]

Exercice 546 (③)**.** *En utilisant éventuellement le théorème 38, montrer que, si* p *est un nombre premier et* $k \in \{0, \ldots, p-1\}$*,* $\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k\ [p]$*.*

Exercice 547 (④ Carrés modulo un nombre premier)**.** *Soit* p *un nombre premier. Si* $x \in \mathbb{Z}$*, on dit que* x *est un carré modulo* p *s'il existe* $y \in \mathbb{Z}$ *tel que* $x \equiv y^2\ [p]$*.*

a) Vérifier que tout $x \in \mathbb{Z}$ *est un carré modulo* 2*.*

b) Quels sont les $x \in \mathbb{Z}$ *qui sont des carrés modulo* 3 *?* 5 *?* 7 *?*

c) On suppose que $x \in \mathbb{Z}$ *n'est pas divisible par* p *et est un carré modulo* p*. Montrer que*

$$x^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\ [p].$$

d) On suppose que $p \equiv 3\ [4]$*. Montrer que* -1 *n'est pas un carré modulo* p*.*

e) On suppose que $p \equiv 1\ [4]$*. En utilisant le théorème de Wilson (exercice 511), montrer que* -1 *est un carré modulo* p*.*

Exercice 548 (④ Il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4)**.** *Soient* $n \geq 2$ *un entier,* p *un diviseur premier de* $(n!)^2 + 1$*.*

a) Montrer, en utilisant la question d) de l'exercice précédent, que $p \equiv 1\ [4]$*.*

b) Montrer que $p > n$*.*

c) Conclure que l'ensemble des nombres premiers congrus à 1 *modulo* 4 *est infini.*

108. Les nombres n de cette forme sont dits *de Carmichaël*. On sait depuis 1992 que leur ensemble est infini.

Exercice 549 (④ Les théorèmes de Wilson et Fermat par la méthode de Lagrange)**.** *Soient p un nombre premier, P le polynôme défini par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = \prod_{j=1}^{p-1}(x+j).$$

Le polynôme P est de degré $p-1$, unitaire, à coefficients entiers. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = x^{p-1} + \sum_{i=0}^{p-2} a_i x^i.$$

a) On se propose de démontrer qu'il existe un polynôme Q à coefficients entiers divisibles par p tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = x^{p-1} - 1 + Q(x).$$

Montrer que ce résultat entraîne le petit théorème de Fermat et le théorème de Wilson (exercice 511 de **12.4***).*

b) Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (x+1)P(x+1) = (x+p)P(x).$$

c) En déduire, en raisonnant par récurrence sur i, que

$$\forall i \in \{2, \dots, p-1\}, \quad p \mid a_{p-i}.$$

d) En déduire également, par examen des coefficients constants, que

$$1 + \sum_{j=0}^{p-2} a_j = p a_0.$$

e) Conclure.[109]

Exercice 550 (④ Le petit théorème de Fermat par la méthode d'Euler)**.** *Soient p un nombre premier, $x \in \mathbb{Z}$ non divisible par p.*

a) Montrer que l'application qui à $a \in \{1, \dots, p-1\}$ associe le reste $r(a)$ de la division euclidienne de ax par p est une bijection de $\{1, \dots, p-1\}$ sur lui-même.

b) En faisant le produit des congruences $ax \equiv r(a)\ [p]$ pour $a \in \{1, \dots, p-1\}$, retrouver le théorème 37.

Exercice 551 (④ Théorème de Cipolla sur les nombres a-pseudo premiers)**.** *Soit $a \geq 2$ un entier. On se propose de montrer qu'il y a une infinité d'entiers n non premiers tels que $a^{n-1} \equiv 1\ [n]$.*

Dans les questions a) et b), p est un nombre premier ne divisant pas $a(a^2-1)$. On pose :

$$n_p = \frac{a^{2p}-1}{a^2-1}.$$

a) Vérifier les congruences : $a^{2p} \equiv 1\ [n_p]$, $n_p \equiv 1\ [2p]$ et $a^{n_p-1} \equiv 1\ [n_p]$.

b) Montrer que n_p n'est pas premier, et conclure.[110]

109. Wilson a simplement énoncé le théorème qui porte son nom ; la démonstration proposée ici (Lagrange, 1771) est sans doute la première.
110. Cipolla, 1904.

