LYCÉE HENRI-IV
PARIS 5ème
DOMUS OMNIBUS UNA

Livret de travail 1$^{\text{ère}}$$\rightarrow$Terminale

Équipe de mathématiques

7 juillet 2024

Préface

Ce livret s'adresse aux élèves qui s'apprêtent à entrer en classe de Terminale avec Spécialité Mathématiques au lycée Henri-IV.

Ce livret a pour but de leur proposer une sélection d'exercices couvrant une large partie des enseignements de Première et qui ont été choisis pour leur permettre de faire le point sur les connaissances et les techniques nécessaires à une arrivée en Terminale dans de bonnes conditions.
Le choix a été fait de donner les solutions de quasiment tous ces exercices, et de n'en corriger (au sens où le raisonnement à mener est indiqué et détaillé) que quelques uns.
Les exercices présentent un pictogramme donnant une indication du niveau de difficulté (entre ☆☆★☆ et ★★★★).

Ce livret est également, par nature, amené à évoluer. L'équilibre entre les chapitres, le nombre et la nature des exercices n'y sont pas figés, mais il constitue d'ores et déjà une base intéressante de travail pour tous.
C'est dans ce but que nous vous le proposons.

Les enseignants de Mathématiques du lycée Henri IV

Remerciements :
Ce livret a été impulsé, puis alimenté, conçu et finalisé par des enseignant(e)s de mathématiques du Lycée Henri IV au cours de ces dernières années. Nous remercions grandement chacun d'entre eux pour sa contribution.
L'équipe actuelle maintient à jour ce livret et corrige les erreurs résiduelles, que vous pouvez nous signaler par e-mail à l'adresse mathematiques.henriiv(a)gmail.com. Un grand merci à ceux qui l'ont déjà fait.

Exercices

I Calculs, (in)équations

Ex 1 ★☆☆☆ Calculs de base

⋆ **Développement.** Pour chacun des polynômes suivants, déterminer sa forme développée.

1) $P(x) = (x+1)^3$

2) $Q(x) = (x^2+2)^2 - 3$

3) $R(x) = (x-3)(6x^2+x+1) - (3x^2-1)(2x+1)$

4) $S(x) = (x^3-7x+1)(x^5-x^2+2)$

⋆ **Factorisation.** Factoriser chacun des polynômes suivants.

1) $P(x) = x^3 - 1$

2) $Q(x) = 9x^4 - 36$

3) $R(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x$

4) $S(x) = x^3 + 3x^2 - 81x + 77$

5) $T(x) = (x^2+8x+16)(x^2-10x+25)$

6) $U(x) = x^3 - 9x^2 + 2x + 48$

7) $V(x) = x^2 - 6x + 9 + x^2(x-3)$

8) $W(x) = (x-2)(x+4) - (2x+7)(2x-4)$

Ex 2 ★☆☆☆ Simplification numérique

« Simplifier » l'écriture des nombres suivants (entre autre, écrire sous la forme d'une seule fraction, au plus, sans racine carrée au dénominateur) :

$$A = \frac{\frac{1}{3}+3}{\frac{1}{6}+6}$$

$$B = 3 \times \frac{2+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}}$$

$$C = 2 \times \frac{\frac{7}{2}+1}{\frac{3}{4}-5} - \frac{5}{3}$$

$$D = \left(\sqrt{12}-\sqrt{3}\right)^2$$

$$E = \left(3\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{2}-1\right)^2$$

$$F = \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{2-\sqrt{3}}$$

$$G = \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$$

$$H = 3 - \frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$I = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+5}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}}$$

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

Ex 3 ★★☆☆ Simplification algébrique

« Simplifier » l'écriture des expressions algébriques suivantes (entre autre, écrire sous la forme d'une seule fraction, au plus, sans racine carrée au dénominateur) :

$$D(x) = 3 + \frac{6}{x+2}$$

$$E(x) = 2 - \frac{3}{x^2}$$

$$F(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

$$G(x) = \frac{7}{x^2+3} - 1$$

$$H(x) = -2 - \frac{3x-1}{x-2}$$

$$I(x) = \frac{\frac{3x}{2}-5}{\frac{x}{3}+3}$$

$$J(x) = \frac{2x-1}{2x^2-1} - 3$$

$$K(x) = 2x - 1 + \frac{3x}{2x-1}$$

$$L(x) = -x + 2 - \frac{1}{3} \times \frac{2x}{x+2}$$

$$M(x) = \frac{3}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{\sqrt{x}+1}$$

Ex 4 ★☆☆☆ Tableau de signes

Dresser le tableau de signes des expressions suivantes :

$$I(x) = 2x + \frac{4}{x-3}$$

$$J(x) = 2 - \frac{3}{x^2}$$

$$K(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

$$L(x) = \frac{7}{x^2+3} - 1$$

$$M(x) = -2 - \frac{3x-1}{x-2}$$

$$N(x) = \frac{\frac{3x}{2}-5}{\frac{x}{3}+3}$$

$$P(x) = \frac{2x-1}{2x^2-1} - 3$$

$$Q(x) = 2x - 1 + \frac{3x-1}{2x-1}$$

$$R(x) = -x + 2 - \frac{1}{3} \times \frac{2x}{x+2}$$

Ex 5 ★☆☆☆ Les âges

Hélène est née le jour du vingtième anniversaire de sa mère. Combien de fois, au plus, l'âge d'Hélène sera-t-il un diviseur de l'âge de sa mère ?

Ex 6 ★☆☆☆ Bleu-Blanc-Rouge

Une boîte contient 60 tickets : des rouges, des bleus et des blancs.

Si tous les tickets rouges étaient remplacés par des bleus, il y aurait alors deux fois plus de tickets bleus que de blancs.

Si tous les tickets blancs étaient remplacés par des bleus, il y aurait alors trois fois plus de tickets bleus que de rouges.

Combien de tickets bleus contient la boîte ?

Ex 7 ★★☆☆ Vacances

Chaque lettre représente un chiffre, deux lettres différentes représentent deux chiffres différents.

$$\begin{array}{cccccc} & S & O & L & E & I & L \\ + & & S & A & B & L & E \\ \hline & B & I & K & I & N & I \end{array}$$

Ex 8 ★☆☆☆ Sondage bidon

Un sondage paru dans la presse décrit la population des lecteurs d'un fameux journal du soir en donnant les renseignements suivants donnant le sexe, l'état-civil et la profession des lecteurs :

* 31,2% sont des hommes,

* 47% sont mariés,

* 52,5% sont des étudiants,
* 4,2% sont des étudiants masculins,
* 14,7% sont des étudiants mariés,
* 8,6% sont des hommes mariés,
* 2,5% sont des étudiants masculins mariés.

Les résultats de ce sondage sont incohérents. Pourquoi ?

Ex 9 ☆☆★☆ Polynôme du 2nd degré

1) Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que

$$P(3) = 14 \text{ et } P(1) = P\left(\tfrac{2}{3}\right) = 0.$$

2) Soit a, b et c trois réels distincts.

a) Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que

$$P(a) = b \text{ et } P(b) = P(c) = 0.$$

b) Existe-t-il un polynôme P de degré 2 tel que

$$P(a) = 1,\ P(b) = 1 \text{ et } P(c) = 1\,?$$

Ex 10 ☆☆★☆ Le prof préféré

Des élèves décident d'offrir un gros cadeau à leur professeur de maths préféré coûtant 600 € (C'est en effet un beau cadeau). S'il y avait 10 élèves de moins, chacun devrait payer 3 € de plus.
Combien d'élèves participent à cette œuvre de charité ?

Ex 11 ☆☆★★ Paramètre

Soit m un réel et (E_m) l'équation d'inconnue x :

$$(E_m)\ :\ 2x^2 + (3m+1)x - m(m-1) = 0$$

1) Exprimer Δ_m, discriminant de (E_m), en fonction de m.

2) Pour quelles valeurs de m l'équation (E_m) admet elle au moins une solution ?

3) Exprimer P_m, produit des solutions de (E_m), en fonction de m.

4) Existe-t-il des valeurs de m pour lesquelles -2 est solution de (E_m) ?
Si oui, résoudre chacune des équations obtenues.

Ex 12 ★☆★★ Défi

Déterminer un polynôme non nul à coefficients entiers admettant pour racine $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Ex 13 ☆☆★★ Grosse équation

Résoudre les équations :

1) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 = 0$

2) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{x^5} + \dfrac{1}{x^6} + \dfrac{1}{x^7} + \dfrac{1}{x^8} = 0$

3) $27x^7 + 9x^5 + 3x^3 + x = 0$

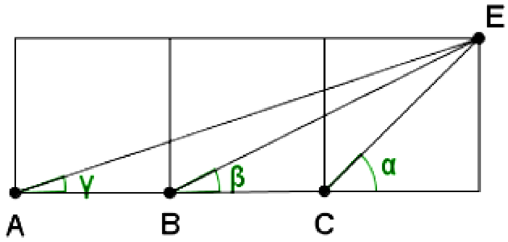
Ex 14 ☆☆★★ Triangle rectangle

Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle rectangle dont le plus grand côté est c.
Démontrer que pour tout entier $n > 2$

$$c^n > a^n + b^n.$$

Ex 15 ☆☆★★ Évariste et Blaise

On considère la figure ci-dessous, composée de trois carrés adjacents.
Évariste pense que $\alpha > \beta + \gamma$ tandis que Blaise pense que $\alpha < \beta + \gamma$.
Qui a raison ?



Ex 16 ☆☆★★ Équations trigonométriques

Résoudre l'équation suivante dans l'intervalle I donné :

1) $I =]-\pi, \pi]$, $\quad \sqrt{2}\cos(2x) - 1 = 0.$

2) $I = [0; \pi]$, $\quad \cos 3x = \sin(x + \frac{\pi}{4})$

3) $I =]-\pi; \pi]$, $\quad \sin^2 x - \sin x - \dfrac{3}{4} = 0.$

4) $I = \mathbb{R}$, $\quad \cos^2(x) = \dfrac{1 + \sin(x)}{2}.$

Ex 17 ☆☆★★ Inéquations trigonométriques

Résoudre l'inéquation suivante dans l'intervalle I donné :

1) $I =]-\pi, \pi]$, $\quad \cos x \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

2) $I =]-\pi, \pi]$, $\quad 2\sin(x) + 1 < 0.$

3) $I =]-\pi, \pi]$, $\quad \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leqslant 0.$

4) $I =]-\pi, \pi]$, $\quad 2\cos^2 x - \cos x - 1 \leqslant 0$

5) $I =]-\pi, \pi]$, $\quad \sin 2x \geqslant \sin x.$

II Suites

Ex 18 ☆☆ ★☆

Dans chacun des cas ci-dessous, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

1) Sachant que $u_0 = \frac{3}{2}$ et $r = \frac{7}{6}$, calculer u_{10} et u_{20}.

2) Sachant que $u_0 = 2$ et $u_1 = 5$, calculer u_2 et u_5.

3) Sachant que $u_5 = 7$ et $u_{10} = -3$, calculer u_0 et u_1.

4) Sachant que $u_{15} = 3$ et $u_{80} = \frac{139}{3}$, calculer u_0 et S_{80}.

5) Sachant que $u_0 = -7$. Déterminer r ainsi que l'entier naturel p de telle sorte que l'on ait $u_p = 83$ et $S_{p-1} = 2691$.

Ex 19 ☆☆ ★☆

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

1) Sachant que $q = \frac{1}{3}$ et que $u_0 = 7$, calculer u_1, u_2, u_3.

2) Sachant que $u_0 = 12$ et $u_2 = 3$, calculer u_1 et u_5.

3) Sachant que $u_0 = -\frac{3}{8}$, déterminer q ainsi que l'entier naturel p de telle sorte que l'on ait $u_p = -48$ et $S_p = \frac{-765}{8}$.

Ex 20 ☆☆ ★☆

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.
On pose : $v_n = \mathrm{e}^{u_n}$, pour $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et préciser sa raison.

Ex 21 ☆☆ ★☆

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout n entier naturel : $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 2$.

1) Calculer u_1, u_2, u_3.

2) Soit a un réel et (v_n) la suite définie par $v_n = u_n + a$ pour tout n entier naturel. Déterminer la valeur de a pour que la suite (v_n) soit géométrique. Donner alors ses éléments caractéristiques.

3) Dans la suite de l'exercice, on pose $v_n = u_n - 5$. Donner l'expression de v_n en fonction de n.

4) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

5) Déterminer la limite de la suite (u_n).

6) Pour tout n entier naturel, on pose $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ et $T_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$
Quelle est l'expression de T_n en fonction de n ?

7) Déterminer la limite de la suite (T_n).

8) Déterminer l'expression de S_n en fonction de n et la limite de la suite (S_n).

Ex 22 ☆☆ ★☆

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites réelles définies par :

$$\begin{cases} u_1 = 12 \text{ et } v_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \text{ et } v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

1) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $w_n = v_n - u_n$.

- **a)** Démontrer que la suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ ainsi définie est une suite géométrique puis exprimer w_n en fonction de n.
- **b)** En déduire que $(w_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente puis déterminer sa limite.

2) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $x_n = 8v_n + 3u_n$. Démontrer que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est constante.

3) En déduire les expressions respectives de u_n et v_n en fonction de n.

4) Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ convergent vers une même limite que l'on explicitera.

Ex 23 ☆☆ ★★

(u_n) est la suite de nombres réels strictement positifs définie par $u_0 = 2$ et pour tout nombre $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}.$$

(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{u_n}$.

1) Démontrer, par récurrence, que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs.
Expliquer alors pourquoi les termes v_n sont définis pour tout n.

2) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 puis v_1, v_2, v_3, v_4.

3) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.

4) Pour tout nombre $n \in \mathbb{N}$. exprimer :

- **a)** v_n en fonction de n ;
- **b)** u_n en fonction de n.

Ex 24 ☆☆ ★☆

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{2u_n + 1}$.

1) Calculer u_1, u_2, u_3.

2) Représenter graphiquement les premiers termes de la suite. (on utilisera la méthode de représentation graphique des suites définies par une formule de récurrence). Quelle conjecture peut-on faire ?

3) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.

4) Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$.
Montrer que (v_n) est une suite géométrique et donner son premier terme et sa raison.

5) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

6) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - 1 \neq 0$.

7) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de v_n.

8) En déduire l'expression de u_n en fonction de n et sa limite éventuelle.

Ex 25 ☆☆ ★★

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$u_0 = -1, \ u_1 = \frac{1}{2}$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

1) Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $\quad v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

- **a)** Calculer v_0.
- **b)** Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
- **c)** En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
- **d)** Exprimer v_n en fonction de n.

3) On définit la suite (w_n) en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.

a) Calculer w_0.

b) En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.

c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.

d) Exprimer w_n en fonction de n.

4) Montrer que pour tout entier naturel n : $\quad u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$.

5) Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 2 - \dfrac{2n+3}{2^n}$.

6) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2 - \frac{5}{1,5^n} \leqslant 2 - \frac{2n+3}{2^n} \leqslant 2 - \frac{3}{2^n}.$$

En déduire la limite de la suite (S_n).

Ex 26 ☆☆ ★★

Soit a un nombre réel tel que $-1 < a < 0$.
On considère la suite u définie par $u_0 = a$, et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n^2 + u_n.$$

1) Étudier la monotonie de la suite u.

2) a) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 + x$. Étudier le sens de variation de la fonction h.
En déduire que pour tout $x \in]-1;0[$, $h(x) \in]-1;0[$.

b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < u_n < 0$.

3) Étudier la convergence de la suite u. Déterminer, si elle existe, sa limite.

Ex 27 ☆☆ ★☆

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

1) a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

b) Quelle est la limite de (u_n) ?

2) La suite (v_n) est définie par $v_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{\sqrt{n}}$.

Quelle est la limite de (v_n) ?

Ex 28 ★☆ ★★

Soient deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n) définies par $d_0 = 300$; $a_0 = 450$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} d_{n+1} & = \frac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} & = \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70 \end{cases}$$

1) Calculer d_1, d_2, a_1 et a_2.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = d_n - 200$.
Démontrer que la suite (c_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

3) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340.$$

4) a) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a :

$$2^n \geqslant (n+1)^2.$$

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a :

$$2^n \geqslant n^2.$$

c) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4,

$$0 \leqslant 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100}{n}.$$

5) Étudier la convergence de la suite (a_n).

III Probabilités

Ex 29

Un chirurgien orthopédique commande des prothèses chez trois fabricants A, B et C. le tiers des prothèses provient de A, 30 % provient de B et le reste provient de C.
La proportion de prothèses défectueuses est de 0,3 % chez A, de 0,6 % chez B et de 0,5 % chez C.
On prend au hasard la fiche d'un patient qui s'est fait poser une prothèse chez ce médecin.
Quelle est la probabilité que cette prothèse soit défectueuse ?

Ex 30

On sait que 1 % d'une population est atteinte d'une certaine maladie orpheline.
On dispose de test de dépistage de cette maladie ainsi que des données suivantes :

- si la personne est atteinte de cette maladie, alors le test est positif dans 90 % des cas.
- si la personne n'est pas atteinte par cette maladie, alors le test est néanmoins positif dans 5 % des cas.

On choisit une personne au hasard. On note :

- M l'événement : « La personne est malade. ».
- T l'événement : « Le test est positif. ».

1) Traduire les hypothèses en termes de probabilités.

2) **a)** Calculer $\mathbb{P}(M \cap T)$ et $\mathbb{P}\left(\overline{M} \cap T\right)$.

b) Calculer $\mathbb{P}(T)$.

3) Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement atteinte par cette maladie sachant que son test est positif ?

4) Quelle est la probabilité qu'une personne ne soit pas atteinte par cette maladie sachant que son test est positif ?

5) Quelle est la probabilité qu'une personne soit atteinte par cette maladie sachant que son test est négatif ?

