Quelques outils mathématiques pour la physique

Introduction Les phénomènes étudiés en physique sont caractérisés par des variables d'espace, de temps et/ou des constantes universelles ou phénoménologiques. par des lois d'évolutions temporelles. Ainsi, une grandeur physique s'exprime toujours sous la forme d'une fonction mathématique : il est donc crucial de maîtriser un certain nombre d'opérations mathématiques pour gérer de telles fonctions et *in fine* les comprendre.

Première partie
Conseils généraux

1 Aborder un problème en physique

S'il n'y a pas de méthode unique et infaillible de résolution d'un problème en physique, on peut tout de même dégager quelques étapes-clés :

— **S'approprier le problème** : Faire un schéma, identifier les grandeurs physique pertinentes, les nommer. Distinguer dès cette étape, ce qui est une fonction connue à l'instant initial (les conditions initiales (CI), que l'on notera la plupart du temps indicées), des fonctions *a priori* variables au cours de l'évolution (dont on explicitera la plupart du temps la dépendance), et des paramètres qui seront constants au cours de l'évolution.

Exemple v_0 est une notation correcte pour une vitesse initiale. $v(t)$ est une notation correction pour une vitesse susceptible d'évoluer au cours d'un mouvement.

Exemple une solution à l'équation de propagation d'une onde sur une corde s'écrit : $e(M,t) = e_0 cos(\omega t - kx)$, qui est une fonction du temps t et de l'abscisse x, et qui met en jeu trois paramètres constants : l'amplitude e_0, la pulsation ω et le vecteur d'onde k.

— **Analyser le problème et le résoudre :** décomposer le problème ou le phénomène en somme de petits phénomènes. Pour chaque phénomène de base, **traduire ce phénomène en équation de base**. Il peut s'agir là d'écrire des lois cinématiques, géométriques, des définitions et le plus souvent de traduire les lois de la physique qui le décrivent. Travailler les expressions précédentes jusqu'à arriver à l'**expression littérale de la grandeur recherchée**. **Attention, ne JAMAIS mélanger raisonnement/expression littérale et application numérique. Après avoir obtenu l'expression littérale**, faire l'application numérique (AN).

Attention concernant l'application numérique, il est crucial d'utiliser un nombre correct de chiffres significatifs (CS). Beaucoup d'élèves recopient tel quel le résultat indiqué sur leur calculatrice, ce qui leur fait perdre des points. **C'est une consigne de correction commune à tous les concours : trop de chiffres significatifs → pas de point à la question.** D'autre part, à l'école polytechnique, la calculatrice est interdite ; il faut donc faire ses applications numériques à la main, avec un seul chiffre significatif.

— **Avoir un regard critique sur le résultat :** vérifier la pertinence du résultat, tant son homogénéité que son ordre de grandeur (ODG) (par comparaison avec un ODG de l'énoncé ou tiré d'une simulation numérique). Etudier qualitativement **les cas limites** et **la pertinence des dépendances.**

2 Analyse dimensionnelle

2.1 Unités et dimensions

A chaque grandeur physique est associé une intensité (ou mesure) repérée par un nombre mais aussi une unité qui en précise la nature. 7 unités ont été choisies (arbitrairement) pour être unités de base.

1: Definition

Toute situation physique peut être décrite par certaines propriétés comme la longueur, la vitesse, la surface etc. C'est ce qu'on appelle des **dimensions**. Les dimensions sont les propriétés que l'on peut mesurer.

Définition Les *unités* sont les éléments standardisés que l'on utilise pour quantifier ces dimensions. La dimension d'une grandeur physique représente donc sa nature physique et ne peut dépendre d'un choix particulier de système d'unités.

Exemple Ainsi, une grandeur qui a la dimension d'une longueur, c'est-à-dire qui est homogène à une longueur, peut s'exprimer en mètres, yards, angströms... et ce choix d'unité ne peut avoir d'influence sur la physique intrinsinque du phénomène.

Remarque Certaines grandeurs, bien qu'ayant une unité, sont sans dimension : ce sont en fait des nombres purs au sens mathémathique. C'est le cas du radian : un angle en radian est le rapport de deux longueur : c'est la longueur l de l'arc de cercle AB (correspondant à la portion de cercle de rayon R intercepté par les deux demi-droites qui délimite cet angle) divisé par R soit $\alpha = \frac{l}{R}$.

2.2 Homogénéité d'une expression

Ne réaliser l'application numérique que lorsque le calcul littéral est terminé **permet de juger l'homogénéité d'une formule** : une équation est homogène lorsque ses deux membres ont la même dimension. Il est ainsi possible de détecter les erreurs de calculs les plus importantes - les erreurs d'homogénéité :

1: Attention

Tout résultat non homogène est **nécessairement faux** (NH).

Remarque Cela ne veut pas dire que tout résultat homogène est juste.

2: Attention

- On ne peut additionner ou comparer que des termes qui ont la même la dimension.
- L'argument d'une fonction transcendante (sin, cos, exp, ln, etc.) est nécessairement *sans dimension*. Par exemple, si on obtient après les calculs un terme du type exp(kt), l'argument kt de l'exponentielle doit être un nombre sans dimension (si t est un temps, alors k doit être l'inverse d'un temps)
- La dimension du produit de deux grandeurs est le produit des dimensions de chacune des grandeurs.
- La dimension de A^r est égale à d^r, où r est un nombre sans dimension et d la dimension de A.
- Si on calcule la dérivée d'une grandeur G par rapport à une autre F, la dimension de la dérivée est le rapport des dimensions de G et de F.
- De même, si on intègre une grandeur G par rapport à une autre F, la primitive a pour dimension le produit des dimensions de G et de F.

Exemple Par exemple, lors du calcul d'une résistance équivalente dans un circuit électrique comportant des résistances de valeur R_1, R_2 et R_3, des élèves trouvent les formules suivantes. Identifier la ou les expression(s) qui a(ont) une chance d'être juste(s).

$$R_{eq} = \frac{R_3^2+2R_1R_2}{1+R_2},\ R_{eq} = \frac{R_3+2R_2}{R_1+R_2} \text{ et } R_{eq} = \frac{R_3^2+2R_1R_2}{R_1+R_2}$$

Exemples retrouver les dimensions de toutes les grandeurs dans les équations :

— Soit $z(t)$ l'altitude d'une masse m lancée verticalement à la vitesse v_0 dans le champ de pesanteur : $z(t) = \frac{-gt^2}{2} + v_0t + h$

— Soit le déplacement d'un chariot lors d'oscillations amorties : $x(t) = x_0e^{-\alpha t}cos(\omega t)$

3: Méthode

Pour déterminer l'homogénéité d'une grandeur, on peut écrire une ou des lois physiques faisant intervenir cette grandeur et d'autres grandeurs ayant des homogénéités connues ou accessibles par d'autres lois physiques.