Exercice 552 (⑤ Le théorème LTE)**.** *Soient $p \in \mathcal{P} \setminus \{2\}$, x et y deux entiers relatifs. On suppose que p divise $y - x$, mais pas x (et donc pas y). Montrer que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y) + v_p(n).$$ [111]

12.8 Complément : le théorème des restes chinois

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{N}^*$, u et v deux entiers relatifs. On cherche l'ensemble E des entiers relatifs x vérifiant les deux congruences

$$x \equiv u\ [a] \quad \text{et} \quad x \equiv v\ [b].$$ [112]

Lorsque a et b sont premiers entre eux [113], la réponse est donnée par le théorème suivant.

Théorème 39 (Théorème des restes chinois pour deux modules)**.** *Soient a et b deux entiers naturels premiers entre eux, u et v dans $\mathbb{Z}$. Il existe $w \in \mathbb{Z}$ congru à u modulo a et à v modulo b. On a alors*

$$x \equiv u\ [a] \text{ et } x \equiv v[b] \quad \Longleftrightarrow \quad x \equiv w\ [ab].$$

Un système de deux congruences avec des modules premiers entre eux revient donc à une unique congruence modulo leur produit. Bien entendu, w peut être choisi dans $\{0, \dots, ab - 1\}$.

Reformulation : l'intersection de deux progressions arithmétiques $u + \mathbb{Z}a$ et $v + \mathbb{Z}b$ est la progression arithmétique $w + \mathbb{Z}ab$.

Preuve. Le point clé est de démontrer l'existence de w tel que $w \equiv u\ [a]$ et $w \equiv v\ [b]$, car alors, on a, pour $x \in \mathbb{Z}$, les équivalences suivantes, dont la dernière vient du théorème 32

$$(x \equiv u\ [a] \text{ et } x \equiv v\ [b]) \quad \Longleftrightarrow \quad (x \equiv w\ [a] \text{ et } x \equiv w\ [b]) \quad \Longleftrightarrow \quad x \equiv w\ [ab].$$

Déterminer un w convenable revient à exhiber un nombre qui s'écrive simultanément $u + ra$ et $v + sb$ avec r et s dans $\mathbb{Z}$. Or, si $(r, s) \in \mathbb{Z}^2$,

$$u + ra = v + sb \quad \Longleftrightarrow \quad v - u = ra - sb.$$

La relation de Bézout assure l'existence de r' et s' dans $\mathbb{Z}$ tels que $r'a - s'b = 1$. Il reste à poser $r = (v - u)r',\ s = (v - u)\ r'$.

On notera que la démonstration fournit une méthode pour obtenir w.

Exercice 553 (①)**.** *Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $x \equiv 3\ [7],\ x \equiv 8\ [13]$.*

Exercice 554 (①)**.** *Montrer que le système $x \equiv 1\ [4],\ x \equiv 2\ [6]$ n'a pas de solution.*

Exercice 555 (①)**.** *Pour $x \in \mathbb{Z}$, montrer que*

$$(x \equiv 2\ [4] \text{ et } x \equiv 4\ [6]) \quad \Longleftrightarrow \quad x \equiv 10\ [12].$$

On notera que x est pair ; posant $x = 2y$, on se ramènera à un système de deux congruences modulo 2 et 3.

111. Ce résultat, qui généralise l'exercice 2 de **1.2** semble dû à Lucas (1878). Il est souvent utile dans les exercices d'arithmétique de type « olympiades ». LTE abrège « lifting the exponent ».
112. Ce type de système apparaît chez les Chinois dès l'Antiquité, d'où le nom du théorème.
113. Ce que l'on peut voir comme une hypothèse d'« indépendance arithmétique ».

Exercice 556 (②)**.** *a) Déterminer les $n \in \mathbb{N}$ tels que 5 divise $2^n - 3$.*

b) Déterminer les $n \in \mathbb{N}$ tels que 13 divise $2^n - 3$.

c) Déterminer les $n \in \mathbb{N}$ tels que 65 divise $2^n - 3$.