Ex 31

Un professeur se trouve en possession de 5 clefs de salles. Il se tient devant une porte et il sait que, parmi ses 5 clefs, 2 n'ouvrent pas la porte parce qu'elles sont défectueuses mais les autres le peuvent. Il veut alors les tester toutes, une à une. Le choix des clefs est effectué au hasard et sans remise. On appelle clef numéro x la clef utilisée au x-ième essai.

1) On appelle D_1 l'évènement : « La clef numéro 1 n'ouvre pas la porte ». Calculer sa probabilité.

2) On appelle D_2 l'évènement : « La clef numéro 2 n'ouvre pas la porte ».
Calculer la probabilité que l'évènement D_2 se réalise, sachant que l'évènement D_1 est réalisé.
En déduire la probabilité de l'évènement $D_1 \cap D_2$.

3) Quelle est la probabilité de l'évènement : « Les clefs numéros 1 et 2 ouvrent la porte et la clef numéro 3 ne l'ouvre pas » ?

4) Pour $1 \leqslant i < j \leqslant 5$, on note $(i\ ;\ j)$ l'évènement : « Les clefs qui n'ouvrent pas la porte sont les clefs numéros i et j », et $\mathbb{P}(i\ ;\ j)$ la probabilité de cet évènement.

a) Calculer $\mathbb{P}(2\ ;\ 4)$.

b) Calculer $\mathbb{P}(4\ ;\ 5)$.

Ex 32

Juliette débute un jeu dans lequel elle a autant de chances de gagner ou de perdre la première partie.
On admet que, si elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la partie suivante est 0,6, et si elle perd une partie, la probabilité pour qu'elle perde la partie suivante est 0,7.
On note, pour n entier naturel non nul :
G_n l'événement : "Juliette gagne la n-ième partie",
P_n l'événement : "Juliette perd la n-ième partie".

Partie A

1) Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(G_1)$, $\mathbb{P}_{G_1}(G_2)$ et $\mathbb{P}_{P_1}(G_2)$.
En déduire la probabilité $\mathbb{P}(G_2)$.

2) Calculer $\mathbb{P}(P_2)$.

Partie B

On pose, pour n entier naturel non nul, $x_n = \mathbb{P}(G_n)$ et $y_n = \mathbb{P}(P_n)$.

1) Déterminer, pour n entier naturel non nul, les probabilités : $\mathbb{P}_{G_n}(P_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{P_n}(G_{n+1})$.

2) Montrer que pour tout n entier naturel non nul : $\begin{cases} x_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n \\ y_{n+1} = 0,4x_n + 0,7y_n \end{cases}$

3) Pour n entier naturel non nul, on pose $v_n = x_n + y_n$ et $w_n = 4x_n - 3y_n$.

a) Montrer que la suite (v_n) est constante de terme général égal à 1.

b) Montrer que la suite (w_n) est géométrique et exprimer w_n en fonction de n.

4) **a)** Déduire du 3. l'expression de x_n en fonction de n.

b) Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

IV Fonctions

Ex 33 ☆☆ ★☆

Dresser le tableau de variation des fonctions définies par les expressions suivantes :

1) $f(x) = x^3 - \dfrac{15}{2}x^2 + 18x - 5$

2) $f(x) = 2x + \dfrac{3}{x}$

3) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+5}$

4) $f(x) = \dfrac{-2x+3}{-2x+4}$

Ex 34 ☆☆ ★☆

Déterminer l'expression (simplifiée) de la dérivée des fonctions suivants :

$f_1(x) = x^3 - 5x^7 + \dfrac{3}{x}$ $\quad f_2(x) = \dfrac{1}{2}x^4 - x\sqrt{3} + 3\sqrt{x}$

$f_3(x) = \left(x^2+3\right)x^5$ $\quad f_4(x) = (3x-2)^2$

$f_5(x) = x^2\sqrt{x}$ $\quad f_6(x) = (x+3)x^2\sqrt{x}$

$f_7(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)x$ $\quad f_8(x) = \left(x + \dfrac{2}{x^2}\right)x$

$f_9(x) = \dfrac{3}{x+1}$ $\quad f_{10}(x) = -2\dfrac{5}{x^2+3}$

$f_{11}(x) = \dfrac{5x}{x^2+3}$ $\quad f_{12}(x) = \dfrac{x+2}{x+3}$

$f_{13}(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3+1}$ $\quad f_{14}(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+3}$

$f_{15}(x) = \dfrac{x - \dfrac{1}{x}}{x + \dfrac{1}{x}}$ $\quad f_{16}(x) = \dfrac{x^2 + \dfrac{3}{x}}{x^2 + \dfrac{x}{3}}$

$f_{17}(x) = \dfrac{5\sqrt{x}}{1 + \dfrac{2}{x}}$ $\quad f_{18}(x) = x\dfrac{1 + \dfrac{1}{x}}{3 + \dfrac{3}{x}}$

$f_{19}(x) = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ $\quad f_{20}(x) = \dfrac{1}{3}x\dfrac{3 + \dfrac{9}{x}}{x^2+2}$

$f_{21}(x) = \mathrm{e}^{4x-5}$ $\quad f_{22}(x) = \cos(2x+3)$

$f_{23}(x) = \sin\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ $\quad f_{24}(x) = (7x+5)\,\mathrm{e}^{-x}$

$f_{25}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{3x} + 2x^2}{\mathrm{e}^x + 1}$ $\quad f_{26}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{3-2x}}{x^4 - 3x + 1}$

Ex 35 ☆☆ ★☆

Déterminer, si elle existe, la limite des fonctions ci-dessous lorsque $x$tend vers la valeur a indiquée.
On distinguera éventuellement la limite à gauche et la limite à droite.

1) $\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$; $a = 1$

2) $\dfrac{x^3+27}{3x+9}$; $a = -3$

3) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}$; $a = 2$

4) $\dfrac{2x}{x^2-x+1} + \dfrac{1}{x^2-3x+2}$; $a = 1$

5) $\dfrac{3x^2-2mx-m^2}{2x^2-3mx+m^2}$ avec $m \in \mathbb{R}$; $a = m$

6) $\dfrac{x-3}{x-1-\sqrt{x+1}}$; $a = 3$

7) $\dfrac{x-4}{\sqrt{x^2-7}-\sqrt{2x+1}}$; $a = 4$

8) $\dfrac{\sqrt{x^2-|x|}}{x}$; $a = 0$

9) $\dfrac{\sqrt{3x^2}-2x^2}{5\sqrt{x^2}+x^2}$; $a = 0.$

Ex 36 ☆☆ ★☆

Déterminer, si elle existe, la limite des fonctions ci-dessous lorsque $x$tend vers la valeur a indiquée.

1) $\dfrac{2x-3}{(4x+1)(x+5)}$; $a = -\infty$

2) $\dfrac{3x^2-11x+4}{x^2+4x+4}$; $a = -2$

3) $\dfrac{\mathrm{e}^{2x-6}}{4x+5}$; $a = 3$

4) $\cos\left(\dfrac{2x^2+x+\pi-3}{4x-1}\right)$; $a = 1$

5) $\sin(2x+7)$; $a = -\infty$

Ex 37 ☆☆ ★★

Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions ci-dessous. Préciser si la courbe représentative de f admet alors une asymptote horizontale ou non.

$f_1(x) = \dfrac{2x^4-5x+1}{x^3+x^2+6}$ $\quad f_2(x) = \dfrac{2x^2-x}{6x^2+7x}$

$f_3(x) = \dfrac{1-2x^5}{2x^8-x+12}$ $\quad f_4(x) = \sqrt{2x^2+1} - x$

$f_5(x) = \dfrac{5x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ $\quad f_6(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{3x}}{3+2\mathrm{e}^{3x}}$

$f_7(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

$f_8(x) = \dfrac{3x^2-2x-m^2}{(m-2)x^2-3mx+m^2}$ avec $m \in \mathbb{R}$

Ex 38 ☆☆ ★☆

Déterminer les limites en a des fonctions suivantes. Préciser dans chaque cas si la courbe de la fonction admet en a une asymptote verticale.

$f_1(x) = \dfrac{3x-4}{x^2}$ en $a = 0$;

$f_2(x) = \dfrac{3x^2-3x-2}{(x-2)^3}$ en $a = 2$;

$f_3(x) = \dfrac{2\exp\left(\frac{x}{3}\right)}{1-\mathrm{e}^x}$ en $a = 0$;

$f_4(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ en $a = 3$;

$f_5(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{2-\sqrt{\mathrm{e}^x+3}}$ en $a = 0$;

$f_6(x) = \exp\left(\dfrac{2}{x^2-1}\right)$ en $a = 1$.

Ex 39 ☆☆ ★★

On considère trois fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$, dont on donne ci-dessous les limites aux bornes de cet intervalle :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$

Déterminer, lorsque c'est possible, les limites en $\pm\infty$ des fonctions suivantes :

$f+g$; $h-f$; $f.g$; $f.h$; $g+h$; $\dfrac{f}{g}$; $\dfrac{f}{h}$; $\dfrac{h}{g}$; $\dfrac{f+g}{h}$; $\dfrac{h+g}{f}$.

On notera FI s'il s'agit d'une forme indéterminée.
Extension : on pourra essayer de proposer des exemples justifiant qu'il est impossible de conclure dans ces cas.

Ex 40 ☆☆ ★☆

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - x}$.

1) Montrer que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

2) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. Donner les asymptotes éventuelles.

3) Étudier les variations de f puis en dresser le tableau de variation.

Ex 41 ☆☆ ★☆

Dans un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère le point A de coordonnées $(1; 1)$.
À tout réel $x > 1$, on associe le point M de coordonnées $(x; 0)$.
On note N le point d'intersection de la droite (AM) avec l'axe des ordonnées.

1) Montrer que l'ordonnée du point N est donnée par $\dfrac{x}{x-1}$.

2) En déduire l'aire du triangle OMN.

3) Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{2(x-1)}$
Calculer $f'(x)$ et déterminer le sens de variation de f.

4) Quelle est la position du point M tel que l'aire du triangle MNO soit minimale ?

Ex 42 ☆☆ ★☆

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x - 11}{x + 4}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Vérifier que la dérivée f' de f s'exprime par $\dfrac{2x^2 + 16x + 31}{(x+4)^2}$.

3) Déterminer le tableau de variations de f sur son ensemble de définition.

4) Démontrer que $y = 2x - 3$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$. On pourra effectuer une division polynomiale.
En déduire les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

Ex 43 ☆☆ ★☆

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) Donner D_f l'ensemble de définition de f.

2) Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$ son nombre dérivé en 0.

3) Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse 0.

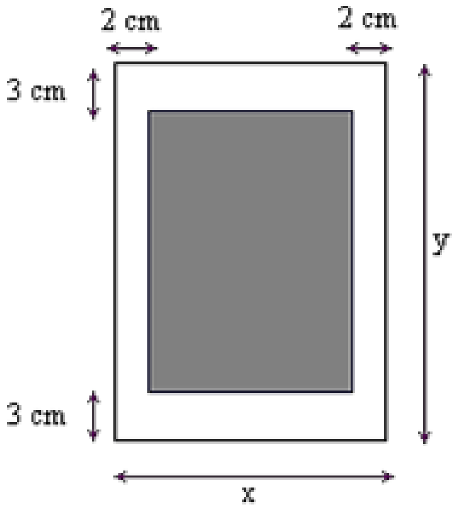
4) Justifier que la fonction f est dérivable sur D_f et déterminer sa dérivée f'.

5) Dresser le tableau de variations de f.

6) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ et sa tangente au point d'abscisse 0.

Ex 44 ☆☆ ★☆

Pour la fabrication d'un livre, on doit respecter sur chaque page des marges de 2 cm à droite et à gauche et de 3 cm en haut et en bas.



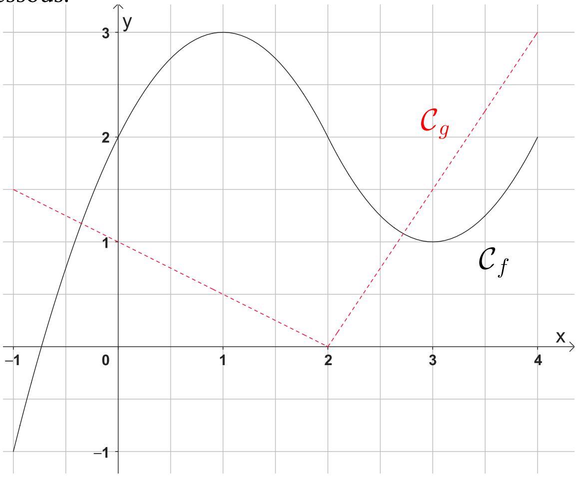
Soit x et y respectivement la largeur et la longueur de la page en cm.

1) Si $x = 28$ et $y = 31$, calculer l'aire de la portion de la page disponible pour l'impression.

2) On désire que la surface disponible pour l'impression soit de 600 cm^2.
Trouver la valeur de x pour laquelle la consommation de papier est minimale.

Ex 45 ☆☆ ★★

Deux fonctions f et g définies sur $[-1\,;\,4]$ sont représentées ci-dessous.



1) Déterminer $g \circ f(0)$; $g \circ f(3)$; $f \circ g(0)$ et $f \circ g(2)$.

2) Déterminer les variations de $g \circ f$ sur $[-1\,;\,4]$.

Ex 46 ☆☆ ★★

Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé (quelconque) et soit f_n la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{1 + x^n}{(1+x)^n}.$$

1) a) Expliquer pourquoi f_n est dérivable sur $[0; +\infty[$ et calculer $f_n'(x)$.

b) Étudier le signe de $f_n'(x)$ et montrer que f_n atteint un minimum que l'on déterminera.

2) a) En déduire l'inégalité suivante, pour $x \geqslant 0$:

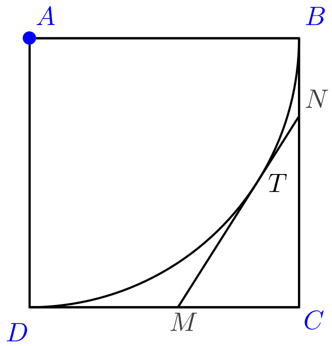
$$(1+x)^n \leqslant 2^{n-1}\left(1 + x^n\right).$$

b) En déduire que, si x et y sont des réels positifs,

$$(x+y)^n \leqslant 2^{n-1}\left(x^n + y^n\right).$$

Ex 47 ☆☆★★

$ABCD$ est un carré de côté 1. $\mathscr{C}$ est le quart de cercle de centre A, de rayon AB, contenu dans le carré.



T est un point de $\mathscr{C}$ distinct de B et D. La tangente en T à $\mathscr{C}$ coupe $[DC]$ en M et $[BC]$ en N.
On pose $x = DM$ et $y = BN$.

1) **a)** Démontrer que $MN^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$.
b) Établir que $MN = MT + TN = x + y$.
c) Exprimer alors MN en fonction de x.

2) f est la fonction définie sur $]0;1[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}.$$

a) Calculer l'expression de $f'(x)$ où f' est la dérivée de f.
b) Étudier les variations de f.

3) Pour quelle position de M la longueur MN est-elle minimale ?

Ex 48 ☆☆★★

⋆ **Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire**
La fonction d est définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$d(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}.$$

1) Calculer la fonction dérivée d'.
En déduire les variations de d.
2) Déterminer les limites de d en -1 et en $+\infty$.
3) Montrer que, pour tout $x > -1$, on a : $0 < d(x) < \mathrm{e}$.

⋆ **Partie B. Étude de la fonction f**
Dans cette partie on s'intéresse à la fonction f définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 - \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}.$$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. On désigne par f' et f'' les dérivées première et seconde de f.

1) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - \mathrm{e} + 1$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.
Préciser la position relative de (D) et $(\mathcal{C})$.
2) **a)** Pour $x \in]-1;+\infty[$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
Vérifier que $f''(x) = \dfrac{2x+1}{(x+1)^4}\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}$.
En déduire le sens de variations de f'.
b) Dresser le tableau de variations de f'.
(On admettra que $\lim\limits_{x\to -1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 1$.)
3) On admet que l'équation $f'(x) = 0$ admet sur $]-1;+\infty[$ deux solutions dont l'une est 0.
Dans la suite du problème, on notera α la solution non nulle. Donner une valeur approchée de α au centième près.
4) **a)** Étudier les variations de f.
b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
c) Dresser le tableau de variations de f

⋆ **Partie C. Prolongement de la fonction f en -1**
On considère la fonction g définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(-1) &= 0 \\ g(x) &= f(x) \text{ pour tout } x > -1. \end{cases}$$

On appelle $(\mathcal{C}')$ la courbe représentative de la fonction g dans le repère de la **partie B**.

1) **a)** Montrer que l'on peut écrire

$$\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)} = 1 - \frac{1}{x}\left(\frac{x}{x+1}\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}\right).$$

b) Pour $x \in]-1;+\infty[$, déterminer la limite lorsque x tend vers -1 de $\dfrac{x}{x+1}$ puis de $\dfrac{x}{x+1}\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}$.
c) En déduire que g est dérivable en - 1 et préciser son nombre dérivé $g'(-1)$.
2) Déterminer les tangentes à $(\mathcal{C}')$ aux points d'abscisses -1, α, 0.

Ex 49 ☆☆★★

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x-1} + 1.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Partie A : étude de la fonction

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
2) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x-1}$.
4) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Partie B : recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a, qui passe par l'origine du repère.

1) On appelle T_a la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a. Donner une équation de T_a.
2) Démontrer qu'une tangente à $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si a vérifie l'égalité

$$1 - a^2\mathrm{e}^{a-1} = 0.$$

3) Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0;+\infty[$ de l'équation

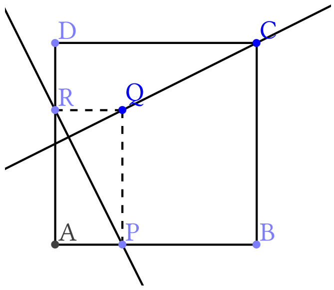
$$1 - x^2\mathrm{e}^{x-1} = 0.$$

4) Donner alors une équation de la tangente recherchée.