Exemple Pour déterminer la dimension d'une énergie, on se rappelle que l'énergie cinétique d'une particule de masse m est donnée par : $E_C = \frac{1}{2}mv^2$ d'où $[E_C] = [m][v^2] = M.L^2.T^{-2}$. L'unité de l'énergie qui est le joule (J) est donc une unité dérivée correspondant à $1kg.m^2.s^{-2}$.

Deuxième partie

Gestion des graphes en physique

3 Tracé de fonctions

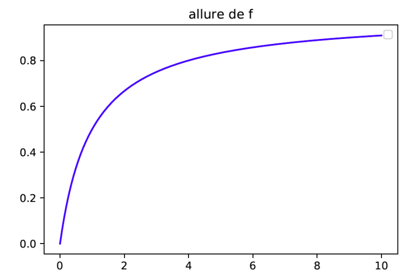
3.1 Généralités

L'allure d'une fonction donnée par un modèle théorique est une donnée importante, qu'il faut savoir obtenir sans calculatrice, simplement par analyse qualitative, afin de la confronter rapidement à une courbe expérimentale.

4: Méthode

On utilise :
- les allures des fonctions connues qui interviennent éventuellement dans la fonction étudiée.
- Le calcul des limites de la fonction en et en l'infini. les simplifications asymptotiques et les allures de ces simplifications.
- Il faut ainsi se poser les questions : d'où part la fonction ? Où va-t-elle ? Comment y va-t-elle ? En quel temps typique ?
- Pour les fonctions périodiques, on pourra affiner en déterminant la période de la fonction, ses valeurs maximale, minimale et moyenne.

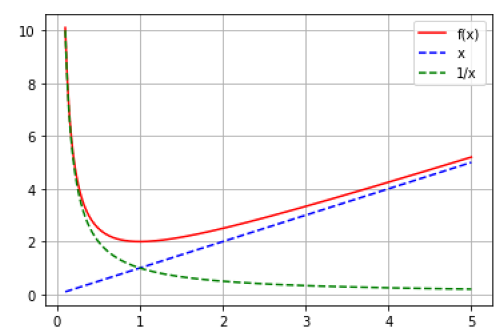
Exemple On cherche l'allure de la fonction $f(x) = \frac{x}{1+x}$
— D'où part cette fonction ? En $x = 0$, on a : $f(0) = 0$
— Où va-t-elle ? En $x \gg 1$, $f(x) \sim \frac{x}{x} = 1$
— En $x \ll 1$, $f(x) \sim \frac{x}{1} = x$.
— On a donc une fonction qui part de 0 et qui croît d'abord linéairement pour arriver en 1, ce qui laisse présager une allure figurée ci-contre.



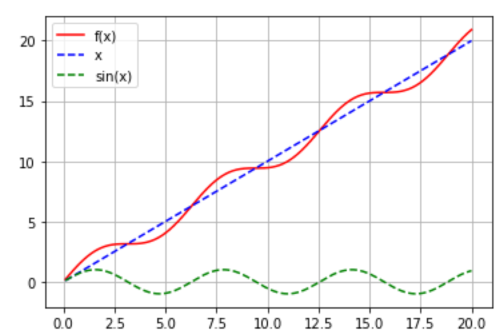
3.2 Tracé d'une somme, d'un produit

Dans le cas où la fonction s'écrit comme la somme de deux fonctions usuelles, il peut être utile de tracer les deux fonctions avant d'en déduire l'allure de la somme recherchée.

Exemple On cherche l'allure de la fonction $x \to f(x) = x + \frac{1}{x}$
— Quand $x \ll 1$, on a : $\frac{1}{x} \gg x$, donc la fonction f ressemble à $\frac{1}{x}$
— Quand $x \gg 1$, on a : $\frac{1}{x} \ll x$, donc la fonction f ressemble à x
— On peut ainsi en déduire l'allure de la fonction f pour toutes les valeurs de x.

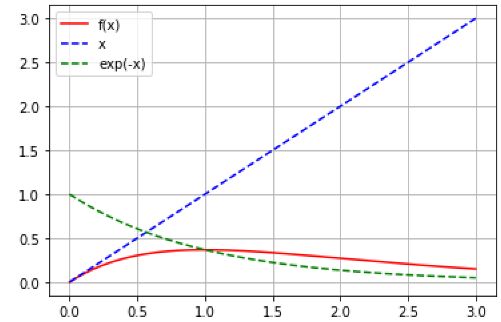


Exemple Déterminer l'allure de la fonction $x \to f(x) = x + sinx$

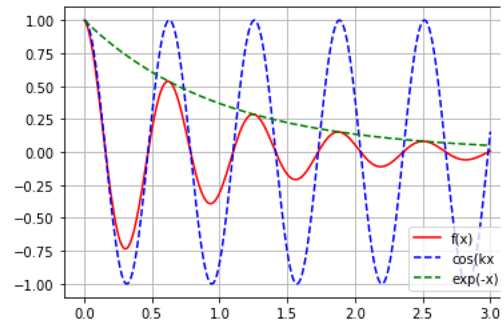


De même, quand la fonction s'écrit comme le produit de deux fonctions usuelles, il peut être utile de tracer les deux fonctions de base pour pouvoir prévoir “à la main” l'allure du produit des deux allures.

Exemple Déterminer l'allure de la fonction $x \rightarrow f(x) = xe^{-x}$



Exemple Déterminer l'allure de la fonction $x \rightarrow f(x) = e^{-x}cos(kx)$



4 Analyse d'une courbe expérimentale, extraction de données, modélisation

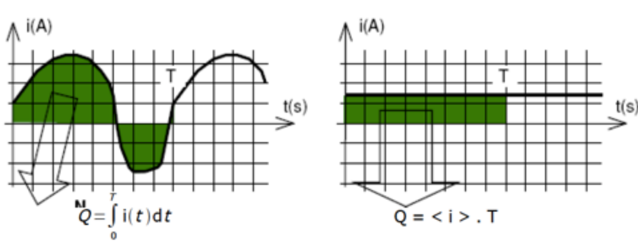
Inversement, il faut savoir extraire d'une courbe expérimentale ses grandeurs pertinentes en vue de les confronter à leurs valeurs théoriques.