Exercice 557 (④)**.** *Généraliser les exercices 554 et 555 en résolvant, si a et b sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$ et $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, le système de congruences $x \equiv u\ [a]$ et $x \equiv v\ [b]$.*

Exercice 558 (③)**.** *a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $6x^2 + 5x + 1 = 0$ et montrer qu'elle n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.*

b) On fixe $m \geq 2$ un entier. On se propose de montrer que la congruence $6x^2 + 5x + 1 \equiv 0\ [m]$ admet une solution dans $\mathbb{Z}$. On écrit $m = 2^s t$ où $s \in \mathbb{N}$ et où t est un entier naturel impair. Justifier l'existence de $x \in \mathbb{Z}$ tel que

$$3x + 1 \equiv 0\ [2^s] \quad \textit{et} \quad 2x + 1 \equiv 0\ [t].$$

Conclure. [114]

Le théorème des restes chinois n'acquiert toutes sa force que généralisé comme suit.

Théorème 40 (Théorème des restes chinois pour r modules)**.** *Soient $r \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_r$ des éléments de $\mathbb{N}^*$ deux à deux premiers entre eux, $u_1, \ldots, u_r$ des entiers relatifs. Il existe alors w tel que*

$$\forall i \in \{1, \ldots, r\}, \qquad w \equiv u_i\ [a_i].$$

Pour $x \in \mathbb{Z}$, on a l'équivalence

$$\forall i \in \{1, \ldots, r\},\ x \equiv u_i\ [a_i] \quad \Longleftrightarrow \quad x \equiv w\ \left[\prod_{i=1}^{r} a_i\right].$$

Preuve. Seule l'existence de w mérite démonstration, la seconde partie de l'énoncé s'obtenant comme précédemment à partir du théorème 32.

Pour $r \geq 2$ entier, on note $\mathcal{P}_r$ la propriété : pour tout r-uplet $(a_1, \ldots, a_r)$ d'éléments de $\mathbb{N}^*$ deux à deux premiers entre eux et tout $(u_1, \ldots, u_r)$ de $\mathbb{Z}^r$, il existe $w \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\forall i \in \{1, \ldots, r\}, \qquad w \equiv u_i\ [a_i].$$

La propriété $\mathcal{P}_2$ est le théorème 39. Soient $r \geq 3$ un entier, $a_1, \ldots, a_r, u_1, \ldots, u_r$ comme dans l'énoncé du théorème. Supposons $\mathcal{P}_{r-1}$ démontrée. On dispose de $v \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\forall i \in \{1, \ldots, r-1\}, \qquad v \equiv u_i\ [a_i].$$

Comme $\displaystyle\prod_{i=1}^{r-1} a_i$ et a_r sont premiers entre eux (théorème 30), le théorème 39 fournit $w \in \mathbb{Z}$ tel que

$$w \equiv v\ \left[\prod_{i=1}^{r-1} a_i\right] \quad \text{et} \quad w \equiv u_r\ [a_r].$$

114. Il est intéressant de comparer à l'exercice 477.

On a alors

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, \qquad v \equiv u_i \ [a_i].$$

On notera que la démonstration donne une méthode pour obtenir w.

Exercice 559 (②)**.** *Trouver les $x \in \mathbb{Z}$ vérifiant simultanément les trois congruences*

$$x \equiv 1 \ [2], \quad x \equiv 0 \ [3], \quad x \equiv 2 \ [5].$$

Exercice 560 (④)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut construire $Q \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, kQ soit une puissance exacte, c'est-à-dire de la forme u^v où u et v sont deux entiers naturels strictement supérieurs à 1.*

On se donne n éléments de $\mathbb{N}^*$ deux à deux premiers entre eux, notés $u_1, \dots, u_n$. On pose $U = \prod_{i=1}^{n} u_i$.

a) Montrer qu'il existe des entiers naturels $a_1, \dots, a_n$ tels que

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \qquad a_k \equiv -1 \ [u_k], \quad a_k \equiv 0 \ \left[\frac{U}{u_k}\right].$$

b) On pose $Q = \prod_{i=1}^{n} i^{a_i}$. Montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, kQ est de la forme $m_k^{u_k}$ où m_k est un entier.

Exercice 561 (④)**.** *Soient $r \in \mathbb{N}^*$, $p_1, \dots, p_r$ des nombres premiers distincts.*

a) Montrer l'existence de $x \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, \qquad x \equiv p_i - i \ [{p_i}^2].$$

b) En déduire l'existence de r entiers naturels consécutifs dont aucun n'est une puissance exacte (i.e. de la forme a^k avec $a \in \mathbb{N}$ et $k \geq 2$ entier).