V Repérage

Ex 50 ☆☆ ★☆

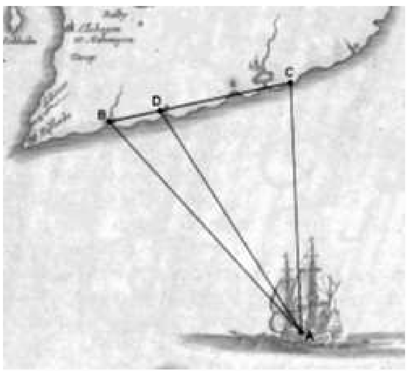
Soit un carré $ABCD$. On construit un rectangle $APQR$ tel que :
P et Q sont sur les côtés $[AB]$ et $[AD]$ du carré et $AP = DR$



1) **Méthode géométrique**.
   a) Montrer que $\overrightarrow{CQ}.\overrightarrow{AR} = -AR \times DR$ puis que $\overrightarrow{CQ}.\overrightarrow{AP} = -AP \times BP$
   En déduire que $\overrightarrow{CQ}.\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{CQ}.\overrightarrow{AP}$
   b) En déduire que les droites (CQ) et (RP) sont perpendiculaires.
2) **Méthode analytique**. On se place dans le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$
   a) Si P a pour coordonnées $(a; 0)$, déterminer les coordonnées de R et de Q.
   b) Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{PR}$ et de $\overrightarrow{QC}$
   c) En déduire que les droites (CQ) et (RP) sont perpendiculaires.

Ex 51 ☆☆ ★★

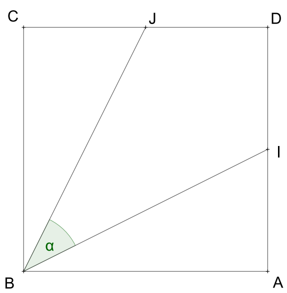
Un navire A se trouve au large de deux villes B et C séparées de 5 km.



L'angle $\widehat{ABC}$ est de 60° et l'angle $\widehat{BCA}$ est de 80°.
1) Déterminer les longueurs AC et AB.
2) La ville D se trouve à 1,5 km de la ville B. Calculer la distance qui sépare cette ville du bateau.

Ex 52 ☆☆ ★★

Soient $ABCD$ un carré de côté a, I et J les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[DC]$. On note α la mesure en degrés de l'angle $\widehat{IBJ}$.



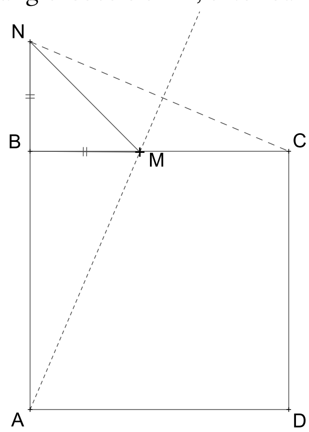
1) Montrer que $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BJ} = \frac{5}{4}a^2\cos(\alpha)$.
2) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3) En déduire une autre manière de calculer $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BJ}$ et déterminer α au degré près.

Ex 53 ☆☆ ★☆

Dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé, on donne les points $B(6; 0)$ et $C(2; 4)$. Faire une figure que vous compléterez au fur et à mesure (unités : 2cm).
1) Déterminer les coordonnées du centre Ω du cercle circonscrit $(\mathscr{C})$ au triangle OBC. Déterminez le rayon de $(\mathscr{C})$.
2) Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H de OBC.
3) Déterminer les coordonnées du centre de gravité G de OBC.
   Remarque : G est le point tel que $\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$
4) Montrer que Ω, H et G sont alignés. Déterminez la valeur du réel k tel que $\overrightarrow{\Omega H} = k\overrightarrow{\Omega G}$;
5) Montrer alors que $\overrightarrow{\Omega H} = \overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}$.
6) Déterminer les coordonnées de H', symétrique de H par rapport à la droite (OB). Montrez que H' est sur $(\mathscr{C})$.

Ex 54 ☆☆ ★☆

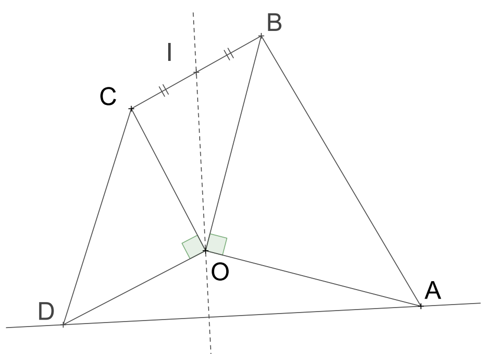
$ABCD$ est un carré et M un point quelconque de $[BC]$.
BMN est un triangle isocèle en B, extérieur au carré $ABCD$.



Démontrer que les droites (AM) et (NC) sont perpendiculaires.

Ex 55 ☆☆ ★★

Les triangles OAB et OCD sont rectangles isocèles en O, de sens direct. I est le milieu de $[BC]$.



Montrer que la médiane issue de O dans OBC est la hauteur issue de O dans OAD.

Réponses

I Calculs, (in)équations

Ex 1

⋆ **Développement.** Pour chacun des polynômes suivants, déterminer sa forme développée.

1) $P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
2) $Q(x) = x^4 + 4x^2 + 1$
3) $R(x) = -20x^2 - 2$
4) $S(x) = x^8 - 7x^6 + 9x^3 - x^2 - 14x + 2$

⋆ **Factorisation.** On utilise plusieurs techniques (identité remarquable, groupement de termes, racine évidente)

1) $P(x) = (x-1)(x^2+x+1)$
2) $Q(x) = 9(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)$
3) $R(x) = x(x-1)(x-3)(x+3)$
4) $S(x) = (x-1)(x-7)(x+11)$
5) $T(x) = (x+4)^2(x-5)^2$
6) $U(x) = (x-8)\,(x-3)\,(x+2)$
7) $V(x) = (x-3)(x^2+x-3)$
8) $W(x) = -(x-2)(3x+10)$

Ex 2

$$A = \frac{\frac{1}{3}+3}{\frac{1}{6}+6} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{37}{6}} = \frac{10}{3} \times \frac{6}{37} = \frac{20}{37}$$

$$B = 3 \times \frac{2+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}} = 3 \times \frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = 3 \times \frac{5}{2} \times \frac{2}{3} = 5$$

$$C = 2 \times \frac{\frac{7}{2}+1}{\frac{3}{4}-5} - \frac{5}{3} = 2 \times \frac{\frac{9}{2}}{-\frac{17}{4}} - \frac{5}{3} = -2 \times \frac{9}{2} \times \frac{4}{17} - \frac{5}{3}$$
$$= -\frac{36}{17} - \frac{5}{3} = \frac{-108-85}{3\times 17} = \frac{-193}{51}$$

$$D = \left(\sqrt{12}-\sqrt{3}\right)^2 = \sqrt{12}^2 + \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{12}\sqrt{3}$$
$$= 12 + 3 - 2\sqrt{36} = 15 - 2\times 6 = 3$$

$$E = \left(3\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{2}-1\right)^2 = 3^2 \times \sqrt{2}^2 - \left(\sqrt{2}^2 + 1 - 2\sqrt{2}\right)$$
$$= 15 + 2\sqrt{2}$$

$$F = \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{2-\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}^2-2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$
$$= \frac{\left(4-2\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)} = 2$$

$$G = \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{12}-2\sqrt{18}}{6}$$
$$= \frac{6\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{6} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$H = 3 - \frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3 - \frac{\left(3+2\sqrt{3}\right)\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}$$
$$= \frac{9}{3} - \frac{3\sqrt{3}+2\times 3}{3} = \frac{3-3\sqrt{3}}{3} = 1-\sqrt{3}$$

$$I = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+5}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}+10}{2}}{\frac{2\sqrt{3}-1}{2}} = \frac{\sqrt{3}+10}{2} \times \frac{2}{2\sqrt{3}-1}$$
$$= \frac{\sqrt{3}+10}{2\sqrt{3}-1} = \frac{\left(\sqrt{3}+10\right)\left(2\sqrt{3}+1\right)}{\left(2\sqrt{3}-1\right)\left(2\sqrt{3}+1\right)} = \frac{16+21\sqrt{3}}{11}$$

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$
$$= \frac{\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)} - \frac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)} = 2$$

Ex 3

$$D(x) = 3 + \frac{6}{x+2} = \frac{3(x+2)}{x+2} + \frac{6}{x+2} = \frac{3x+12}{x+2}$$

$$E(x) = 2 - \frac{3}{x^2} = \frac{2x^2-3}{x^2}$$

$$F(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} - \frac{x-1}{(x+1)(x-1)}$$
$$= \frac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

$$G(x) = \frac{7}{x^2+3} - 1 = \frac{7}{x^2+3} - \frac{x^2+3}{x^2+3} = \frac{7-(x^2+3)}{x^2+3}$$
$$= \frac{-x^2+4}{x^2+3}$$

$$H(x) = -2 - \frac{3x-1}{x-2} = -\frac{2(x-2)}{x-2} - \frac{3x-1}{x-2}$$
$$= \frac{-2(x-2)-(3x-1)}{x-2} = \frac{-5x+5}{x-2}$$

$$I(x) = \frac{\frac{3x}{2}-5}{\frac{x}{3}+3} = \frac{\frac{3x}{2}-\frac{10}{2}}{\frac{x}{3}+\frac{9}{3}} = \frac{\frac{3x-10}{2}}{\frac{x+9}{3}}$$
$$= \frac{3x-10}{2} \times \frac{3}{x+9} = \frac{9x-30}{2x+18}$$

$$J(x) = \frac{2x-1}{2x^2-1} - 3 = \frac{2x-1}{2x^2-1} - \frac{3(2x^2-1)}{2x^2-1}$$
$$= \frac{2x-1-3(2x^2-1)}{2x^2-1} = \frac{-6x^2+2x+2}{2x^2-1}$$

$$K(x) = 2x - 1 + \frac{3x}{2x-1} = \frac{(2x-1)^2}{2x-1} + \frac{3x}{2x-1}$$
$$= \frac{(2x-1)^2+3x}{2x-1} = \frac{4x^2-x+1}{2x-1}$$

$$L(x) = -x + 2 - \frac{1}{3} \times \frac{2x}{x+2}$$
$$= \frac{(-x+2)(3(x+2))}{3(x+2)} - \frac{2x}{3(x+2)}$$
$$= \frac{3(-x^2+4)-2x}{3(x+2)} = \frac{-3x^2-2x+12}{3(x+2)}$$

$$M(x) = \frac{3}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{3\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} - \frac{2\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$$
$$= \frac{\sqrt{x}+5}{x-1}$$

Ex 4

$I(x) = 2x + \frac{4}{x-3} = \frac{2x(x-3)+4}{x-3} = \frac{2x^2-6x+4}{x-3}$. Le numérateur est un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = (-6)^2 - 4\times 2\times 4 = 4 > 0$, et admet donc deux racines réelles : $x_1 = \frac{-(-6)-\sqrt{4}}{2\times 2} = 1$ et $x_2 = \frac{-(-6)+\sqrt{4}}{2\times 2} = 2$.
On obtient ainsi les signes :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$2x^2-6x+4$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-3$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$I(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$J(x) = 2 - \frac{3}{x^2} = \frac{2x^2-3}{x^2}$. Le numérateur est un trinôme du second degré dont les deux racines sont $2x^2-3=0 \iff x^2 = \frac{3}{2} \iff \left(x = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$2x^2-3$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
x^2		$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$J(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$K(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$K(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

$L(x) = \frac{7}{x^2+3} - 1 = \frac{-x^2+4}{x^2+3}$. Le numérateur est un trinôme du second degré de racines évidentes -2 et 2 ; le trinôme du dénominateur est quant à lui toujours strictement positif (car pour tout nombre x réel, $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2+3 \geqslant 3 > 0$). Ainsi,

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$-x^2+4$		$-$	0	$+$	0	$-$	
x^2+3		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$L(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$M(x) = -2 - \frac{3x-1}{x-2} = \frac{-5x+5}{x-2}$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$-5x+5$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
$x-2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$M(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

$N(x) = \frac{\frac{3x}{2}-5}{\frac{x}{3}+3} = \frac{\frac{3x-10}{2}}{\frac{x+9}{3}} = \frac{3x-10}{2} \times \frac{3}{x+9} = \frac{3(3x-10)}{2(x+9)}$

x	$-\infty$		-9		$\frac{10}{3}$		$+\infty$
$3(3x-10)$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$2(x+9)$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$N(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$P(x) = \frac{2x-1}{2x^2-1} - 3 = \frac{-6x^2+2x+2}{2x^2-1} = \frac{2(-3x^2+x+1)}{2x^2-1}$.
Le numérateur est un trinôme du second degré de discriminant réduit $\Delta = 1 - 4\times(-3)\times 1 = 13 > 0$, et admet donc deux racines réelles $x_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{-6} = \frac{1+\sqrt{13}}{6}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{6}$.
Le dénominateur est aussi du second degré et admet aussi deux racines :

$$2x^2-1=0 \iff x^2 = \frac{1}{2} \iff \left(x = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

On a donc enfin le tableau de signes :

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1-\sqrt{13}}{6}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1+\sqrt{13}}{6}$	
$-3x^2+x+1$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$
$2x^2-1$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$
$P(x)$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$

$Q(x) = 2x-1+\frac{3x-1}{2x-1} = \frac{(2x-1)^2+3x-1}{2x-1} = \frac{4x^2-x}{2x-1} = \frac{x(4x-1)}{2x-1}$
Le numérateur est un trinôme du second degré de racines, mises en évidence, $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{1}{4}$, et on a donc,

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x(4x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$2x-1$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$Q(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$R(x) = -x+2-\frac{1}{3}\times\frac{2x}{x+2} = \frac{(-x+2)(3(x+2))-2x}{3(x+2)} = \frac{-3x^2-2x+12}{3(x+2)}$
Le numérateur est un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4\times(-3)\times 12 = 148 > 0$, et admet donc deux racines réelles $x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{148}}{-6} = \frac{-1+\sqrt{37}}{3}$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{37}}{3}$.

x		$\frac{-1-\sqrt{37}}{3}$		-2		$\frac{-1+\sqrt{37}}{3}$	
$-3x^2-2x+12$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$
$3(x+2)$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$
$R(x)$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$

Ex 5

Si n est l'âge d'Hélène, n divise $(20+n) \iff n$ divise 20.
Les seuls diviseurs positifs de 20 sont 1,2,4,5,10,20.
Réponse : 6 fois

Ex 6

R nb de rouges, b nb de blancs et B nb de bleus.
Alors $R+b+B=60$ et $R+B=2b$ et $b+B=3R$ on obtient $b=20$, $R=15$ et $B=25$

Ex 7

	4	9	6	7	3	6
+		4	1	5	6	7
	5	3	8	3	0	3

Ex 8

Faire un dessin avec des "patates".

Remarque : tous les pourcentages donnés dans le texte, comme ceux calculés ci-dessous, sont des pourcentages par rapport à la même population de référence, c'est à dire l'ensemble des lecteurs interrogés pour le sondage.
Dans la zone commune aux trois ovales, se trouvent les étudiants masculins mariés soit 2,5% de la population.
Dans la zone commune aux ovales des hommes et des étudiants, il y a 4,2% de la population et donc dans la zone représentant les étudiants masculins non mariés, on trouve de la population soit 1,7%.
Les étudiants mariés représentent 14,7% de la population donc les étudiants mariés non masculins, c'est à dire les étudiantes mariées, représentent 12,2% de la population.
Les hommes mariés sont 8,6% de la population donc les hommes mariés non étudiants représentent 6,1% de la population.
Les hommes représentent 31,2% de la population donc les hommes célibataires non-étudiants représentent 20,9% de la population.
Les étudiants représentent 52,5% de la population donc les étudiants non-masculins non-mariés, c'est à dire les étudiantes célibataires, représentent 36,1% de la population.
Les personnes mariées représentent 47% de la population donc les femmes non-étudiantes mariées représentent 26,2% de la population.
Or la somme de tous ces pourcentages est : 20,9% + 1,7% + 36,1% + 6,1% + 2,5% + 12,2% + 26,2% = 105,7%.
Ce résultat supérieur à 100% est incohérent puisque les catégories de population dont on vient d'additionner les pourcentages n'ont aucun élément en commun.

Ex 9

1) Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que

$$P(3) = 14 \text{ et } P(1) = P\left(\tfrac{2}{3}\right) = 0.$$

$P(1) = P\left(\frac{2}{3}\right) = 0$ donc $P(x) = \alpha(x-1)(3x-2)$
Comme $P(3) = 14$ on a $14 = 14\alpha$ et $\alpha = 1$
donc $P(x) = (x-1)(3x-2)$.

2) Soit a, b et c trois réels distincts.

a) Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que

$$P(a) = b \text{ et } P(b) = P(c) = 0.$$

$P(b) = P(c) = 0$ donc $P(x) = \alpha(x-b)(x-c)$.
Comme $P(a) = b$ on a $b = \alpha(a-b)(a-c)$ donc
$P(x) = \dfrac{b}{(a-b)(a-c)}(x-b)(x-c)$.

b) Existe-t-il un polynôme P de degré 2 tel que

$$P(a) = 1,\ P(b) = 1 \text{ et } P(c) = 1\,?$$

On suppose qu'il existe un tel polynôme, alors le polynôme $Q(x) = P(x) - 1$ est un polynôme de degré 2 qui admet 3 racines distinctes : c'est impossible.