4.1 Analyse qualitative

2: Définitions

Soit un signal $s(t)$. Quelques caractéristiques simples peuvent être dégagées sur ce signal :
- Sa valeur initiale, si elle existe : $s(t = 0)$
- Sa valeur asymptotique, si elle existe : $s(t = \infty)$
- Son type d'évolution : fonction croissante, décroissante, périodique...
- Son temps typique d'évolution τ, son intervalle d'évolution $[s_{min}, s_{max}]$, sa période...
- Sa valeur moyenne (ou composante continue), qui constitue sa modélisation la plus grossière (valeur de la fonction constante abritant la même aire que la courbe considérée, Cf. figure suivante) :

$$< s(t) >= \frac{1}{T_{int}} \int_0^{Tint} s(t)dt$$



4.2 Régression linéaire

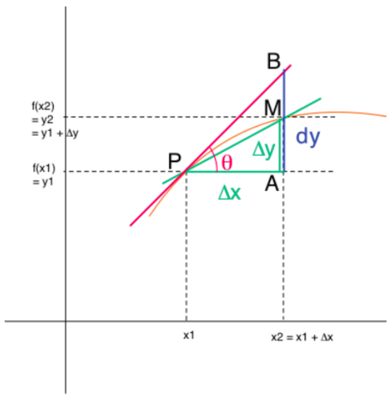
La confrontation d'une courbe expérimentale avec un modèle se fait souvent grâce à un modèle de courbe. La modélisation linéaire est de loin le plus fréquente ; la linéarisation fonde une partie de la physique : la physique linéaire.

5: Méthode

On modélise la courbe $f(x)$, au voisinage d'un point d'abscisse x_0 par sa tangente locale d'équation :

$$f(x) \simeq t(x) \ = \ f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

On procède par lecture graphique :
- $f(x_0)$ se lit directement sur le graphique.
- Pour $f'(x_0)$ on détermine la pente locale sur un intervalle pour lequel le modèle semble pertinent.



Remarque Cette linéarisation est le développement de Taylor le plus simple d'une fonction au voisinage d'un point quelconque. Si l'on pousse ce développement "un cran plus loin", on approxime cette fois la fonction par une parabole de même valeur, de même pente et de même courbure locale, d'équation :

$$d_2(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0) + f''(x_0).(x - x_0)^2/2$$

4.3 Modélisation en exponentielle

6: Méthode

Pour de nombreux systèmes, la relaxation d'un des paramètres suit une évolution de la forme : $x(t) = ae^{-t/\tau} + b$
- Pour déterminer les paramètres a et b, il suffit d'étudier les valeurs en $t = 0$ et l'infini.
- Pour déterminer le temps typique d'évolution τ, il faut tracer l'asymptote en l'infini et la tangente initiale. Le temps τ correspond à l'abscisse d'intersection de ces deux droites.

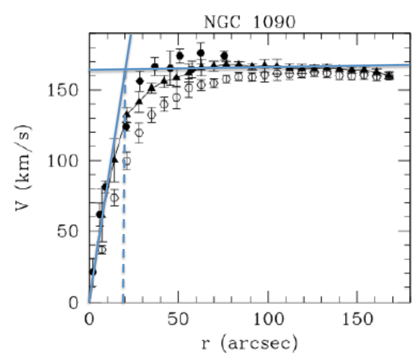
Exemple On cherche à modéliser la courbe expérimentale suivante par une fonction de la forme : $v = a + be^{-\frac{r}{r_0}}$

— En $r = 0$, $v(r = 0) = 0 = a + b$ donc $b = -a$

— Pour déterminer a il suffit de prendre la limite quand r est grande : $v \sim a$. Sur le graphe, cela donne : $a = 160km/s$

— Pour r_0 on détermine sa valeur en utilisant la méthode de la tangente à l'origine : l'intersection entre la tangente à l'origine et l'asymptote correspond à $r_0 = 20arcsec$.

— Pour déterminer b, on utilise $b = -a$.



Troisième partie
Opérations de base sur les fonctions

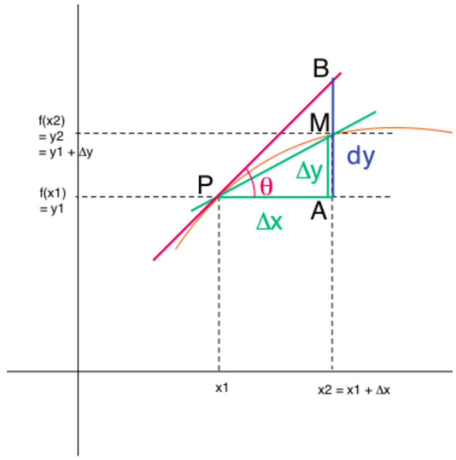
5 Dérivation

5.1 Introduction

Pour caractériser l'évolution temporelle d'une grandeur $x(t)$, il est souvent utile de se donner une fonction qui reflète le sens de variation de x au cours du temps.

Principe

- Dans l'approche la plus simple, cette variation peut-être une variation moyenne de $x(t)$ sur un intervalle donné Δt. Si x varie de Δx sur cet intervalle, la donnée du rapport $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ caractérise les variations de x sur cet intervalle. Son signe définit par exemple le sens de variation de $x(t)$ (si x est croissante ou décroissante), et sa valeur quantifie la manière dont x croît rapidement ou non sur cet intervalle.
- De manière plus générale, soit une fonction $y(x)$, la donnée du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ en un x donné caractérise le sens et l'amplitude de l'évolution locale de y avec x.



Limite

- Cependant, la pertinence de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a ses limites : elle ne fournit qu'une idée globale du comportement de $y(x)$ sur l'intervalle Δx. En effet, on pourrait imaginer une fonction ayant des variations brutales et rapides sur ledit intervalle, dont la fonction $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ne rend pas du tout compte.
- Enfin, la largeur de l'intervalle Δx n'est pas forcément évidente à choisir et peut sembler arbitraire a priori.
- Pour toutes ces raisons, dans l'immense majorité des cas, on se donne une fonction qui est la limite de la définition précédente et qui permet de caractériser de manière exacte la variation locale de y avec x. D'un point de vue mathématique, une telle fonction est la dérivée de y par rapport à x.

5.2 Dérivée d'une fonction

5.2.1 Définition exacte, mais assez peu utile

Définition

On dit qu'une fonction réelle f, définie dans un intervalle des réels, est dérivable, en un point x_0 de cet intervalle et admet pour dérivée $f'(x_0)$, si :

$$lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

est définie.

Interprétation

- x–x_0 est la variation d'abscisse entre x et x_0. Quand on prend la limite, cette variation tend à être infinitésimale.
- $f(x)$–$f(x_0)$ est la variation d'ordonnée pour la variation d'abscisse correspondante. Quand on prend la limite, cette variation tend elle aussi à être infinitésimale. Si l'on trace le graphe de $f(x)$ autour de l'abscisse x_0, quand au passe à la limite dans l'expression précédente, cela revient à confondre la variation infinitésimale d'ordonnée locale $f(x)$–$f(x_0)$ avec la variation d'ordonnée de la fonction affine tangente localement à $f(x)$ en x_0. (on confond une courbe avec une droite pour un déplacement infinitésimal, Cf. graphe précédent)
- Comme la dérivée est le rapport de cette variation infinitésimale approchée sur la variation d'abscisse, la dérivée en x_0 correspond donc à la pente de la fonction affine tangente localement à f en x_0. Géométriquement, $f'(x_0) = tan(\theta(x = x_0))$ où $\theta(x)$ est l'angle entre la tangente locale au graphe en $x = x_0$ et l'axe des abscisses.