Ex 10

Soit x le nombre d'élèves et y la somme mise par élève.
$xy = 600$ et $(x-10)(y+3) = 600$.
On en déduit que $y = \dfrac{3}{10}x - 3$ puis que $\dfrac{3}{10}x^2 - 3x = 600$
En simplifiant : $x^2 - 10x - 2000 = 0$ on trouve deux solutions $x_1 = -40$ et $x_2 = 50$
Il y a 50 élèves généreux !

Ex 11

Soit m un réel et (E_m) l'équation d'inconnue x :

$$(E_m)\ :\ 2x^2 + (3m+1)x - m(m-1) = 0$$

1) $\Delta_m = 17m^2 - 2m + 1$.

2) $\Delta' < 0$ donc pour tout $m \in \mathbb{R}$, $\Delta_m > 0$ donc l'équation (E_m) admet deux solutions.

3) $P_m = -\dfrac{m(m-1)}{2}$.

4) On remplace x par -2. On obtient $-m^2 - 5m + 6 = 0$.
$\Delta = 49$ d'où deux possibilités $m = -6$ ou $m = 1$
• Cas $m = -6$ le produit est donc $P_{-6} = -21$ donc les deux racines de (E_{-6}) sont -2 et $\dfrac{21}{2}$.
• Cas $m = 1$ le produit est donc $P_1 = 0$ donc les deux racines de (E_1) sont $x_1 = -2$ et $x_2 = 0$.

Ex 12

$P(x) = (x - \sqrt{2} - \sqrt{3})(x - \sqrt{2} + \sqrt{3})(x + \sqrt{2} - \sqrt{3})(x + \sqrt{2} + \sqrt{3})$
$P(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ convient.

Ex 13

1) Soit $(E) : 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^7 = 0$.
1 n'est pas solution de (E) donc (somme d'une suite géométrique) :

$(E) \iff \dfrac{1-x^8}{1-x} = 0 \iff x^8 = 1$ (mais on a $x \neq 1$)

Donc $\mathscr{S} = \{-1\}$.

2) Soit $(E) : \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + \cdots + \dfrac{1}{x^8} = 0$.
0 n'est pas solution de (E) donc en multipliant par x^8 on obtient :
$(E) \iff 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^7 = 0$.
D'après la question précédente $\mathscr{S} = \{-1\}$.

3) Soit $(E) : 27x^7 + 9x^5 + 3x^3 + x = 0$:

$(E) \iff x(1 + 3x^2 + 9x^4 + 27x^6) = 0$
$\iff x\left(1 + 3x^2 + (3x^2)^2 + (3x^2)^3\right) = 0$
on a somme de termes d'une suite géométrique si $3x^2 \neq 1$
$\iff x \times \dfrac{1-(3x^2)^4}{1-3x^2} = 0$
$\iff x = 0$ ou $3x^2 = \pm 1$
mais $3x^2 \neq 1$ et $3x^2 = -1$ impossible
$\iff x = 0$

$\mathscr{S} = \{0\}$

Ex 14

Soit $n \in \mathbb{N}^*, n > 2$, on note $\mathscr{P}(n)$ l'assertion : « $c^n > a^n + b^n$ ».

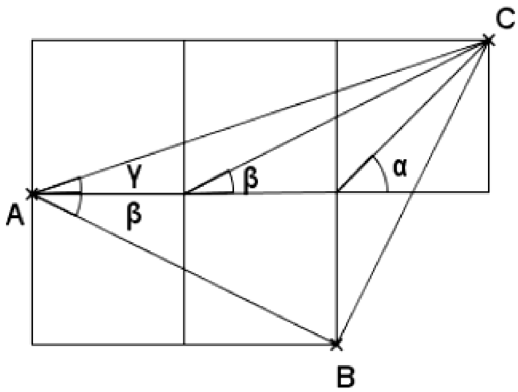
- *Initialisation :* Pour $n = 3$, a, b, c sont les longueurs des côtés d'un triangle rectangle dont le plus grand côté est c donc $c^2 = a^2 + b^2$.
  En multipliant par c on a $c^3 = ca^2 + cb^2$
  Or $c > a$ et $c > b$ donc $ca^2 > a^3$ et $cb^2 > b^3$
  Finalement $c^3 > a^3 + b^3$ donc $\mathscr{P}(3)$ est vraie .

- *Hérédité :* Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 2$, supposons que $\mathscr{P}(n)$ vraie.
  Par HR, $c^n > a^n + b^n$.
  En multipliant par c on a $c^{n+1} > ca^n + cb^n$
  Or $c > a$ et $c > b$ donc $ca^n > a^{n+1}$ et $cb^n > b^{n+1}$
  Finalement $c^{n+1} > a^{n+1} + b^{n+1}$
  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion :* Par principe de récurrence,

$$\text{pour entier } n > 2,\ c^n > a^n + b^n$$

Ex 15

On considère que les carrés sont de côté 1.
On a $\alpha = 45°$
D'après le th. de Pythagore : $BE = \sqrt{5}$ donc $\cos(\beta) = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.
De même, $AE = \sqrt{10}$ donc $\cos(\gamma) = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$
Comme $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, on a : $\sin(\beta) = \sqrt{1 - \frac{20}{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$
et $\sin(\gamma) = \sqrt{1 - \frac{90}{100}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$
$\cos(\beta+\gamma) = \cos(\beta)\cos(\gamma) - \sin(\beta)\sin(\gamma)$
$\cos(\beta+\gamma) = \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} - \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{3\sqrt{2}}{5} - \frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
On en déduit que $\beta + \gamma = \alpha$.
Solution géométrique :



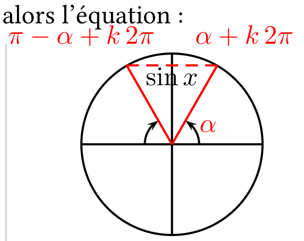
Le triangle ABC est isocèle rectangle en B. Donc $\widehat{BAC} = \beta + \gamma = 45°$. Les inégalités strictes font que Blaise comme Évariste avaient tort.

Ex 16

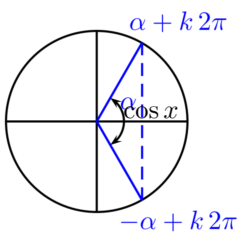
1) $I =]-\pi, \pi]$, $\quad \sqrt{2}\cos(2x) - 1 = 0$.

- Il faut dans un premier temps écrire l'égalité sous la forme $\sin x = \sin\alpha$ ou $\cos x = \cos\alpha$, puis utiliser les propriétés du cours. Soit α un réel fixé, alors l'équation :

  a) $\sin x = \sin\alpha$ admet pour solutions $\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \textit{ou} \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.



  b) $\cos x = \cos\alpha$ admet pour solutions $\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \textit{ou} \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.



$$\begin{aligned} \sqrt{2}\cos(2x) - 1 = 0 &\iff \cos(2x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\iff \cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

- Ici, la connaissance du cercle trigonométrique nous donne que $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{4}$. On a donc :

$$\cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \cos(2x) = \cos\frac{\pi}{4}$$

- On utilise maintenant la propriété.

$$\begin{aligned} & \cos(2x) = \cos\frac{\pi}{4} \\ \iff & \begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \textit{ou} \\ 2x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}, \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\ \iff & \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{8} + k\pi & ① \\ \textit{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{8} + k\pi & ② \end{cases}, \text{avec } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

On a multiplié par $\dfrac{1}{2}$ les 2 membres des égalités

On obtient les solutions dans $\mathbb{R}$ de cette équation. On remarque qu'il y en a une infinité.

- On va maintenant chercher les solutions dans I. Pour ①, avec $k = -1$ et $k = 0$ on obtient 2 solutions dans I, $-\dfrac{7\pi}{8}$ et $\dfrac{\pi}{8}$. De même pour ②, on a deux solutions $-\dfrac{\pi}{8}$ et $\dfrac{7\pi}{8}$. On a trouvé ces solutions en regardant un cercle trigonométrique. Ce ne sera pas possible avec un intervalle I moins "simple" et surtout un nombre de solutions plus important.

2) $I = [0; \pi]$, $\quad \cos 3x = \sin(x + \dfrac{\pi}{4})$.

Pour cette équation il faut changer soit le cosinus en sinus, soit le sinus en cosinus grâce aux formules
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ ou $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$.

Personnellement, je préfère faire apparaître une équation de la forme

$\cos\alpha = \cos\beta$.

$$\begin{aligned}
& \cos 3x = \sin(x+\frac{\pi}{4}) \\
\iff\quad & \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
\iff\quad & \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{4}\right) \\
\iff\quad & \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \\
\iff\quad & \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} - x + 2k\pi \\ \textit{ou} \\ 3x = -\frac{\pi}{4} + x + 2k\pi \end{cases} \text{, avec } k\in\mathbb{Z} \\
\iff\quad & \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \textit{ou} \\ 2x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{, avec } k\in\mathbb{Z} \\
\iff\quad & \begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2} & ① \\ \textit{ou} \\ x = -\frac{\pi}{8} + k\pi & ② \end{cases} \text{, avec } k\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

On cherche les solutions dans I.
Pour ②, avec $k = 1$ on obtient une solution dans I, $-\frac{\pi}{8} + \pi = \frac{7\pi}{8}$.
Pour ①, on cherche les nombres $k \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$0 \leqslant \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2} \leqslant \pi$$

On a une double inéquation à résoudre.

$$\begin{aligned}
& 0 \leqslant \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2} \leqslant \pi \\
\iff\quad & 0 \leqslant \frac{1}{16} + \frac{k}{2} \leqslant 1 \qquad \text{(on multiplie par } \frac{1}{\pi}\text{)} \\
\iff\quad & -\frac{1}{16} \leqslant \frac{k}{2} \leqslant 1 - \frac{1}{16} \\
\iff\quad & -\frac{1}{8} \leqslant k \leqslant 2 - \frac{1}{8} \\
\iff\quad & -\frac{1}{8} \leqslant k \leqslant \frac{15}{8}
\end{aligned}$$

Donc k est un entier relatif tel que $-\frac{1}{8} \leqslant k \leqslant \frac{15}{8}$, on a deux valeurs possibles $k = 0$ et $k = 1$.

- Pour $k = 0$, on a, $x_1 = \frac{\pi}{16}$
- Pour $k = 1$, on a, $x_2 = \frac{\pi}{16} + 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{16}$

On conclut pour les solutions de l'équation dans I, $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{16}; \frac{9\pi}{16}; \frac{7\pi}{8}\right\}$

3) $I =]-\pi;\pi]$, $\qquad \sin^2 x - \sin x - \frac{3}{4} = 0$.

Comme pour les équations bicarrées, on fait un changement de variable, on pose $X = \sin x$ avec $X \in [-1;1]$. L'équation s'écrit alors :

$$X^2 - X - \frac{3}{4} = 0$$

Ce qui est équivalent à : $4X^2 - 4X - 3 = 0$.
Après le calcul du discriminant on obtient deux solutions : $X_1 = -\frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{3}{2}$. La dernière est non valable, pour trouver les solutions de l'équation il nous reste à résoudre $\sin x = -\frac{1}{2}$ dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

$$\begin{aligned}
& \sin x = -\frac{1}{2} \\
\iff\quad & \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\
\iff\quad & \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \textit{ou} \\ x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \end{cases} \text{, avec } k\in\mathbb{Z} \\
\iff\quad & \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \textit{ou} \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \text{, avec } k\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$, on a donc 2 solutions $\mathcal{S} = \left\{-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right\}$

4) $I = \mathbb{R}$, $\qquad \cos^2(x) = \frac{1+\sin(x)}{2}$.

Il faut se ramener à une équation qu'on sait résoudre :

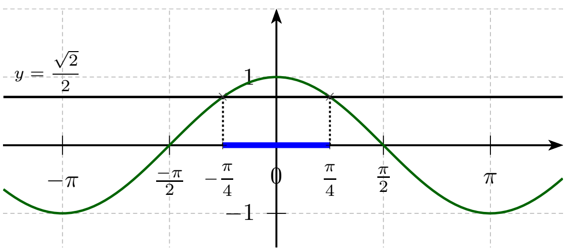
$$\begin{aligned}
& \cos^2(x) = \frac{1+\sin(x)}{2} \\
\iff\quad & 2\cos^2(x) = 1 + \sin(x) \\
\iff\quad & 2\left(1 - \sin^2(x)\right) = 1 + \sin(x) \\
\iff\quad & 2\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0
\end{aligned}$$

On procède comme précédemment :
On pose $X = \sin(x)$, on doit résoudre $2X^2 + X - 1 = 0$, on a deux solutions valables $X_1 = \frac{1}{2}$ et $X_2 = -1$. Du coup, on finit en résolvant dans $\mathbb{R}$, $\sin(x) = -1$ et $\sin(x) = \frac{1}{2}$.
On obtient : $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \qquad$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Ex 17

1) $I =]-\pi,\pi]$, $\qquad \cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

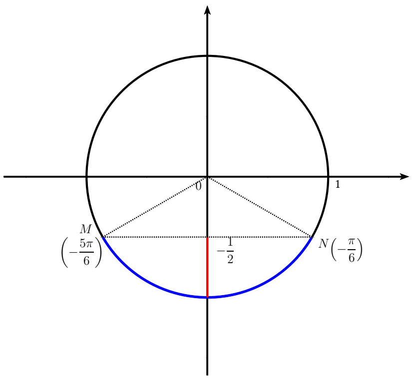
On peut utiliser le graphique suivant ou un cercle trigonométrique comme dans l'exercice après :



D'après le graphique et une bonne connaissance des valeurs remarquables du cosinus, on lit que, dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$, les solutions de l'inéquation $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ sont $\mathcal{S} = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

2) $I =]-\pi,\pi]$, $\qquad 2\sin(x) + 1 < 0$.

On ne donne ici les solutions que sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$.
$2\sin x+1<0$, cette équation est équivalente à $\sin x < -\dfrac{1}{2}$, on a le graphique suivant :



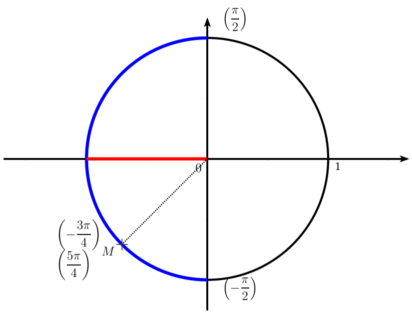
D'après le graphique, on lit : $\quad \mathcal{S}=\left]-\dfrac{5\pi}{6};-\dfrac{\pi}{6}\right[$.

3) $I=]-\pi,\pi]$, $\quad \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqslant 0$.

On pose $X=x+\dfrac{\pi}{4}$, on a :

$$\begin{aligned}
& x\in\,]-\pi;\pi] \\
\iff\quad & -\pi < x \leqslant \pi \\
\iff\quad & -\pi+\frac{\pi}{4} < x+\frac{\pi}{4} \leqslant \pi+\frac{\pi}{4} \\
\iff\quad & -\frac{3\pi}{4} < X \leqslant \frac{5\pi}{4} \\
\iff\quad & X\in\left]-\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]
\end{aligned}$$

• Résolution de $\cos X\leqslant 0$ sur l'intervalle $\left]-\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{5\pi}{4}\right]$.



D'après le graphique, sur l'intervalle $\left]-\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{5\pi}{4}\right]$, les solutions de l'inéquation $\cos X\leqslant 0$ sont,

$$\mathcal{S}=\left]-\frac{3\pi}{4};-\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{4}\right].$$

• $X=x+\dfrac{\pi}{4}$, donc $x=X-\dfrac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned}
& X\in\left]-\frac{3\pi}{4};-\frac{\pi}{2}\right] \\
\iff\quad & -\frac{3\pi}{4} < X \leqslant -\frac{\pi}{2} \\
\iff\quad & -\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4} < X-\frac{\pi}{4} \leqslant -\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} \\
\iff\quad & -\pi < x \leqslant \frac{-3\pi}{4} \\
\iff\quad & x\in\left]-\pi;-\frac{3\pi}{4}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& X\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{4}\right] \\
\iff\quad & \frac{\pi}{2}\leqslant X\leqslant\frac{5\pi}{4} \\
\iff\quad & \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\leqslant X-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4} \\
\iff\quad & \frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\pi \\
\iff\quad & x\in\left[\frac{\pi}{4};\pi\right]
\end{aligned}$$

Donc, sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$, les solutions de l'inéquation $\cos X\leqslant 0$ sont,

$$\mathcal{S}=\left]-\pi;-\frac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{\pi}{4};\pi\right].$$

4) $I=]-\pi,\pi]$, $\quad 2\cos^2 x-\cos x-1\leqslant 0$ Toujours pareil, on pose $X=\cos x$ avec $X\in[-1;1]$.
On étudie le signe de $2X^2-X-1$, On a ici une racine évidente $X_1=1$ et $X_1\times X_2=-\dfrac{1}{2}$ donc $X_2=-\dfrac{1}{2}$, on a le tableau de signe suivant :
$2X^2-X-1$ *est positif à l'extérieur des racines.*

X	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$2X^2-X-1$	$+2$	$+$	0	$-$	0

Il nous reste à résoudre $-\dfrac{1}{2}\leqslant\cos x\leqslant 1$, sur l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$. On donne le résultat brut.

$$\mathcal{S}=\left[\frac{-2\pi}{3}\,;\,\frac{2\pi}{3}\right]$$

5) $I=]-\pi,\pi]$, $\quad \sin 2x\geqslant\sin x$.
Pour cette question, il faut utiliser la formule trigonométrique vue avec le produit scalaire :
$\forall a\in\mathbb{R},\ \sin(2a)=2\cos a\sin a$

$$\begin{aligned}
& \sin 2x\geqslant\sin x \\
\iff\quad & \sin 2x-\sin x\geqslant 0 \\
\iff\quad & 2\cos x\sin x-\sin x\geqslant 0 \\
\iff\quad & (2\cos x-1)\sin x\geqslant 0
\end{aligned}$$

En très rapide :$\sin x\geqslant 0$ a pour solution les nombres x de l'intervalle $[0;\pi]$.
$2\cos x-1\geqslant 0\iff\cos x\geqslant\dfrac{1}{2}$.
Donc, $2\cos x-1\geqslant 0$ a pour solution les nombres x de l'intervalle $[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}]$.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		π
$\sin x$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0
$2\cos x-1$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$(2\cos x-1)\sin x$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0

On en déduit les solutions de $\sin 2x\geqslant\sin x$ dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

$$\mathcal{S}=\left]-\pi;-\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[0;\frac{\pi}{3}\right]\cup\{\pi\}$$

II Suites

Ex 18

1) $u_{10} = u_0 + 10r = \dfrac{79}{6}$ et $u_{20} = u_0 + 20r = \dfrac{149}{6}$;

2) $r = u_1 - u_0 = 3$ donc $u_2 = u_1 + r = 8$ et $u_5 = u_0 + 5r = 17$.