5.2.2 Autre définition exacte, beaucoup plus utile

Définition on note dx la *variation d'abscisse infinitésimale*, c'est-à-dire la plus petite variation d'abscisse générique.

Utilité Cette notion est très utile car elle permet d'omettre le passage à la limite, qui rend si peu fonctionnelle l'expression précédente. Il faut comprendre que si l'on utilise la notation dx, cela signifie qu'on utilise un élément qui est *nécessairement suffisamment petit pour rendre exactes des relations qui ne seraient qu'approchées si l'on utilisait des éléments finis* ; dx est toujours assez petit.

3: Définition

Plutôt que d'envisager la variation de la fonction entre x_0 et x et que faire tendre cette variation vers 0 en utilisant la notion de limite, on peut introduire des éléments infinitésimaux dans la définition de la dérivée. On peut donc poser $x = x_0 + dx$, avec dx suffisamment petit pour ne pas avoir à utiliser la limite. La définition (exacte) de la dérivée de $f(x)$ en x_0 devient :

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+dx)-f(x_0)}{x_0+dx-x_0} = \frac{f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx}$$

Attention, la grandeur $f'(x_0)$ n'a pas la même homogénéité que $f(x)$. En effet, la grandeur $f(x_0+dx) - f(x)$ a la même homogénéité que f, et dx est une longueur. Ainsi, le rapport de ces deux grandeurs est homogène à :

$$[f'] = \frac{[f]}{[x]}$$

5.2.3 Différentielle

4: Définition

df est **la différentielle** de f calculée en x_0

$$df = f(x_0 + dx) - f(x_0)$$

Cette grandeur correspond à la variation infinitésimale de la fonction f entre les deux abscisses. Attention, la grandeur $df(x_0)$ a la même homogénéité que $f(x)$:

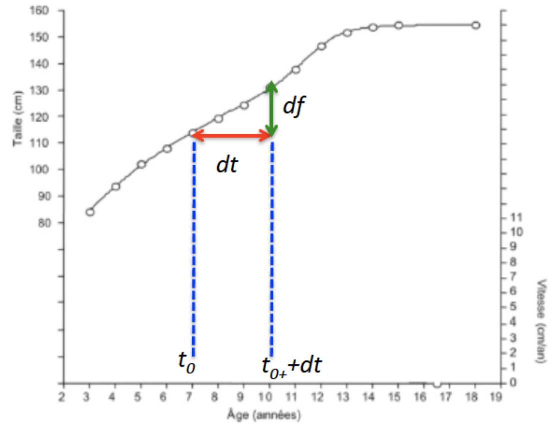
$$[df] = [f]$$

7: Propriété

D'après tout ce qui précède :

$$f'(x_0) = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}$$

L'arc $x = x_0$ signifie que l'on calcule la différentielle df en $x = x_0$. L'utilisation de notations infinitésimales fait de la dérivée un **rapport**. Ceci permet de manier les éléments infinitésimaux ou indépendamment les uns des autres et de manière exacte, comme de simples grandeurs mathématiques. En physique, de telle grandeurs auront donc une signification physique.



Exemple Soit une fonction f correspondant à la taille d'un enfant. Dans ce cas, la différentielle df calculée en t_0 est la variation de taille de l'enfant entre t_0 et $t_0 + dt$. Cette variation est d'autant plus grande que $f'(t_0)$ est grande.

Exemple Soit l'aire A d'un disque de rayon r, $A = \pi r^2$. La différentielle de l'aire en r_0 correspond physiquement à la variation de l'aire du disque si celui-ci voit son rayon passer de r_0 à $r_0 + dr$. Si on calcule cette différentielle, on a : $dA = (2\pi r)_{r=r_0} dr = 2\pi r_0 dr$. Ce résultat a une interprétation géométrique simple, $dA = 2\pi r_0 dr$ est l'aire de la couronne d'épaisseur dr qui entoure le disque de rayon r_0. Pour s'en convaincre, il suffit de dérouler cette couronne : on obtient un rectangle de longueur le périmètre du disque, *i.e.* $2\pi r_0$, et de largeur dr, donc bien d'aire $2\pi r_0 dr$.

1: Homogénéité

La définition précédente ne modifie pas les règles d'homogénéité :

$$[f'] = \frac{[f]}{[x]}$$

La dérivée d'une grandeur par rapport au temps est donc homogène à :

$$\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{[f]}{temps}$$

la dérivée d'une fonction par rapport au temps est notée :

$$\frac{df}{dt} = \dot{f}$$

Exemples

— Soit la vitesse verticale d'un point en coordonnées cartésiennes : $v_z = \frac{dz}{dt}$. Elle a bien pour dimension $m.s^{-1}$.

— Soit l'accélération d'un point en mouvement unidimensionnel : $a = \frac{dv}{dt}$. Elle a bien pour dimension $[a] = \frac{vitesse}{temps} = \frac{m.s^{-1}}{s} = m.s^{-2}$

5.3 Fonction dérivée

5: Définition

Si la dérivée est définie pour tout x_0 de l'intervalle d'étude, on peut définir une fonction dérivée $f'(x)$ qui fait correspond à une abscisse x la valeur $f'(x)$ de la dérivée de$f(x)$ en x, définie par :

$$f'(x) = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = \left.\frac{df}{dx}\right)_x$$

8: Fonctions dérivées classiques

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

$$(ln(x))' = 1/x$$

$$(exp(x))' = exp(x)$$

$$(sin(x))' = cos(x)$$

$$(cos(x))' = -sin(x)$$

5.4 Dérivation d'une fonction composée à une seule variable

Problème

- Soit une fonction $f(x)$ où l'argument de la fonction, x, est lui-même une fonction d'un autre paramètre, par exemple t, tel que $x(t)$.
- Si $f(x)$ est une fonction continûment dérivable de x et x une fonction continûment dérivable de t, on peut envisager de dériver f par rapport à t, il existe alors un rapport entre les dérivées.
- Si l'on utilise des notations infinitésimale, on peut très bien multiplier numérateur et dénominateur par dx, faisant ainsi apparaître la dérivée de f par rapport à x, on a donc l'égalité :

9: Dérivée d'une fonction composée

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} = f'(x)\frac{dx}{dt}$$

Exemple Variation de l'énergie cinétique d'une masse m avec le temps. On a : $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

Donc $\frac{dE_C}{dt} = \frac{2}{2}mv.\frac{dv}{dt} = mv.\frac{dv}{dt}$

5.5 Dérivée seconde

Problème

- Il est courant en physique d'avoir besoin de la variation de la variation d'une fonction – qui correspond par exemple, en mécanique, à ce que représente l'accélération par rapport au vecteur position. Mathématiquement, cela correspond à déterminer la *dérivée seconde* de la fonction considérée.
- Il n'y a pas de subtilité cachée dans sa définition : la fonction dérivée seconde n'est autre que la dérivée de la dérivée. Toutefois, les notations courantes sont souvent mal comprises, et il est bon de comprendre leurs origines.

10: Dérivée seconde d'une fonction

La dérivée seconde d'une fonction est par définition :

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(f'(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

Pour simplifier cette notation, il est d'usage de mettre en facteur les dx au dénominateur. On obtient donc un $(dx)^2$ le plus souvent noté dx^2. Il faudra prendre garde au fait que le carré ne porte pas sur le x, mais sur tout le dx : dx^2 n'a ainsi rien à voir avec $d(x)^2$. De même, on met en facteur les d au numérateur. On obtient un d^2, ce qui donne finalement :

$$f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2}$$

Attention la dérivée seconde en x_0 n'est pas la dérivée de la valeur de la dérivée en x_0, (pas plus que la valeur de la dérivée en x_0 n'est la dérivée de la valeur en x_0). En effet, la dérivée d'une valeur est toujours nulle.

2: Homogénéité

La définition précédente implique que :

$$[f''] = \frac{[f]}{[x^2]}$$

Exemples Soit l'accélération verticale d'un point en mouvement unidimensionnel : $a = \frac{d^2z}{dt^2}$. Elle a bien pour dimension $[a] = \frac{position}{temps^2} = \frac{m}{s^2} = m.s^{-2}$

Notation la dérivée seconde d'une fonction $f(t)$ par rapport au temps est notée :

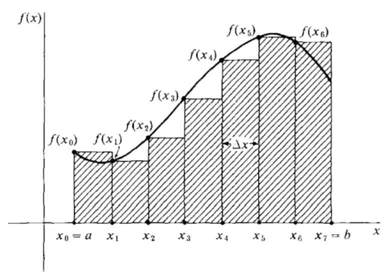
$$\frac{d^2f}{dt^2} = \ddot{f}$$

Exemple L'accélération en coordonnées cartésiennes s'écrit : $\overrightarrow{a} = \ddot{x}\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}$

6 Intégration

— Dans de nombreux cas, il peut être utile d'avoir accès au comportement moyen d'une fonction. Par exemple, la moyenne temporelle d'un signal variable constitue l'approximation la plus simple dudit signal. D'un point de vue mathématique, l'opération de moyenne est liée à l'intégration. De même que la dérivation, l'intégration est tributaire des notations infinitésimales.

— En théorie d'intégration de Riemann, l'aire située entre les abscisse a et b et sous la courbe $f(x)$ est définie exactement à l'aide d'une série (méthode des rectangles) que l'on fait tendre vers l'infini. (on découpe l'aire sous la courbe en rectangles très petits et on fait tendre le nombre de ces rectangles vers l'infini – et donc leur taille vers 0, de telle sorte que l'erreur intrinsèque pour un nombre fini de rectangles, qui est la différence entre l'aire sous la courbe et l'aire des rectangles, tende vers 0).



— On admet que la limite de cette série est équivalente à la somme continue suivante :

$$\int_a^b f(x)dx$$

— Les notations précédentes sont significatives : $f(x).dx$ représente l'aire d'un rectangle infinitésimale compris entre les abscisse x et $x + dx$ et de hauteur $f(x)$. L'aire sous la courbe est exactement égale à la somme des aires de tels rectangles, car ces derniers sont infinitésimaux : ils sont suffisamment petits pour que la relation soit exacte.

3: Homogénéité

Le signe intégration n'est qu'une écriture de la sommation effectuée de façon continue. **Cette sommation ne modifie pas l'homogénéité du produit dans l'intégrale**. Ainsi :

$$\left[\int f dx\right] = \int [f dx] = [f]\,[x]$$

Pour une intégration par rapport au temps :

$$\left[\int f dt\right] = \int [f dt] = [f]\,[t]$$

Exemple Position d'un point en mouvement unidimensionnel : $x = \int v_x dt$. Qui a bien la dimension : $[x] = \left[\int v_x dt\right] = \int [v_x dt]$: $m = m.s^{-1}.s$.

Le tableau ci-après résume les primitives les plus courantes en physique :

F est une primitive de f sur l'intervalle I (ou sur tout autre intervalle sur lequel f est continue).

$f(x)$	$F(x)$	I
x^α $(\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$ (ou $\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$)
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$e^{\alpha x}$ $(\alpha \in \mathbb{C}^*)$	$\dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$

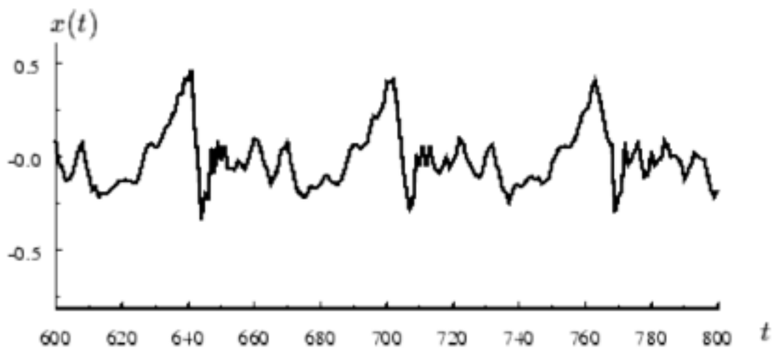
Quatrième partie

Outils d'écriture de grandeurs périodiques et sinusoïdales

7 Généralités

7.1 Présentation, généralités

Intérêt Les signaux périodiques jouent un rôle particulier dans l'étude des signaux, et ce notamment parce que tout signal peut être décomposé en une somme de signaux périodiques (plus précisément, en une somme de signaux sinusoïdaux). Ce signal est en réalité non-périodique au sens mathématique du terme. Cela dit, peu de signaux physiques peuvent se vanter d'être suffisamment « propres » pour pouvoir être considérés comme périodiques au sens mathématique du terme. Bien souvent par exemple, ils contiennent une petite composante de bruit qui brise la périodicité, comme on le voit sur la courbe suivante :