3) $5r = -10$ donc $r = -2$. Ainsi $u_0 = 17$ et $u_1 = 15$;

4) $3 = u_0 + 15r$ et $\dfrac{139}{3} = u_0 + 80r$ donc $r = \dfrac{2}{3}$ et $u_0 = -7$.

On a donc $S_{80} = 81\dfrac{\frac{139}{3} + (-7)}{2} = 1593$.

5) $u_0 + pr = 83$ et $u_0 = -7$ donc $pr = 90$.

De plus, $S_{p-1} = p\dfrac{u_0 + u_{p-1}}{2} = 2691$.

Soit $p\dfrac{u_0 + u_0 + (p-1)r}{2} = 2691$.

Soit $-7p + 45p - 45 = 2691 \Leftrightarrow 38p = 2736$ donc $p = 72$ et $r = \dfrac{5}{4}$.

Ex 19

1) $u_1 = \dfrac{7}{3}$, $u_2 = \dfrac{7}{9}$ et $u_3 = \dfrac{7}{27}$.

2) $q^2 = \dfrac{1}{4}$.

Soit $q = \dfrac{1}{2}$, alors $u_1 = 6$ et $u_5 = \dfrac{3}{8}$, soit $q = -\dfrac{1}{2}$, alors $u_1 = -6$ et $u_5 = -\dfrac{3}{8}$.

3) On a $u_p = u_0 \times q^p$ donc $-48 = -\dfrac{3}{8} \times q^p$ soit $q^p = \dfrac{48 \times 8}{3} = 128$.

D'autre part, on a $S_p = u_0\dfrac{1 - q^{p+1}}{1-q}$ soit $\dfrac{-765}{8} = -\dfrac{3}{8}\dfrac{1 - q^{p+1}}{1-q}$ et donc $255 = \dfrac{1 - 128q}{1-q}$ ce qui donne $127q - 254 = 0$ soit $q = 2$. On a enfin $p = 7$.

Ex 20

On a $u_{n+1} = u_n + r \Leftrightarrow v_{n+1} = \mathrm{e}^{u_{n+1}} = \mathrm{e}^{u_n} \times \mathrm{e}^r = (\mathrm{e}^r)\, v_n$ donc (v_n) est géométrique de raison e^r.

Ex 21

1) $u_1 = \frac{13}{5}$, $u_2 = \frac{89}{25}$, $u_3 = \frac{517}{125}$.

2) Soit a un réel et (v_n) la suite définie par $v_n = u_n + a$ pour tout n entier naturel.

$v_{n+1} = u_{n+1} + a$
$v_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 2 + a$
$v_{n+1} = \frac{3}{5}(u_n + a) - \frac{3}{5}a + 2 + a$
$v_{n+1} = \frac{3}{5}v_n + \frac{2}{5}a + 2$
(v_n) est géométrique $\Leftrightarrow$ $\frac{2}{5}a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -5$ On a alors pour tout n entier naturel , $v_{n+1} = \frac{3}{5}v_n$ donc (v_n) est géométrique de raison $3/5$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 5 = -4$

3) D'après les résultats sur les suites géométriques $v_n = -4\left(\frac{3}{5}\right)^n$.

4) Comme $v_n = u_n - 5$ on a $u_n = -4\left(\frac{3}{5}\right)^n + 5$.

5) Comme $0 < \frac{3}{5} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{5}\right)^n = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$.

6) T_n est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique. D'après les résultats du cours comme $\frac{3}{5} \neq 1$ on a : $T_n = -4\dfrac{\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right)}{\left(1-\frac{3}{5}\right)} = -4 \times \frac{5}{2}\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right)$

Donc $T_n = -10(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1})$

7) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{5}\right)^n = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = -10$.

8) Comme $u_n = v_n + 5$ pour tout entier naturel n, $S_n = T_n + 5(n+1)$ car il y a $n+1$ termes.

Donc $S_n = -10\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right) + 5(n+1)$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = -10$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 5(n+1) = +\infty$, donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

Ex 22

1) **a)** Pour tout entier naturel non nul n,

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

$$w_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{12} = \frac{1}{12}w_n.$$

Donc $(w_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{12}$ et de premier terme $w_1 = v_1 - u_1 = -11$.

Donc pour tout $n \geqslant 1$, $w_n = -11\left(\dfrac{1}{12}\right)^{n-1}$.

b) Comme $\left|\dfrac{1}{12}\right| < 1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

2) Pour tout entier naturel non nul n,

$x_{n+1} = 8v_{n+1} + 3u_{n+1} = 8\dfrac{u_n + 3v_n}{4} + 3\dfrac{u_n + 2v_n}{3} = 3u_n + 8v_n = x_n$.

Donc $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est constante et $x_1 = 8 + 36 = 44$.

3) Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{cases} v_n - u_n = w_n \\ 8v_n + 3u_n = 44 \end{cases} \iff \begin{cases} v_n = \dfrac{3}{11}w_n + 4 \\ u_n = -\dfrac{8}{11}w_n + 4 \end{cases}.$$

On en déduit

$$u_n = 8\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} + 4 \text{ et } v_n = -3\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} + 4.$$

4) $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ convergent vers 4.

Ex 23

1) Soit la propriété $\mathscr{P}(n)$: $u_n > 0$.

Démontrons cette propriété par récurrence :

- **initialisation** : on a $u_0 = 2 > 0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie.
  Alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1} > 0$ car $u_n > 0$ d'après l'hypothèse de récurrence et $u_n + 1 > 1 > 0$ d'après la même hypothèse.
  $P(n+1)$ est donc vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Puisque $u_n > 0$, $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ est défini puisqu'on calcule l'inverse d'un nombre non nul.

2) On a : $u_1 = \dfrac{u_0}{u_0+1} = \dfrac{2}{3}$; $u_2 = \dfrac{u_1}{u_1+1} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+1} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \dfrac{2}{5}$; $u_3 = \dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}+1} = \dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{5}} = \dfrac{2}{7}$ et $u_4 = \dfrac{2}{9}$

Alors : $v_1 = \dfrac{3}{2}$; $v_2 = \dfrac{5}{2}$; $v_3 = \dfrac{7}{2}$; $v_4 = \dfrac{9}{2}$.

3) Montrons que (v_n) est arithmétique :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{\frac{u_n}{u_n+1}} = \dfrac{u_n+1}{u_n} = \dfrac{u_n}{u_n} + \dfrac{1}{u_n} = 1 + \dfrac{1}{u_n} = 1 + v_n = v_n + 1$ donc $v_{n+1} = v_n + 1$.

(v_n) est donc arithmétique, de raison $r = 1$.

4) **a)** Puisque (v_n) est arithmétique de raison $r = 1$, $v_n = v_0 + 1 \times n$ avec $v_0 = \dfrac{1}{u_0} = \dfrac{1}{2}$ d'où $v_n = \dfrac{1}{2} + n = \dfrac{2n+1}{2}$.

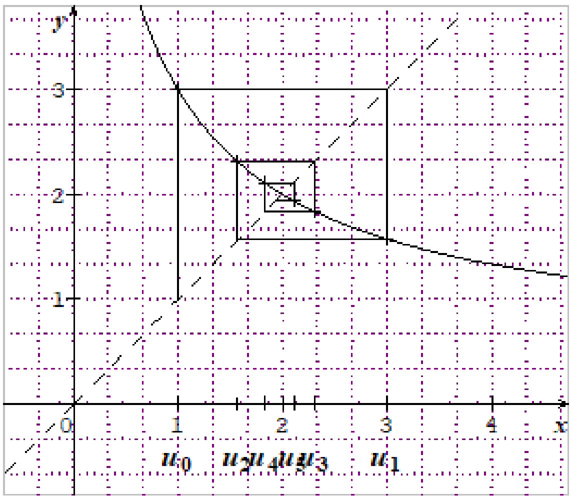
b) $v_n = \dfrac{1}{u_n} \Leftrightarrow u_n = \dfrac{1}{v_n}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$

On peut vérifier que l'on retrouve bien les premiers termes calculés à la première question.

Ex 24

1) $u_1 = 3$, $u_2 = \frac{11}{7}$, $u_3 = \frac{67}{29}$

2) On obtient le graphique :



On peut conjecturer que la suite converge vers 2.

3) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.

Initialisation : $u_0 = 1$

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_k \geqslant 0$ (HR)

On a $u_k + 8 > 0$ et $2u_k + 1 > 0$

Donc $u_{k+1} = \frac{u_k+8}{2u_k+1} > 0$

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

4) Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n = \frac{u_n-2}{u_n+2}$.

$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+2} = \frac{u_n+8-2(2u_n+1)}{2u_n+1} \times \frac{2u_n+1}{u_n+8+2(2u_n+1)} = \frac{u_n+8-4u_n-2}{u_n+8+4u_n+2}$

$v_{n+1} = \frac{-3u_n+6}{5u_n+10} = \frac{-3(u_n-2)}{5(u_n+2)} = -\frac{3}{5}v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{5}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3}$.

5) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{5}\right)^n$.

6) $v_0 \neq 1$ et pour tout $n > 0$, $v_n = \frac{(-3)^{n-1}}{5^n}$. Comme 3 et 5 sont premiers entre eux cette fraction est irréductible donc $v_n \neq 1$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - 1 \neq 0$. On peut également remarquer que $|v_n| \leqslant \dfrac{1}{3} < 1$ ce qui permet de conclure également.

7) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n-2}{u_n+2} \Leftrightarrow (u_n+2)\,v_n = u_n - 2$ et $u_n \neq -2$ (toujours vrai car $u_n \geqslant 0$) $\Leftrightarrow u_n v_n + 2v_n = u_n - 2$

$\Leftrightarrow u_n v_n - u_n = -2v_n - 2$

$\Leftrightarrow u_n\,(v_n - 1) = -2\,(v_n + 1)$

$\Leftrightarrow u_n = \frac{-2(v_n+1)}{v_n-1}$ car $v_n - 1 \neq 0$

8) On a donc $u_n = \dfrac{\frac{2}{3}\left(\frac{-3}{5}\right)^n - 2}{-\frac{1}{3}\left(\frac{-3}{5}\right)^n - 1}$

$-1 < \frac{-3}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{-3}{5}\right)^n = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Ex 25

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = -1$, $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n$.

1) D'après la définition, $u_2 = u_1 - \dfrac{1}{4}u_0 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

- Si la suite était géométrique, d'après les deux premiers termes la raison serait égale à $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{\frac{1}{2}}{-1} = -\dfrac{1}{2}$; or, $u_1 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{-1}{4} \neq u_2$.
- Si la suite était arithmétique, d'après les deux premiers termes la raison serait égale à $u_1 - u_0 = \dfrac{1}{2} - (-1) = \dfrac{3}{2}$; or, $u_1 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \neq u_2$.

Conclusion : la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n$.

a) $v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times (-1) = 1$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = \left(u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\right) - \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) = \frac{1}{2}v_n$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$ signifie que la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

d) Par conséquent, on a

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}.$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.

a) $w_0 = \dfrac{u_0}{v_0} = \dfrac{-1}{1} = -1$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$w_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \dfrac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = \dfrac{2(v_n + \frac{1}{2}u_n)}{v_n} = \dfrac{2v_n + u_n}{v_n} = 2 + \dfrac{u_n}{v_n}$.

c) Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_n}{v_n} = w_n$, donc l'égalité ci-dessus s'écrit : $w_{n+1} = 2 + w_n$.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = 2 + w_n$ signifie que la suite (w_n) est une suite arithmétique de premier terme $w_0 = -1$ et de raison $r = 2$.
Par conséquent ,
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 + n \times r = -1 + 2n$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a trouvé que $w_n = 2n - 1$.
D'autre part, $w_n = \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{u_n}{\frac{1}{2^n}} = 2^n \times u_n$.
Donc $2n - 1 = 2^n \times u_n$, soit $u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$ (car $2^n \neq 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$).

5) Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

- Initialisation : $S_0 = u_0 = -1$ et $2 - \frac{2\times 0+3}{2^0} = 2 - \frac{3}{1} = 2 - 3 = -1$.
La formule est vraie au rang $n = 0$.
- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que

$$S_k = \sum_{i=0}^{k} u_i = u_0 + u_1 + \cdots + u_k = 2 - \frac{2k+3}{2^k} \quad \text{(HR)}.$$

Alors,
$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + u_{k+1} \\ &= \left(2 - \frac{2k+3}{2^k}\right) + \frac{2(k+1)-1}{2^{k+1}} \quad \text{(HR)} \\ &= 2 + \frac{-2(2k+3)+2k+1}{2^{k+1}} \\ &= 2 + \frac{-2k-5}{2^{k+1}} \\ &= 2 - \frac{2k+5}{2^{k+1}} \\ &= 2 - \frac{2(k+1)+3}{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

La formule est héréditaire.
- Conclusion : On a donc démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = 2 - \dfrac{2n+3}{2^n}$.

6)
- Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}, 2 - \dfrac{2n+3}{2^n} \leqslant 2 - \dfrac{3}{2^n}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2n+3 \geqslant 3$, d'où $\dfrac{2n+3}{2^n} \geqslant \dfrac{3}{2^n}$, et par suite $-\dfrac{2n+3}{2^n} \leqslant -\dfrac{3}{2^n}$. Enfin, $2 - \dfrac{2n+3}{2^n} \leqslant 2 - \dfrac{3}{2^n}$.
- Montrons que
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad 2 - \dfrac{5}{1,5^n} \leqslant 2 - \dfrac{2n+3}{2^n}$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} 2 - \frac{5}{1,5^n} \leqslant 2 - \frac{2n+3}{2^n} &\iff -\frac{5}{1,5^n} \leqslant -\frac{2n+3}{2^n} \\ &\iff \frac{5}{1,5^n} \geqslant \frac{2n+3}{2^n} \\ &\iff \frac{2^n}{1,5^n} \geqslant \frac{2n+3}{5} \\ &\iff \left(\frac{4}{3}\right)^n \geqslant \frac{2n+3}{5} \end{aligned}$$
Démontrons par récurrence que
pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left(\dfrac{4}{3}\right)^n \geqslant \dfrac{2n+3}{5}$.
— Initialisation : $\left(\frac{4}{3}\right)^0 = 1$ et $\frac{2\times 0+3}{5} = \frac{3}{5}$; or $1 \geqslant \frac{3}{5}$.
$\left(\left(\frac{4}{3}\right)^1 = \frac{4}{3}\right.$ et $\frac{2\times 1+3}{5} = 1$; or $\left.\frac{4}{3} \geqslant 1\right)$.
L'inégalité est vraie au rang $n = 0$ (et au rang $n = 1$).
— Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$, on suppose que

$$\left(\frac{4}{3}\right)^k \geqslant \frac{2k+3}{5}. \quad \text{(HR)}.$$

Alors,
$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} &= \frac{4}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^k \\ &\geqslant \frac{4}{3} \times \frac{2k+3}{5} \quad \text{(HR)} \\ &\geqslant \frac{8k+12}{15} \geqslant \frac{6k+15}{15} \quad (\text{car } k \geqslant 2) \\ \left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} &\geqslant \frac{2k+5}{5} = \frac{2(k+1)+3}{5} \end{aligned}$$
L'inégalité est héréditaire.
— Conclusion : On a donc démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$\left(\dfrac{4}{3}\right)^n \geqslant \dfrac{2n+3}{5}$ i.e $2 - \dfrac{5}{1,5^n} \leqslant 2 - \dfrac{2n+3}{2^n}$.
- Comme $1,5 > 1$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1,5^n = +\infty$ d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2 - \frac{5}{1,5^n} = 2$.
- Comme $2 > 1$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$
d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2 - \frac{3}{2^n} = 2$.
Alors, d'après le théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = 2$

Ex 26

1) $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geqslant 0$: la suite est donc croissante.

2) a) $h(x) = x^2 + x$; h est dérivable et $h'(x) = 2x + 1$.
Sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$, $h'(x) < 0 \Rightarrow h$ est décroissante ;
Sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$, $h'(x) > 0 \Rightarrow h$ est croissante.
$h'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$. La fonction admet en ce point un extremum qui est un minimum $h\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$.
Sur $\left]-1; -\frac{1}{2}\right[$ la fonction décroît de 0 à $-\frac{1}{4}$ et sur $\left]-\frac{1}{2}; 0\right[$, la fonction croit de $-\frac{1}{4}$ à 0.
Conclusion :
si $x \in]-1; 0[$, alors $-1 < -\dfrac{1}{4} \leqslant h(x) < 0$.

b) Par récurrence :
- Initialisation $-1 < a = u_0 < 0$.
- Hérédité : supposons que pour l'entier naturel k, $-1 < u_k < 0$.
D'après la question précédente :
si $u_k \in]-1\,;\,0[$, alors $u_{k+1} = h(u_k)$ appartient elle aussi à cet intervalle

Conclusion : on a montré par récurrence que pour tout naturel n, $-1 < u_n < 0$.