7.2 Caractéristiques

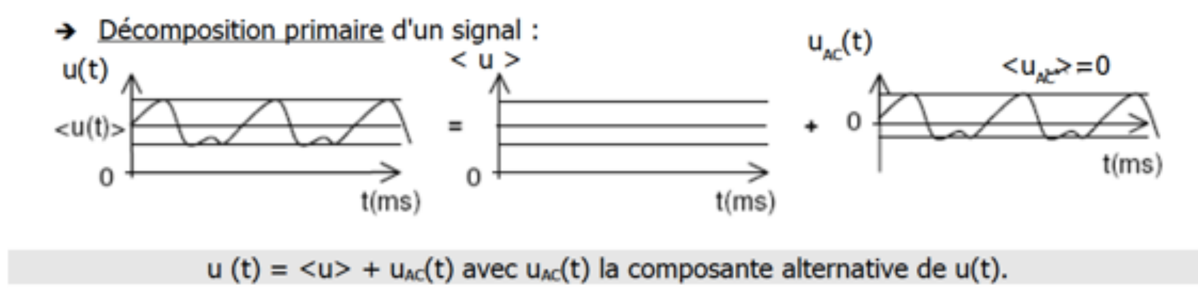
D'une manière générale, un signal périodique peut être caractérisé (repérer les différentes grandeurs sur le graphe précédent) :

6: Définitions

- par sa période T telle que : $s(t+T) = s(t)$
- par sa fréquence : $f = 1/T$
- par sa valeur moyenne $< s(t) >$:
- Son **amplitude crête**, différence entre sa valeur maximale et sa valeur moyenne.

7.3 Décomposition d'un signal

Idée On peut penser tout signal comme la superposition d'une composante continue et d'une composante alternative.



Utilité Chacune de ces grandeurs qui caractérisent un signal périodique peut contenir une partie ou toute l'information désirée. Par exemple, la fréquence contient la hauteur d'un signal musical, sa valeur moyenne contient son niveau sonore moyen,...

8 Un signal périodique important : le signal sinusoïdal

Parmi tous les signaux périodiques, le signal sinusoïdal joue un rôle très particulier, puisque que tout signal peut être vu comme une somme de signaux sinusoïdaux : ce sont donc les “briques élémentaires” permettant de construire tous les signaux imaginables. En plus de cette importance qu'on pourrait qualifier de mathématique, le signal sinusoïdal intervient dans un système physique qui a une importance cruciale dès lors qu'on s'intéresse à un système dans une situation stable : l'oscillateur harmonique, dont le représentant le plus célèbre est le système masse-ressort.

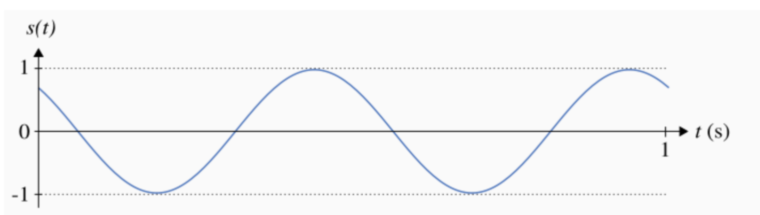
8.1 Définitions

7: Définitions

- D'une manière générale, un signal sinusoïdal peut s'écrire sous la forme suivante : $s(t) = s_0 cos(\omega t + \varphi)$
- Dans cette expression, s_0 est appelée **amplitude** du signal et représente la différence entre la valeur la plus élevée du signal et sa valeur moyenne, ici nulle. Renotons que l'homogénéité de $s(t)$ est celle de s_0.
- ω est appelée **la pulsation** du signal et elle est reliée à sa période T et sa fréquence f par : $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$. La pulsation s'exprime en $rad.s^{-1}$.
- $\omega t + \varphi$ est appelée la **phase du signal**. Cette grandeur est **adimensionnée** (comme argument d'une fonction transcendante). φ est appelée la **phase à l'origine** : elle positionne horizontalement la courbe par rapport à l'origine des temps.

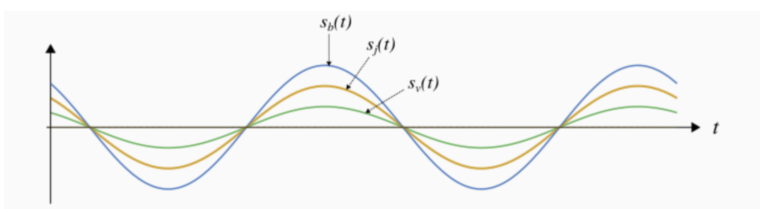
8.2 Analyse

Un signal sinusoïdal est un signal en forme de sinus. Formellement, il s'agit d'un signal pouvant s'écrire sous la forme suivante : $s(t) = S_0 \cos(2\pi f t + \varphi)$. Son allure est la suivante :



Signal sinusoïdal d'amplitude 1, de fréquence 2 Hz et de phase à l'origine $\pi/4$ rad.

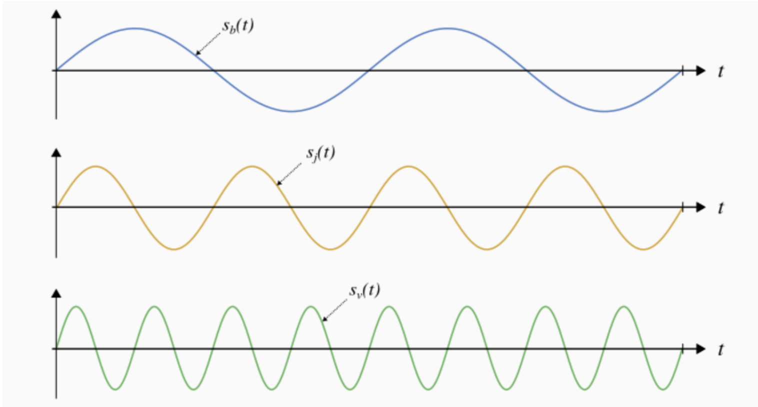
Amplitude Pour comprendre visuellement à quoi correspond l'amplitude, étudions les trois signaux sinusoïdaux de la figure ci-dessous :



Signaux sinusoïdaux de différentes amplitudes.

Ces signaux ont la même fréquence et la même phase à l'origine, mais diffèrent par leurs amplitudes. Il y a un signal bleu, $s_b(t)$, qui oscille le plus fort, un signal jaune, $s_j(t)$, qui oscille moins fort, un signal vert, $s_v(t)$, qui oscille encore moins fort. Les amplitudes sont telles que le signal bleu à la plus forte amplitude, suivi par le signal jaune et enfin le signal vert. On observe ainsi que plus l'amplitude est grande, plus l'oscillation est haute. Autrement dit, l'amplitude règle la hauteur des pics et la profondeur des creux. Ce comportement se justifie mathématiquement en utilisant l'expression d'un signal sinusoïdal. Le maximum d'un signal sinusoïdal, obtenu quand le cosinus est maximal et donc égal à 1, est en effet égal à l'amplitude : $\max s(t) = S_0 \max(\cos(2\pi f t + \varphi)) = S_0 \times 1 = S_0$

Fréquence Pour comprendre visuellement à quoi correspond la fréquence, étudions les trois signaux sinusoïdaux ci-dessous.