3) La suite u est croissante et majorée par 0 : elle est donc convergente et sa limite ℓ est telle que $\ell \leqslant 0$.
Or la fonction h, dérivable est continue : la relation $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$ donne à la limite

$$\ell = \ell^2 + \ell \iff \ell^2 = 0 \iff \ell = 0.$$

Conclusion : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Ex 27

1) a)
$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\ &= \frac{\left[\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right]\left[\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right]}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}, \end{aligned}$$
car $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.
Pour tout n, $n < n+1$ donc $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$ (croissance

de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$).

On en déduit :

$\sqrt{n}+\sqrt{n} < \sqrt{n}+\sqrt{n+1} < \sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}$, c'est-à-dire $2\sqrt{n} < \sqrt{n}+\sqrt{n+1} < 2\sqrt{n+1}$.

En appliquant la fonction inverse qui est décroissante sur $]0;+\infty[$, on en déduit :

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < u_n < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\right) = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2) Pour tout n, $u_1+u_+\cdots+u_n$ $= \left[\sqrt{2}-\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{3}-\sqrt{2}\right]+\cdots$ $+\left[\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right]+\left[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right] = \sqrt{n+1}-1$, après simplification.

On en déduit que, pour tout $n>0$, $v_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n}}$.

On a $v_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\dfrac{n+1}{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$\sqrt{\dfrac{n+1}{n}} = \sqrt{\dfrac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n}} = \sqrt{1+\dfrac{1}{n}}$ donc

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\dfrac{n+1}{n}} = 1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$.

On en déduit : $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$

Ex 28

1) $d_1 = 250$ $\quad a_1 = 445$ $\quad d_2 = 225$ $\quad a_2)\dfrac{835}{2}$

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &= d_{n+1} - 200\\
&= \frac{1}{2}d_n + 100 - 200\\
&= \frac{1}{2}d_n - 100\\
&= \frac{1}{2}(d_n - 200)\\
&= \frac{1}{2}c_n
\end{aligned}$$

On en déduit que (c_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$c_n = 100\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $d_n = 100\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 200$.

Démontrons par récurrence que la propostion $\mathcal{P}_n$: « $a_n = 100n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 110\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 340$ » est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

- Initialisation : pour $n=0$: $100\times 0\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 + 110\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 + 340 = 450 = a_0$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Supposons qu'il existe un entier naturel n pour lequel $\mathcal{P}_n$ est vraie.
  On a alors :

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70\\
&= \frac{1}{2}\left(100\times\left(\frac{1}{2}\right)^n + 200\right) +\\
&\quad \frac{1}{2}\left(100n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340\right) + 70\\
&= 100\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 100 + 100n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} +\\
&\quad 110\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 170 + 70\\
&= 100\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(n+1) + 110\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 340
\end{aligned}$$

  On en déduit que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- On conclut par le principe de récurrence.

4) a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant 3$, on a

$$\begin{aligned}
2n^2 - (2+1)^2 &= 2n^2 - n^2 - 2n - 1\\
&= n^2 - 2n - 1\\
&= (n-1)^2 - 2
\end{aligned}$$

Mais $n\geqslant 3$ donc $n-1\geqslant 2$ et $(n-1)^2\geqslant 4$, donc $(n+1)^2 - 2\geqslant 2 > 0$ ce qui permet de conclure.

b) Démontrons par récurrence sur $n\geqslant 4$ la proposition $\mathcal{Q}_n$: « $2^n\geqslant n^2$ ».

- Initialisation : pour $n=4$, on a $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$ donc $\mathcal{Q}_4$ est vraie.
- Hérédité : On suppose que $\mathcal{Q}_n$ est vraie, pour un entier $n\geqslant 4$.
  On a donc $2^n\geqslant n^2$ ce qui entraîne, en multipliant par 2, que $2^{n+1}\geqslant 2n^2$.
  Mais, puisque $n\geqslant 4$, on a $n\geqslant 3$ donc, d'après la question précédente, $2n^2 > (n+1)^2$. On peut combiner les inégalités de même sens et donc on a $2^{n+1} > (n+1)^2$ et $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : ...

c) Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 4$. D'après la question précédente, on a $2^n\geqslant n^2 > 0$ donc, en passant à l'inverse, $0 < \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. En multiplaint par $100n$ qui est positif, on a bien $0\leqslant 100n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\leqslant\dfrac{100}{n}$.

5) Comme d'autre part $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{100}{n} = 0$, on en déduit par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} 100n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} 110\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ (suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$).

Par somme, la suite (a_n) est convergente, de limite $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 340$.

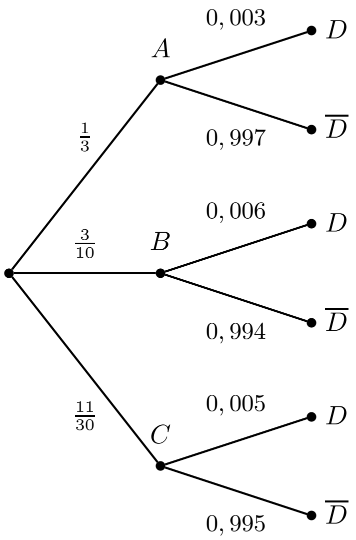
III Probabilités

Ex 29

Notons :

- A : l'événement : « la prothèse vient du fabricant A »
- B : l'événement : « la prothèse vient du fabricant B »
- C : l'événement : « la prothèse vient du fabricant C »
- D : l'événement : « la prothèse est défectueuse »

On a : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{3}$; $\mathbb{P}(B) = \dfrac{3}{10}$; $\mathbb{P}(C) = 1 - \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{10}\right) = \dfrac{11}{30}$
$\mathbb{P}_A(D) = 0,3\ \% = 0,003$; $\mathbb{P}_B(D) = 0,6\ \% = 0,006$ et $\mathbb{P}_C(D) = 0,5\ \% = 0,005$.
On peut traduire la situation par un arbre pondéré.

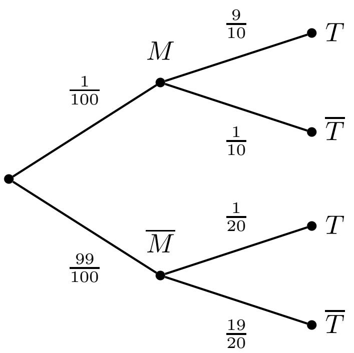


(A, B, C) forme un système complet d'événements donc d'après la **formule des probabilités totales**, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}_A(D) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_B(D) \times \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_C(D) \times \mathbb{P}(C)\\ &= 0,003 \times \frac{1}{3} + 0,006 \times \frac{3}{10} + 0,005 \times \frac{11}{30}\\ &= \frac{0,139}{30} = \frac{139}{30\,000}\end{aligned}$$

Ex 30

1) On a : $\mathbb{P}(M) = \dfrac{1}{100}$; $\mathbb{P}_M(T) = \dfrac{90}{100} = \dfrac{9}{10}$;
$\mathbb{P}_{\overline{M}}(T) = \dfrac{5}{100} = \dfrac{1}{20}$
Représentons la situation par un arbre pondéré



2) a) $\mathbb{P}(M \cap T) = \mathbb{P}_M(T) \times \mathbb{P}(M) = \dfrac{9}{10} \times \dfrac{1}{100} = \dfrac{9}{1\,000}$.
$\mathbb{P}\left(\overline{M} \cap T\right) = \mathbb{P}_{\overline{M}}(T) \times \mathbb{P}\left(\overline{M}\right) = \dfrac{1}{20} \times \dfrac{99}{100} = \dfrac{99}{2\,000}$.

b) Calculons $\mathbb{P}(T)$.
$(M, \overline{M})$ forme un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :
$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}_M(T) \times \mathbb{P}(M) + \mathbb{P}_{\overline{M}}(T) \times \mathbb{P}\left(\overline{M}\right) = \dfrac{9}{1000} + \dfrac{99}{2000} = \dfrac{117}{2\,000}$.

3) La probabilité qu'une personne soit réellement atteinte par cette maladie sachant que son test est positif est $\mathbb{P}_T(M) = \dfrac{\mathbb{P}(M \cap T)}{\mathbb{P}(T)} = \dfrac{\frac{9}{1000}}{\frac{117}{2000}} = \dfrac{18}{117} = \dfrac{2}{13}$

4) La probabilité qu'une personne ne soit pas atteinte par cette maladie sachant que son test est positif est :
$\mathbb{P}_T(\overline{M}) = 1 - \mathbb{P}_T(M) = 1 - \dfrac{2}{13} = \dfrac{11}{13}$.

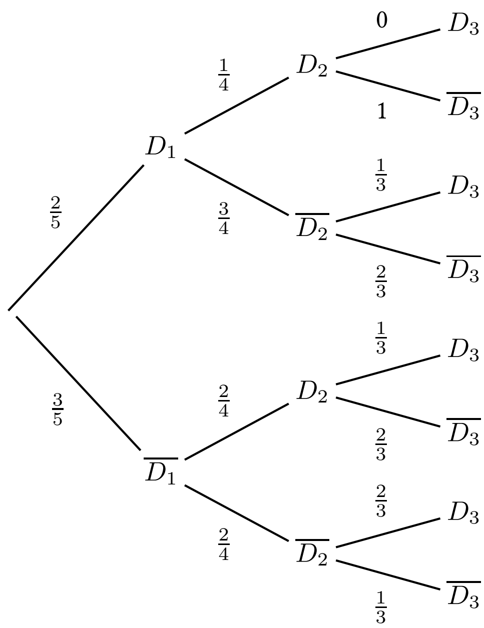
5) La probabilité qu'une personne soit atteinte par cette maladie sachant que son test est négatif est :
$\mathbb{P}_{\overline{T}}(M) = \dfrac{\mathbb{P}\left(M \cap \overline{T}\right)}{\mathbb{P}\left(\overline{T}\right)} = \dfrac{\mathbb{P}_M\left(\overline{T}\right) \times \mathbb{P}(M)}{1 - \mathbb{P}(T)} = \dfrac{\frac{1}{1000}}{\frac{1883}{2000}} = \dfrac{2}{1\,883}$

Ex 31

1) On a bien sûr $\mathbb{P}\left(D_1\right) = \dfrac{2}{5}$.

2) Si la clef numéro 1 n'a pas ouvert la porte il reste une clef défectueuse sur les quatre encore à essayer, donc
$\mathbb{P}_{D_1}\left(D_2\right) = \dfrac{1}{4}$.
On a $\mathbb{P}\left(D_1 \cap D_2\right) = \mathbb{P}\left(D_1\right) \times \mathbb{P}_{D_1}\left(D_2\right) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{10}$.

3)



En suivant la septième branche (à partir du haut), on obtient :
$\mathbb{P}\left(\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap D_3\right) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0,2$.

4) a) En suivant la troisième branche
$\mathbb{P}(2\ ;\ 4) = \mathbb{P}\left(\overline{D_1} \cap D_2 \cap \overline{D_3} \cap D_4 \cap \overline{D_5}\right) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{3 \times 2 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = \frac{1}{10} = 0,1$

b) Si les clefs qui n'ouvrent pas sont les deux dernières, c'est que les trois premières ouvrent, donc :
$\mathbb{P}(4\ ;\ 5) = \mathbb{P}\left(\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap \overline{D_3}\right) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \dfrac{1}{10}$.

Ex 32

Partie A

1) $\mathbb{P}(G_1) = \dfrac{1}{2}$; $\quad \mathbb{P}(P_1) = \dfrac{1}{2}$

$\mathbb{P}_{G_1}(G_2) = 0,6$ car si elle gagne une partie, la probabilité pour qu'elle gagne la suivante est 0,6.

$\mathbb{P}_{P_1}(G_2) = 0,3$ car si elle perd une partie, la probabilité qu'elle perde la suivante est 0,7.

(G_1, P_1) forme un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales

$\mathbb{P}(G_2) = \mathbb{P}(G_2 \cap G_1) + \mathbb{P}(G_2 \cap P_1)$

$\mathbb{P}(G_2) = \mathbb{P}_{G_1}(G_2) \times \mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}_{P_1}(G_2) \times \mathbb{P}(P_1) = 0,6 \times 0,5 + 0,3 \times 0,5 = 0,45.$

2) $\mathbb{P}(P_2) = 1 - \mathbb{P}(G_2) = 0,55.$

Partie B

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \mathbb{P}(G_n)$ et $y_n = \mathbb{P}(P_n)$

1) $\mathbb{P}_{G_n}(P_{n+1}) = 1 - \mathbb{P}_{G_n}(G_{n+1}) = 1 - 0,6 = 0,4$

$\mathbb{P}_{P_n}(G_{n+1}) = 1 - \mathbb{P}_{P_n}(P_{n+1}) = 1 - 0,7 = 0,3$

2) (G_n, P_n) forme un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales

$\mathbb{P}(G_{n+1}) = \mathbb{P}(G_n \cap G_{n+1}) + \mathbb{P}(P_n \cap G_{n+1})$

$= \mathbb{P}_{G_n}(G_{n+1}) \times \mathbb{P}(G_n) + \mathbb{P}_{P_n}(G_{n+1}) \times \mathbb{P}(P_n)$

$= 0,6 \times \mathbb{P}(G_n) + 0,3 \times \mathbb{P}(P_n)$ d'où $x_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n$.

(G_n, P_n) forme un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales

$\mathbb{P}(P_{n+1}) = \mathbb{P}(P_n \cap P_{n+1}) + \mathbb{P}(G_n \cap P_{n+1})$

$= \mathbb{P}_{P_n}(P_{n+1}) \times \mathbb{P}(P_n) + \mathbb{P}_{G_n}(P_{n+1}) \times \mathbb{P}(G_n)$

$= 0,7 \times \mathbb{P}(P_n) + 0,4 \times \mathbb{P}(G_n)$ d'où $y_{n+1} = 0,4x_n + 0,7y_n$

et on obtient le système demandé.

3) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = x_n + y_n$ et $w_n = 4x_n - 3y_n$

a) $v_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n + 0,4x_n + 0,7y_n = x_n + y_n = v_n$

de plus $v_1 = \mathbb{P}(P_1) + \mathbb{P}(G_1) = 1$

donc (v_n) est une suite constante de terme général 1.

b) $w_{n+1} = 4x_{n+1} - 3y_{n+1} = 2,4x_n + 1,2y_n - 1,2x_n - 2,1y_n = 1,2x_n - 0,9y_n = 0,3(4x_n - 3y_n) = 0,3w_n$

$w_1 = 4\mathbb{P}(G_1) - 3\mathbb{P}(P_1) = 0,5$

donc (w_n) est une suite géométrique de raison 0,3 et de premier terme $w_1 = 0,5$.

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = 0,5 \times (0,3)^{n-1}$.

4) a) On a alors pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} x_n + y_n = 1 \\ 4x_n - 3y_n = 0,5 \times (0,3)^{n-1} \end{cases}$

d'où $7x_n = 0,5 \times (0,3)^{n-1} + 3$ et $x_n = \dfrac{1}{7}(0,5 \times (0,3)^{n-1} + 3)$.

b) $-1 < 0,3 < 1$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,3^{n-1} = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \dfrac{3}{7}$

Donc (x_n) est convergente et converge vers $\dfrac{3}{7}$.

IV Fonctions

Ex 33

Le sens de variation d'une fonction est donné par le signe de sa fonction dérivée.

1) $f(x) = x^3 - \dfrac{15}{2}x^2 + 18x - 5.$

f est un polynôme du troisième degré, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, avec pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 - 15x + 18 = 3\left(x^2 - 5x + 6\right)$.

f' est un trinôme du second degré de discriminant réduit $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0$ et qui admet donc deux racines réelles $x_1 = \dfrac{-(-5) - \sqrt{1}}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{5+1}{2} = 3$.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

2) $f(x) = 2x + \dfrac{3}{x}$

$f = u + 3v$, avec $u(x) = 2x$ donc $u'(x) = 2$, et $v(x) = \dfrac{1}{x}$ donc $v'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, et alors $f' = u' + 3v'$, soit, pour tout réel x non nul, $f'(x) = 2 - 3\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 3}{x^2}$.

Le numérateur est du second degré et admet comme racines

$$2x^2 - 3 = 0 \iff x^2 = \frac{3}{2} \iff \left(x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ ou } x = \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

et alors

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$2x^2 - 3$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
x^2		$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

3) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 5}$

$f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x - 3$ donc $u'(x) = 2$, et $v(x) = x + 5$ donc $v'(x) = 1$, et alors $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, soit $f'(x) = \dfrac{2(x+5) - (2x-3)1}{(x+5)^2} = \dfrac{13}{(x+5)^2}$

Comme, pour tout réel x, $(x+5)^2 \geqslant 0$, et $(x+5)^2 = 0 \iff x = -5$, on a, pour tout réel $x \neq -5$, $f'(x) > 0$, et donc f est strictement croissante sur $]-\infty; -5[$ et sur $]-5; +\infty[$ (et n'est pas définie pour $x = 5$).

4) $f(x) = \dfrac{-2x + 3}{-2x + 4}$

$f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = -2x+3$ donc $u'(x) = -2$, et $v(x) = -2x+4$ donc $v'(x) = -2$, et alors $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, soit $f'(x) = \dfrac{-2(-2x+4)-(-2x+3)(-2)}{(-2x+4)^2} = \dfrac{-2}{(-2x+4)^2}$

Comme, pour tout réel x, $(-2x+4)^2 \geqslant 0$, et $(-2x+4)^2 = 0 \iff x = 2$, on a, pour tout réel $x \neq 2$, $f'(x) < 0$, et donc f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 2[$ et sur $]2 ; +\infty[$ (et n'est pas définie pour $x = 2$).