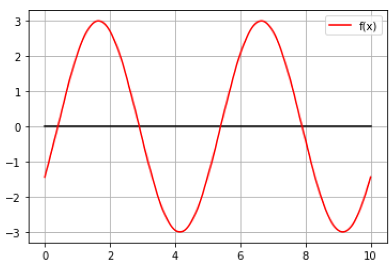


Comparaison de signaux sinusoïdaux de différentes fréquences.

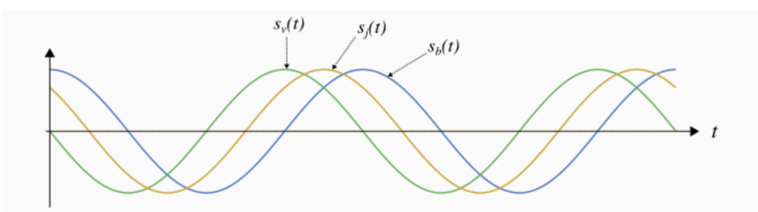
Ces signaux ne diffèrent que par leur fréquence et sont observés sur la même durée. On a un signal bleu, $s_b(t)$, qui oscille le moins vite, un signal jaune, $s_j(t)$, qui oscille plus vite, un signal vert, $s_v(t)$, qui oscille encore plus vite.

Pulsation La pulsation est liée à la fréquence par la définition suivante : $\omega = 2\pi f$. Pour déterminer la pulsation d'un signal sinusoïdal, on mesure la période T du signal, et on calcule : $\omega = \frac{2\pi}{T}$. La pulsation est en $rad.s^{-1}$

Méthode de détermination de la pulsation : Par exemple, pour le signal suivant, on lit : $T \simeq 5s$. Donc $\omega = \frac{2\pi}{T} \simeq \frac{2\pi}{5} \simeq 1,26 rad.s^{-1}$



Phase à l'origine Pour comprendre visuellement à quoi correspond la phase à l'origine, étudions cette fois les trois signaux suivants, qui s'écrivent $s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$:



Comparaison de signaux sinusoïdaux de différentes phases à l'origine.

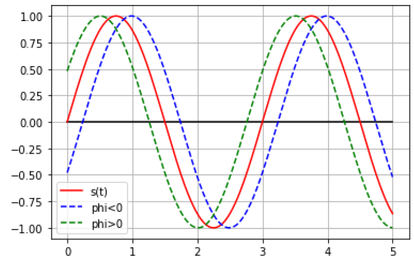
Les phases à l'origine de ces signaux sont telles que le signal bleu à une phase à l'origine nulle, le signal jaune a une phase à l'origine de l'ordre de $\pi/4$, le signal vert a une phase à l'origine de $\pi/2$. On voit que plus la phase à l'origine est grande plus le signal se déplace vers la gauche sur la figure. **En terme de temps, cela revient à dire que plus la phase à l'origine est grande, plus le signal est en avance temporelle.**

Phase Pour un signal sinusoïdal, la **phase** désigne la quantité à l'intérieur du cosinus, c'est-à-dire $2\pi ft + \varphi$. Le terme origine quant à lui désigne l'origine des temps, autrement dit $t = 0$. Si on calcule la phase pour $t = 0$, on obtient φ, la phase à l'origine. La phase à l'origine est **sans dimension**.

Ecriture Ainsi, les signaux sinusoïdaux sont le plus souvent écrits avec la pulsation au lieu de la fréquence :
$s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$

Signe de la phase à l'origine Considérons un signal qui s'écrit sous la forme : $s(t) = S_0.sin(\omega t + \varphi)$.
— Si $\varphi = 0$, le signal est un sin classique qui s'annule en $t_0 = 0$. (en rouge)
— Si $\varphi > 0$, le signal s'annule en t_0 tel que $\omega t_0 + \varphi = 0$, donc $t_0 = \frac{-\varphi}{\omega} < 0$. Ainsi, un tel signal est **en avance** sur un sinus classique. (en vert)

— Si $\varphi < 0$, le signal s'annule en t_0 tel que $\omega t_0 + \varphi = 0$, donc $t_0 = \frac{-\varphi}{\omega} > 0$. Ainsi, un tel signal est **en retard** sur un sinus classique. (en bleu)



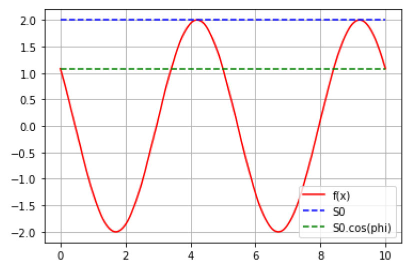
8.3 Méthodes de mesure de φ

Soit la courbe $s(t) = S_0.cos(\omega t + \varphi)$. On cherche à déterminer φ :

Méthode 1 : en mesurant le max et la valeur initiale : On mesure le maximum, ce qui donne la valeur de $s_{max} = S_0$. Ici : $S_0 = 2u_{SI}$

On mesure la valeur initiale, ce qui donne $s(t = 0) = S_0 cos\varphi$. Ici : $S_0 cos\varphi \simeq 1,1u_{SI}$

Donc : $cos\varphi \simeq \frac{1,1}{2}$ Donc $\varphi \simeq cos^{-1}(\frac{1,1}{2}) \simeq 0,98$



Méthode 2 : En mesurant l'instant d'annulation :

On mesure d'abord la période pour avoir accès à la pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{5} \simeq 1,26 rad.s^{-1}$

En mesurant l'instant t_0 où l'annulation est atteinte : $s(t_0) = 0 = S_0.cos(\omega t_0 + \varphi)$

Ici : $t_0 \simeq 0,4s$

Cet instant correspond à l'annulation de la fonction en cos donc à une situation où son argument vaut $\pi/2$, donc $\omega t_0 + \varphi = \pi/2$

Donc $\varphi = \pi/2 - \omega t_0 = \pi/2 - 1,26 \times 0,4 \simeq 1,1 rad$

On retrouve pratiquement la même valeur que précédemment, la différence étant uniquement liée aux erreurs de lecture.