Ex 34

$f_1'(x) = \dfrac{3x^4 - 35x^8 - 3}{x^2}$ $\quad f_2'(x) = \dfrac{4x^3\sqrt{x} - 2\sqrt{3x} + 3}{2\sqrt{x}}$

$f_3'(x) = x^4\left(7x^2+15\right)$ $\quad f_4'(x) = 6(3x-2)$

$f_5'(x) = \dfrac{5}{2}x\sqrt{x}$ $\quad f_6'(x) = \dfrac{1}{2}x\sqrt{x}\,(7x+15)$

$f_7'(x) = 2x$ $\quad f_8'(x) = \dfrac{2\left(x^3-1\right)}{x^2}$

$f_9'(x) = \dfrac{-3}{(x+1)^2}$ $\quad f_{10}'(x) = \dfrac{20x}{\left(x^2+3\right)^2}$

$f_{11}'(x) = 5\dfrac{-x^2+3}{\left(x^2+3\right)^2}$ $\quad f_{12}'(x) = \dfrac{1}{(x+3)^2}$

$f_{13}'(x) = \dfrac{-x\left(x^3+3x-2\right)}{\left(x^3+1\right)^2}$ $\quad f_{14}'(x) = -3\dfrac{(x-1)(x+1)}{2\sqrt{x}\left(x^2+3\right)^2}$

$f_{15}'(x) = \dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$ $\quad f_{16}'(x) = 3\dfrac{x^3-27x-6}{x^3\left(3x+1\right)^2}$

$f_{17}'(x) = \dfrac{5\sqrt{x}(x+6)}{2\left(x+2\right)^2}$ $\quad f_{18}'(x) = \dfrac{1}{3}$

$f_{19}'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\quad f_{20}'(x) = \dfrac{-x^2-6x+2}{\left(x^2+2\right)^2}$

$f_{21}'(x) = 4\mathrm{e}^{4x-5}$ $\quad f_{22}'(x) = -2\sin(2x+3)$

$f_{23}'(x) = 3\cos(2x+3)$ $\quad f_{24}'(x) = \dfrac{-7x^2+14x+5}{\mathrm{e}^x}$

$f_{25}'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{4x} + 3\mathrm{e}^{3x} + 2x\mathrm{e}^x(2-x) + 4x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}$

$f_{26}'(x) = \mathrm{e}^{3-2x}\dfrac{-2x^4-4x^3+6x+1}{\left(x^4-3x+1\right)^2}$

Ex 35

1) $\dfrac{3}{2}$ en factorisant par $x-1$.
2) 9 en factorisant par $x+3$.
3) $\dfrac{-1}{3}$ en factorisant par $x-2$.
4) $\lim\limits_{x\to 1^+} f_4(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f_4(x) = +\infty$.
5) En factorisant par $x-m$ on trouve $f_5(x) = \dfrac{3x+m}{2x-m}$ pour $x \neq m$. La limite est donc de $\dfrac{3}{2}$ lorsque $m = 0$ et de 4 sinon.
6) Par forme conjuguée puis factorisation par $x-3$, la limite est de $\dfrac{4}{3}$.
7) Par forme conjuguée puis factorisation par $x-4$, la limite est de 1.
8) Il n'y a pas de limite en 0, la fonction n'étant pas définie sur $]-1 ; 1[$.
9) $f_9(x) = \dfrac{\sqrt{3}-2|x|}{5+|x|}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f_9(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

Ex 36

1) 0^-
2) $+\infty$ car le numérateur est réel positif alors que le dénominateur tend vers 0 (par valeurs positives)
3) $\dfrac{1}{17}$
4) $\dfrac{1}{2}$ car la fraction rationnelle tend vers $\dfrac{\pi}{3}$
5) pas de limite

Ex 37

1) fraction rationnelle. $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty$. Pas d'asymptote horizontale.
2) fraction rationnelle. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^2}{6x} = \dfrac{1}{3}$. asymptote horizontale $y = \dfrac{1}{3}$.
3) fraction rationnelle. $\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x^3} = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_3(x) = 0^+$. asymptote horizontale $y = 0$.
4) On a $f_4(x) = |x|\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}} - x$.
   En $+\infty$, $|x| = x$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x) = +\infty$.
   En $-\infty$, $|x| = -x$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f_4(x) = +\infty$.
5) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_5(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{5x}{|x|}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_5(x) = 5$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_5(x) = -5$. Il y a deux asymptotes horizontales : $y = -5$ et $y = 5$.
6) En $+\infty$, on factorise par e^{3x} et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_6(x) = \dfrac{-1}{2}$.
   En $-\infty$, on a directement $\lim\limits_{x\to-\infty} f_6(x) = \dfrac{1}{3}$.
   Deux asymptotes horizontales $y = \dfrac{1}{3}$ et $y = \dfrac{-1}{2}$.
7) $f_7(x) = |x|\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} - x$.
   En $+\infty$, $|x| = x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_7(x) = 0$.
   En $-\infty$, $|x| = -x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_7(x) = +\infty$ par produit.
   $y = 0$ est la seule asymptote horizontale.
8) Si $m = 2$, on simplifie $f_8(x) = \dfrac{3x^2-2x-4}{-6x+4}$ qui est une fraction rationnelle dont les limites sont $\lim\limits_{x\to+\infty} f_8(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_8(x) = +\infty$. Pas d'asymptote horizontale.
   Sinon, les numérateur et dénominateur de f_8 sont de même degré, et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_8(x) = \dfrac{3}{m-2}$. $y = \dfrac{3}{m-2}$ est asymptote horizontale.

Ex 38

1) Lorsque $x \to 0$, le numérateur est négatif et fini, le dénominateur tend vers 0 par valeurs positive. Par quotient : $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = -\infty$ et l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe.
2) Lorsque $x \to 2$, le numérateur est positif et fini, le dénominateur tend vers 0 et il est du signe de $(x-2)$. Par quotient : $\lim\limits_{x\to 2^\pm} f_2(x) = \pm\infty$ et la droite $x = 2$ est asymptote verticale à la courbe.
3) On a $\lim\limits_{x\to 0} 2\exp\left(dfracx3\right) = 2$ et $\lim\limits_{x\to 0} 1 - \mathrm{e}^x = 0$. Or on sait que la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec $\mathrm{e}^0 = 1$ donc le dénominateur est du signe opposé à celui de x.
   Par conséquent $\lim\limits_{x\to 0^\pm} f_3(x) = \mp\infty$ et l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe.

4) Par forme conjuguée, on a $f_4(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}$ dont la limite est $\dfrac{1}{4}$ lorsque $x \to 3$. Pas d'asymptote verticale.

5) Par forme conjuguée, on a $f_5(x) = -2 - \sqrt{e^x+3}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f_5(x) = -4$. Pas d'asymptote verticale.

6) On a $\lim\limits_{x\to -1^\pm} x^2-1 = 0^\mp$ donc $\lim\limits_{x\to -1^\pm} \dfrac{1}{x^2-1} = \mp\infty$ et, par composition, $\lim\limits_{x\to -1^-} f_6(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} f_6(x) = 0^+$. La droite $x=-1$ est asymptote verticale à la courbe.

Ex 39

fonction	$f+g$	$h-f$	$f.g$	$f.h$	$g+h$
en $-\infty$	$+\infty$	FI	FI	$+\infty$	$+\infty$
en $+\infty$	0	$-\infty$	0	FI	$-\infty$

fonction	$\frac{f}{g}$	$\frac{f}{h}$	$\frac{h}{g}$	$\frac{f+g}{h}$	$\frac{h+g}{f}$
en $-\infty$	FI	FI	FI	FI	FI
en $+\infty$	FI	0	FI	0	FI

Ex 40

1) On s'interroge sur l'ensemble de définition de f. Celle-ci est définie partout ou sont dénominateur est non nul.
Soit g ce dénominateur, donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x$.
g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. De plus, pour tout réel x, on a $g'(x) = e^x - 1$.
Connaissant la stricte croissance de la fonction exp et le fait que $\exp(0) = 1$, on a immédiatement le tableau de variation suivant pour g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		↘	1	↗	

La fonction g admet donc un minimum de 1 en $x=0$, elle est par conséquent strictement positive sur $\mathbb{R}$ et f est belle et bien définie sur $\mathbb{R}$.

2) On a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - x = +\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$. Il y a une asymptote horizontale d'équation $y=0$ en $-\infty$.
D'autre part, lorsque $x \to +\infty$,
on a $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x\left(1-\dfrac{x}{e^x}\right)} = \dfrac{1}{1-\dfrac{x}{e^x}}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ (par croissances comparées) et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Il y a une asymptote horizontale d'équation $y=1$ en $+\infty$.

3) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas). On calcule alors, $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = \dfrac{(-x+1)e^x}{(e^x-x)^2}$. Or, pour tout réel x, $e^x > 0$ et $(e^x-x)^2 > 0$. La dérivée f' est donc du signe de $(1-x)$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$\frac{e}{e-1}$	↘	1

Ex 41

1) Soit le point $A'(1,0)$. Comme le repère est orthonormal les droites (AA') et (Oy) sont toutes les deux perpendiculaires à (Ox). Elles sont donc parallèles.
De plus, $x>1$ donc $M \neq A'$.
Dans le triangle MNO, d'après le théorème de Thalès :
$\dfrac{MA'}{MO} = \dfrac{AA'}{ON}$. Donc $\dfrac{x-1}{x} = \dfrac{1}{y_N}$ d'où $y_N = \dfrac{x}{x-1}$.

2) Aire du triangle OMN : $\dfrac{x^2}{2(x-1)}$

3) La f fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{2(x-1)}$ est dérivable sur $]1;+\infty[$ en tant que fraction rationnelle définie sur $]1;+\infty[$.
$f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(2x\times(x-1)-x^2)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{2(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{2(x-1)^2}$
Pour tout $x>1$, on a $x>0$ et $(x-1)^2>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x-2$.

x	1		2		$-\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Pour tout $x>1$, on a $x-1>0$ donc $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$
$f(x) = \dfrac{x^2}{2(x-1)} = \dfrac{x^2}{2x(1-\frac{1}{x})} = \dfrac{x}{2\left(1-\frac{1}{x}\right)}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

4) La fonction f admet un minimum de 2 en $x=2$. On en déduit que la position du point M telle que l'aire du triangle MNO soit minimale correspond à $x=2$. On a alors $M(2;0)$.

Ex 42

1) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

2) On dérive. $\forall x \in \mathcal{D}_f$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x+5)(x+4)-(2x^2+5x-11)\times 1}{(x+4)^2} \\ &= \frac{4x^2+16x+5x+20-2x^2-5x+11}{(x+4)^2} \\ &= \frac{2x^2+16x+31}{(x+4)^2} \end{aligned}$$

3) La dérivée f' est du signe de son numérateur, qui est un polynôme du second degré. Son discriminant est $\Delta = 16^2 - 4\times2\times31 = 8 > 0$: il y a deux racines réelles.
Ce sont $x_1 = \dfrac{-16-2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{-8-\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-8+\sqrt{2}}{2}$.

Du fait du coefficient dominant, ce numérateur est positif en dehors de l'intervalle des racines. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	x_1		-4		x_2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$		$\nearrow$

Lorsque x tend vers -4, le numérateur tend vers une valeur finie (1) et le dénominateur vers zéro. Les limites du quotient f sont donc infinies, et le signe de la dérivée permet de conclure.

4) Par division polynomiale (ou par réduction et identification), ou prouve que $f(x) = 2x-3+\dfrac{1}{x+4}$. Or la limite du dénominateur $x+4$ est infinie lorsque $x \to \pm\infty$. Par conséquent, et par différence, on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - (2x-3) = 0$.
Cela signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet au voisinage de l'infini la droite $y = 2x-3$ comme asymptote oblique.
Les limites de $x \mapsto 2x-3$ étant évidentes, on en déduit celles de f :
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Ex 43

1) $D_f = [0;+\infty[$.

2) Dérivabilité en 0 :
$\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\frac{2}{3}h\sqrt{h}}{h} = \frac{2}{3}\sqrt{h}$
Donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0$
Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

3) Équation de la tangente au point d'abscisse 0 :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

Donc la tangente est l'axe des abscisses d'équation : $y = 0$.

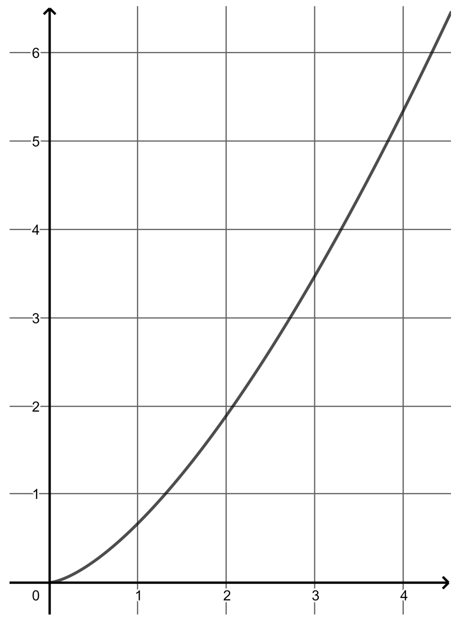
4) La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.
De plus, f est dérivable en 0 donc f est dérivable sur Df.
Pour $x \in]0;+\infty[$ on a,
$f'(x) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{2(2x+x)}{6\sqrt{x}} = \frac{6x}{6\sqrt{x}}$.
Donc $f'(x) = \sqrt{x}$ pour $x \in]0;+\infty[$ et comme $\sqrt{0} = 0 = f'(0)$. On a $f'(x) = \sqrt{x}$ pour tout x de D_f.
On dit que f est une *primitive* de la fonction racine carrée.

5) Pour tout x de D_f, $f'(x) \geqslant 0$ Tableau de variations de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

6) Voir graphique. La tangente en 0 est l'axe (Ox).



Ex 44

1) Si $x = 28$ et $y = 31$ la partie disponible pour l'impression a pour largeur $x-4 = 28-4 = 24$ et pour longueur $y-6 = 31-6 = 25$.
Donc sa surface est $s = 24 \times 25 = 600$ cm^2.

2) Soit s l'aire de la partie imprimable. On a : $s = (x-4)(y-6) = xy-6x-4y+24 = y(x-4)-6x+24$
De plus, on doit avoir $x > 4$ et $y > 6$. Comme on veut $s = 600$, on a la relation :
$y(x-4)-6x+24 = 600 \Leftrightarrow y(x-4) = 600+6x-24$.
Donc $y = \frac{576+6x}{x-4}$ qui est bien définie pour $x > 4$.
On en déduit que $S(x) = xy = \frac{6x^2+576x}{x-4}$ pour $x > 4$.
Étude de la fonction :
S est dérivable pour tout $x > 4$ en tant que fraction rationnelle.
On a $S'(x) = \frac{(12x+576)(x-4)-6x^2-576x}{(x-4)^2} = \frac{(12x^2+576x-48x-2304-6x^2-576x)}{(x-4)^2}$.
Donc $S'(x) = \frac{6x^2-48x-2304}{(x-4)^2} = \frac{6(x^2-8x-384)}{(x-4)^2}$
Soit $p(x) = x^2-8x-384$
$\Delta = 64+1536 = 1600$, on a $\Delta > 0$ donc p admet deux racines dans $\mathbb{R}$:
$x_1 = \frac{8-40}{2} = -16$ et $x_2 = \frac{8+40}{2} = 24$. On en déduit la factorisation de $p(x) = (x+16)(x-24)$. On a donc $S'(x) = \frac{6(x+16)(x-24)}{(x-4)^2}$.
Pour $x > 4$, on a $x-4 > 0$ et $(x-4)^2 > 0$.
Pour $x > 4$, on a $x+16 > 0$ donc le signe de $S'(x)$ dépend de celui de $x-24$.

x	4		24		$+\infty$
$S'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
S	‖ $+\infty$	$\searrow$	864	$\nearrow$	

Donc S admet un minimum de 864 pour $x = 24$. Il s'agit de la surface minimale de la page ayant une surface imprimable de 600 cm^2. Elle correspond à $x = 24$ cm et $y = 36$ cm. La consommation de papier est alors minimale.

Ex 45

1) $g \circ f(0) = g(2) = 0$; $g \circ f(3) = g(1) = \dfrac{1}{2}$
$f \circ g(0) = f(1) = 3$ et $f \circ g(2) = f(0) = 2$.

2)
- f est croissante sur $I_1 = [-1\,;\,0]$ et g est décroissante sur $J_1 = [-1\,;\,2]$ avec $f(I_1) \subset J_1$ donc $g \circ f$ est décroissante sur I_1.
- f est croissante sur $I_2 = [0\,;\,1]$ et g est croissante sur $J_2 = [2\,;\,4]$ avec $f(I_2) \subset J_2$ donc $g \circ f$ est croissante sur I_2.
- f est décroissante sur $I_3 = [1\,;\,2]$ et g est croissante sur J_2 avec $f(I_3) \subset J_2$ donc $g \circ f$ est décroissante sur I_3.
- f est décroissante sur $I_4 = [2\,;\,3]$ et g est décroissante sur J_1 avec $f(I_4) \subset J_1$ donc $g \circ f$ est croissante sur I_4.
- f est croissante sur $I_5 = [3\,;\,4]$ et g est décroissante sur J_1 avec $f(I_5) \subset J_1$ donc $g \circ f$ est décroissante sur I_5.

Ex 46

1) a) f_n est dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$.
$\forall x \in [0; +\infty[$,

$$f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}(1+x)^n - n\,(1+x^n)\,(1+x)^{n-1}}{[(1+x)^n]^2}$$
$$= \frac{(1+x)^{n-1}\left[nx^{n-1}(1+x) - n\,(1+x^n)\right]}{(1+x)^{2n}}$$
$$= \frac{(1+x)^{n-1}\left(nx^{n-1} - n\right)}{(1+x)^{2n}}$$
$$= \frac{n(1+x)^{n-1}\left(x^{n-1} - 1\right)}{(1+x)^{2n}}$$

b) $f_n'(x)$ est du signe de $x^{n-1} - 1$; or, la fonction $x \mapsto x^{n-1}$ est croissante sur $[0; +\infty[$ et vaut 1 pour $x = 1$. Donc $x^{n-1} - 1 < 0$ pour $x < 1$ et $x^{n-1} - 1 > 0$ pour $x > 1$.
$f_n(1) = \dfrac{2}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
On en déduit le tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
f_n		$\searrow$	$\frac{1}{2^{n-1}}$	$\nearrow$	

2) a) D'après les variations de f_n, on a :
$\forall x \geqslant 0$, $f_n(x) \geqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$, donc $\dfrac{1+x^n}{(1+x)^n} \geqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
On en déduit : $(1+x)^n \leqslant 2^{n-1}\,(1+x^n)$.

b) Si $x = 0$, sachant que $n-1 \geqslant 1$, l'inégalité est évidente.
Supposons $x > 0$ et posons $A = \dfrac{y}{x}$.
D'après la question précédente, on a : $(1+A)^n \leqslant 2^{n-1}\,(1+A^n)$ d'où
$\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^n \leqslant 2^{n-1}\left(1+\dfrac{y^n}{x^n}\right)$.
On en déduit : $\left(\dfrac{x+y}{x}\right)^n \leqslant 2^{n-1}\left(\dfrac{x^n+y^n}{x^n}\right)$ d'où
$(x+y)^n \leqslant 2^{n-1}\,(x^n+y^n)$, en multipliant de chaque côté par $x^n > 0$.

Ex 47

1) a) $DM = x$ donc $MC = 1-x$; de même, $CN = 1-y$.
MCN est un triangle rectangle,
$MN^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$.

b) $MN = MT + TN$ (car M, T et N sont alignés dans cet ordre).
ADM est rectangle, donc d'après le théorème de Pythagore, $AM^2 = AD^2 + DM^2 = 1 + x^2$.
De même, AMT est rectangle (propriété de la tangente), donc $AM^2 = AT^2 + MT^2 = 1 + MT^2$ (car $AD = AT = 1$) d'où $MT = x$.
On montre de même que $NT = NB = y$.

c) D'après ce qui précède, on a :
$(x+y)^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$
$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$ donc $xy = 1 - x - y$ qui donne $y(1+x) = 1-x$ donc $y = \dfrac{1-x}{1+x}$.
Alors : $MN = x + y = x + \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{x(1+x)+1-x}{1+x} = \dfrac{x^2+1}{x+1}$

2) f est la fonction définie sur $]0; 1[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$.

a)
f est dérivable sur $]0; 1[$;
$f = \dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2+1 \\ v(x) = x+1 \end{cases}$ et $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
Soit $x \in]0; 1[$,
$f'(x) = \dfrac{2x(x+1) - (x^2+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$.
$f'(x)$ est du signe du numérateur car le dénominateur est positif.
On étudie le signe du numérateur : $\Delta = 8 > 0$; il a deux racines, $\dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2} \notin]0; 1[$ et $-1+\sqrt{2}$.
Signe de $f'(x)$

x	0		$\sqrt{2}-1$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

3) MN est minimale pour $x = \sqrt{2} - 1$

Ex 48

⋆ **Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire**

$$d(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}.$$

1) En posant $u(x) = \dfrac{x}{x+1}$ qui est définie et dérivable sur $]-1; +\infty[$, $d(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$. d est donc dérivable et
$d'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = \dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}\mathrm{e}^{u(x)} = \dfrac{1}{(x+1)^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}} > 0$
$d'(x) > 0$ car produit de deux nombres > 0.
La fonction d est donc croissante sur $]-1; +\infty[$.

2) Comme $\displaystyle\lim_{x \to -1^+} \frac{x}{x+1} = -\infty$, alors par composition $\displaystyle\lim_{x \to -1^+} d(x) = 0$.

Comme $\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=1$,

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}d(x)=\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$.

3) D'après la question précédente la fonction d croît de 0^+ à e donc pour tout $x>-1$, on a : $0<d(x)<\mathrm{e}$.

⋆ **Partie B Étude de la fonction f**

$$f(x)=x+1-\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}.$$

1) On a vu dans la partie A que $\lim\limits_{x\to+\infty}d(x)=\mathrm{e}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(x-\mathrm{e}+1)=0$.

Ceci montre que la droite (D) d'équation $y=x-\mathrm{e}+1$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.

On a

$f(x)-(x-\mathrm{e}+1)=x+1-\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}-x-1+\mathrm{e}=-\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}+\mathrm{e}$.

D'après la question **A. 3.** $0<\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}<\mathrm{e}$ donc $\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}>0$.

Ce qui montre que la courbe $(\mathcal{C})$ est au dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

2) **a)** Pour $x\in]-1\,;+\infty[,\ f(x)=x+1-d(x)$, donc f est dérivable et

$f'(x)=1-d'(x)=1-\dfrac{1}{(x+1)^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}$.

Cette fonction est elle-même dérivable et

$f''(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}\dfrac{2(x+1)-1}{(x+1)^4}=\dfrac{2x+1}{(x+1)^4}\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}$.

Le signe de f'' est donc celui de $2x+1$, négatif pour $-1<x<-\dfrac{1}{2}$, positif pour $x>-\dfrac{1}{2}$.

b) D'où le tableau de variations :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖ 1	$\searrow$	$1-\frac{4}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	1

3) Équation $f'(x)=0$:

On a $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)<0$ (calculatrice).

Par « continuité » la fonction f' s'annule deux fois sur $]-1\ ;\ +\infty[$: en α tel que $-1<\alpha<-\dfrac{1}{2}$ et aussi en 0, avec $-\dfrac{1}{2}<0$.

La calculatrice donne une valeur approchée de $\alpha\approx-0,72$ à 10^{-2} près.

4) **a)** D'après la question précédente, on peut déterminer le signe de f' et donc les varaitions de f :

- sur $]-1;\alpha]$, f est croissante ;
- sur $[\alpha;0]$, f est décroissante ;
- sur $[0;+\infty[$, f est croissante.

b)
- Limite en -1 : on a vu que l'exponentielle a pour limite 0, donc la limite de f est 0 ;
- Limite en $+\infty$: l'exponentielle a pour limite e, donc la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$.

c) D'où le tableau de variations de f :

x	-1		α		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	$\nearrow$	$-\alpha(\alpha+1)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Calcul de $f(\alpha)=\alpha+1-\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$: on sait que

$f'(\alpha)=0\iff 1-\dfrac{1}{(\alpha+1)^2}\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}=0\iff \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}=(\alpha+1)^2$.

Donc

$f(\alpha)=\alpha+1-\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}=\alpha+1-(\alpha+1)^2=-\alpha(\alpha+1)$.

⋆ **Partie C Prolongement de la fonction f** en -1

On considère la fonction g définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} g(-1) & = & 0\\ g(x) & = & f(x) \text{ pour tout } x>-1.\end{array}\right.$$

1) **a)** Si $x\in]-1;+\infty[\setminus\{0\}$,

$$\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=\frac{f(x)-0}{x-(-1)}=\frac{x+1-\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}}{x+1}$$
$$=1-\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}}{x+1}=1-\frac{1}{x}\left(\frac{x}{x+1}\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}\right).$$

$$\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=1-\frac{1}{x}\left(\frac{x}{x+1}\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}\right).$$

b) Pour $x\in]-1;+\infty[$, on a déjà vu que la limite lorsque x tend vers -1^+ de $\dfrac{x}{x+1}$ est $-\infty$.

En posant $u(x)=\dfrac{x}{x+1}$,

$\dfrac{x}{x+1}\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}=u\mathrm{e}^u=-\dfrac{-u}{\mathrm{e}^{-u}}$, donc la limite quand u tend vers $-\infty$ est égale à zéro.

c) La limite de $\dfrac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}$ lorsque x tend vers -1^+ est donc finie : c'est la définition du nombre dérivé $g'(-1)=1$.

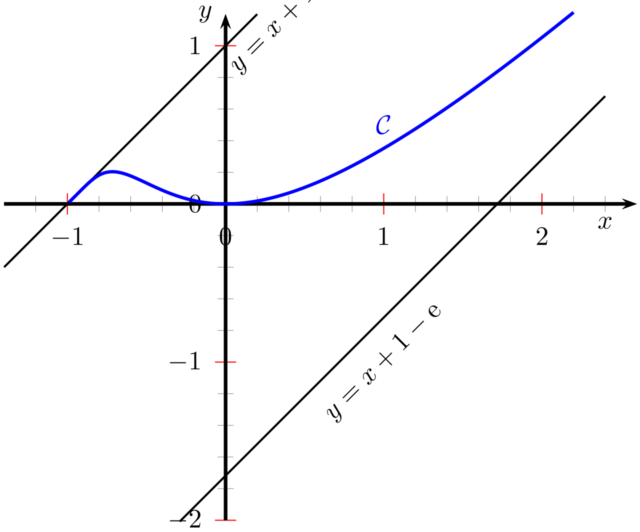
2) Construire (D) : La courbe $(\mathcal{C}')$ est la réunion de la courbe $(\mathcal{C})$ et du point $(-1\ ;\ 0)$.

La tangente à $(\mathcal{C}')$ au point $(-1\ ;\ 0)$ a pour équation :

$y=g'(-1)(x-(-1))\iff y=x+1$.

La tangente à $(\mathcal{C}')$ au point d'abscisse α est horizontale : elle a pour équation $y=f(\alpha)=-\alpha(\alpha+1)$.

La tangente à $(\mathcal{C}')$ au point d'abscisse 0 est horizontale : elle a pour équation $y=f(0)=0$ (axe des abscisses). D'où les graphes :



Ex 49

Partie A : étude de fonction

1) Pour tout réel x on a $f(x) = x\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-1} + 1$, or (croissances comparées) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$, donc, par opérations sur les limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.
On en déduit que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ au voisinage de $-\infty$.

2) On a $f(x) = x\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-1} + 1$, et, par opérations sur les limites (il n'y a aucune forme indéterminée ici) : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3) Par opérations usuelles sur les dérivées :

$$f'(x) = 1\mathrm{e}^{x-1} + x \times 1 \times \mathrm{e}^{x-1} = (x+1)\mathrm{e}^{x-1}.$$

4) Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x-1} > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $x+1$. Or $x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$, on en déduit donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$1 - \mathrm{e}^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B : recherche d'une tangente particulière

1) La tangente T_a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, c'est-à-dire :

$$y = (a+1)\mathrm{e}^{a-1}(x-a) + a\mathrm{e}^{a-1} + 1.$$

2) Soit $a > 0$, alors :

$$\begin{aligned} O(0;0) \in T_a &\iff 0 = (a+1)\mathrm{e}^{a-1}(-a) + a\mathrm{e}^{a-1} + 1 \\ &\iff 0 = \mathrm{e}^{a-1}(-a^2 - a + a) + 1 \\ &\iff 1 - a^2\mathrm{e}^{a-1} = 0. \end{aligned}$$

3)
- 1 est une solution de l'équation considérée car $1 - 1^2\mathrm{e}^{1-1} = 1 - 1 = 0$.
- Montrons maintenant que cette équation n'admet qu'une unique solution sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
Posons, pour tout $x > 0$, $g(x) = 1 - x^2\mathrm{e}^{x-1}$. La fonction g est alors dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout $x > 0$:
$$g'(x) = -2x\mathrm{e}^{x-1} - x^2\mathrm{e}^{x-1} = -x(2+x)\mathrm{e}^{x-1}.$$
$x > 0$, donc $x + 2 > 0$ et par ailleurs $\mathrm{e}^{x-1} > 0$, on en déduit que $g'(x) < 0$ et donc que g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.
Par ailleurs $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
On sait que g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ et s'annule en 1.
Donc si $x < 1$, alors $g(x) > g(1)$ soit $g(x) > 0$ et de même si $x > 1$, alors $g(x) < g(1)$ donc $g(x) < 0$.
Conclusion : sur $]0;+\infty[$, $g(x) = 0 \iff x = 1$.

4) La tangente cherchée est T_1, elle a pour équation $y = 2(x-1) + 2$, c'est-à-dire

$y = 2x$

V Repérage

Ex 50

1) Méthode géométrique.

a) R est le projeté orthogonal de Q sur (AD) et D est le projeté orthogonal de C sur (AD) Donc $\overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{DR} \cdot \overrightarrow{AR} = -AR \times DR$ (car les vecteurs $\overrightarrow{DR}$ et $\overrightarrow{AR}$ sont colinéaires de sens contraire)
P est le projeté orthogonal de Q sur (AB) et B est le projeté orthogonal de C sur (AB) Donc $\overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AP} = -AP \times BP$ (car les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{BP}$ sont colinéaires de sens contraire)
Or $AP = DR$ et $AR = BP$ donc les deux produits scalaires sont égaux.

b) $\overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{AP}$ donc $\overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ soit $\overrightarrow{CQ} \cdot (\overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AP}) = 0$
Donc $\overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 0$ ce qui prouve que les droites (CQ) et (RP) sont perpendiculaires.

2) Méthode analytique. On se place dans le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$

a) Si P a pour coordonnées $(a;0)$, $R(0, 1-a)$ et de $Q(a, 1-a)$.

b) $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -a \\ 1-a \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{QC} = \begin{pmatrix} 1-a \\ 1-(1-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a \\ a \end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{QC} \cdot \overrightarrow{PR} = -a(1-a) + (1-a)a = 0$. Les droites (CQ) et (RP) sont perpendiculaires.

Ex 51

1) Dans le triangle ABC, $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$.

Donc $\widehat{A} = 180 - (60+80) = 40°$. De plus, la formule des sinus donne : $\dfrac{BC}{\sin(\widehat{A})} = \dfrac{AC}{\sin(\widehat{B})} = \dfrac{AB}{\sin(\widehat{C})}$.

Donc $\dfrac{5}{\sin(40)} = \dfrac{AC}{\sin(60)} = \dfrac{AB}{\sin(80)}$.

$AC = \dfrac{5\sin(60)}{\sin(40)} \simeq 6,7$ km.

$AB = \dfrac{5\sin(80)}{\sin(40)} \simeq 7,7$ km.

2) Dans le triangle ABD d'après la formule d'Al Kashi : $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \times BD \times \cos \widehat{ABD}$.

$AD^2 = \left(\frac{5\sin(80)}{\sin(40)}\right)^2 + 1,5^2 - 2\left(\frac{5\sin(80)}{\sin(40)}\right) \times 1,5\cos(60)$

$AD^2 \simeq 49,44$ et donc $AD \simeq 7,0$ km.

Ex 52

1) Dans le triangle IAB rectangle en A D'après le théorème de Pythagore : $BI^2 = IA^2 + AB^2 = (\frac{a}{2})^2 + a^2 = \frac{a^2}{4} + a^2$

Donc $BI = \sqrt{\dfrac{5a^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}a$ car $BI \geqslant 0$

De même, dans le triangle JCB rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore :

$BJ^2 = JC^2 + CB^2 = (\frac{a}{2})^2 + a^2$. Donc $BJ = \frac{\sqrt{5}}{2}a$

On a $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BJ} = BI.BJ\cos(\alpha) = \frac{5}{4}a^2\cos(\alpha)$

$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BJ} = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2 \cos(\alpha)$

2) $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI}$ (relation de Chasles)

$\overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ}$ (relation de Chasles)

$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ car $ABCD$ est un parallélogramme.

3) $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BJ} = (-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB})$

$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AD^2 - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AD^2$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2$ et donc $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BJ} = a^2$. On en déduit que $\frac{5}{4}a^2\cos(\alpha) = a^2$

Donc $\cos(\alpha) = \frac{4}{5}$

α est un angle géométrique donc sa mesure est positive.

La calculatrice nous donne : $\alpha \simeq 37°$

Ex 53

1) Médiatrice de $[OB]$: $x = 3$;

Médiatrice de $[OC]$: le milieu est $I(1;2)$, on a une équation en faisant le p.s. : $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2x + 4y - 10 = 0$.

Le point d'intersection est $\Omega(3;1)$.

Le rayon du cercle est $r = \sqrt{10}$.

2) Idem pour H ; hauteur issue de C : $x = 2$, hauteur issue de B : $x + 2y - 6 = 0$, H a pour coordonnées $(2;2)$.

3) Pour G on fait : $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6-x \\ -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2-x \\ 4-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soit $G\left(\dfrac{8}{3}; \dfrac{4}{3}\right)$

4) On calcule $\overrightarrow{\Omega H} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\Omega G} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; on vérifie facilement que $\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$ donc les points sont alignés.

5) Faire le calcul.

6) Le symétrique de H est $H'(2;-2)$; il appartient au cercle car $\Omega H' = \sqrt{10}$.

Ex 54

1ère méthode :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NC} \cdot \overrightarrow{AM} &= \left(\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}\right) \\ &= \overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BM} \\ &= -NB \times AB + 0 + 0 + BC \times BM\end{aligned}$$

Or $AB = BC$ et $BM = BN$ donc $\overrightarrow{NC} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

2ème méthode :

On se place dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}\right)$. On pose $BN = BM = a$.

Alors $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{NC}\begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{NC} \cdot \overrightarrow{AM} = a \times 1 - 1 \times a = 0$

Ex 55

I est le milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}\right)$.

On a donc

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{DA} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OA}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(0 + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} + 0\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(OC \times OA \times \cos\left(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OA}\right) - OB \times OD \times \cos\left(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OD}\right)\right)\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OA}\right) &= \left(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA}\right) \\ &= \left(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{OD}; \overrightarrow{OC}\right) \\ &= \left(\overrightarrow{OD}; \overrightarrow{OB}\right)\end{aligned}$$

On a donc :

$\cos\left(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OA}\right) = \cos\left(\overrightarrow{OD}; \overrightarrow{OB}\right) = \cos\left(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OD}\right)$ (le cosinus est pair et les angles sont de mesures opposées).

De plus, $OA = OB$ et $OC = OD$ donc $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{DA} = 0$. La conclusion s'ensuit.