Méthode 3 : En mesurant l'instant correspondant au maximum :

En mesurant l'instant t_m où le maximum est atteint : $s(t_m) = S_0 = S_0.cos(\omega t_m + \varphi)$

On mesure d'abord la période pour avoir accès à la pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{5} \simeq 1,26 rad.s^{-1}$

En mesurant l'instant t_m où le maximum est atteint : $s(t_m) = S_0 = S_0.cos(\omega t_m + \varphi)$

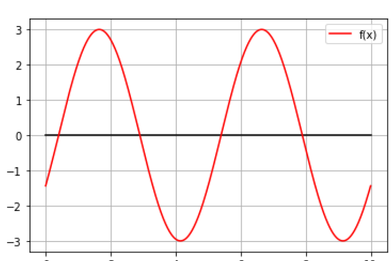
Ici : $t_m \simeq 4,2s$

Cet instant correspond au maximum de la fonction en cos donc à une situation où son argument vaut $0[2\pi]$, donc $\omega t_m + \varphi = 0[2\pi]$

Ici, on a $\varphi > 0$ car la fonction est en avance sur une fonction cos classique, donc on va prendre : $\omega t_m + \varphi = 2\pi$

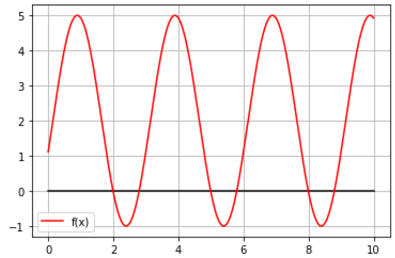
Donc : $\varphi = 2\pi - \omega t_m \simeq 0,99 rad$, qui est, là encore, assez proche de la première valeur trouvée.

Exemple 1 : Reprendre les trois méthodes précédentes et déterminer S_0, ω et φ pour le signal suivant, écrit sous la forme : $f(t) = S_0 sin(\omega t + \varphi)$:



Correction : $S_0 = 3u_{SI}$, $T = 5s$, $\omega = 1,26 rad.s^{-1}$, $\varphi = -0,5$

Exemple 2 : Reprendre les trois méthodes précédentes et déterminer S_0, S_1, ω et φ pour le signal suivant, écrit sous la forme : $f(t) = S_0 + S_1 sin(\omega t + \varphi)$:



Correction : $S_0 = 2u_{SI}$, $S_1 = 3u_{SI}$, $T = 3s$, $\varphi = -0,3rad$

8.4 Forme alternative avec un sinus

Il existe une définition alternative pour les signaux sinusoïdaux qui utilise la fonction sinus :
$s(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi')$
Il est possible de démontrer ce changement de variable grâce à quelques calculs trigonométriques :
$\forall x, \cos(x) = \sin(x + \pi/2)$
En transformant la définition, on obtient une forme avec un sinus :
$s(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi + \pi/2)$
En posant $\varphi' = \varphi + \pi/2$, on obtient finalement :
$s(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi')$

8.5 Déphasage entre deux signaux de même fréquence

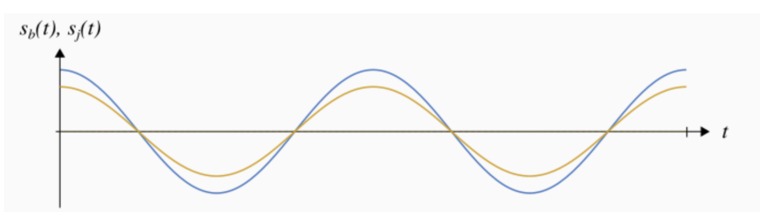
8.5.1 Généralités

Le déphasage entre deux signaux est une mesure du décalage entre deux signaux sinusoïdaux de même fréquence. Si on considère de deux signaux sinusoïdaux s_1 et s_2 de même pulsation $s_1(t) = S_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = S_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ alors le déphasage de s_2 par rapport à s_1 est la quantité : $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$

Vocabulaire
— Si $\Delta\varphi > 0$ est positif, le signal 2 est **en avance** de phase par rapport au signal 1.
— Si $\Delta\varphi < 0$ est négatif, le signal 2 est **en retard** de phase par rapport au signal 1.

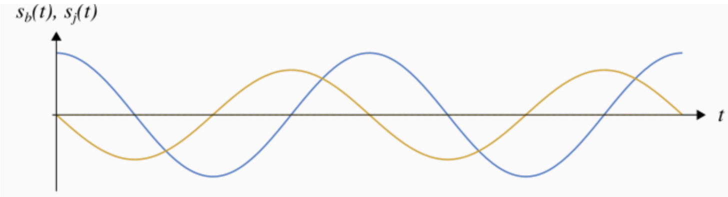
Cas particuliers de déphasage Quelques valeurs de déphasage remarquables ont un nom particulier qu'il est utile de connaître.

— **Quand le déphasage est nul, on dit que les signaux sont en phase**. Dans cette configuration, leurs maximums et minimums coïncident ; les signaux oscillent conjointement. Mathématiquement, cela signifie que les deux signaux sont proportionnels. C'est par exemple le cas pour la tension électrique aux bornes d'une résistance et le courant électrique qui la traverse.



Les signaux s_b (en bleu) et s_j (en jaune) sont en phase.

— **Signaux en opposition de phase :** Quand le déphasage est égal à π, on dit que les signaux sont en opposition de phase. Dans cette configuration, les maximums d'un signal coïncident avec les minimums de l'autre signal ; les signaux oscillent à l'opposé l'un de l'autre.
— **Signaux en quadrature de phase** Quand le déphasage est égal à $\pi/2$, on dit que les signaux sont en quadrature de phase. Dans cette configuration, les maximums d'un signal coïncident avec les passages par zéros en décroissant de l'autre signal. Par exemple, un signal sinusoïdal et sa dérivée sont en quadrature de phase.



Les signaux s_b (en bleu) et s_j (en jaune) sont en quadrature de phase.

8.5.2 Retard temporel et déphasage

Retard temporel Dans la première partie, nous avons évoqué le lien entre phase et avance (ou retard) temporel et ce lien se retrouve évidemment sur le déphasage. Il est ainsi possible de relier le déphasage de deux signaux de même fréquence et le retard temporel de l'un par rapport à l'autre, mais avant de faire cela, il convient de préciser un peu la notion de retard temporel. Soient les signaux : $s_1(t) = S_1 \cos(2\pi f t + \varphi)$ et $s_2(t) = S_2 \cos\left(2\pi f (t + \Delta t) + \varphi\right)$. On dira alors que s_2 est en avance (temporelle) sur s_1 de Δt, ou, de manière équivalente que s_1 est en retard de Δt sur s_2. Il faut voir Δt comme la durée à ajouter à la variable temporelle t dans l'expression de s_2 pour qu'il oscille en phase avec s_1. De manière intuitive, cela signifie que si on a un maximum pour s_2 à un instant t, alors on aura un maximum pour s_1 dans le futur, à la date $t + \Delta t$.

Relation entre déphasage et retard temporel Maintenant qu'on dispose de la notion de retard temporel, voyons comment le déphasage et le retard temporel sont liés.

Soit deux signaux s_1 et s_2 de même pulsation ω tels que s_2 soit déphasé de $\Delta\varphi$ par rapport à s_1. On peut écrire les écrire ainsi : $s_1(t) = S_1 \cos(\omega t + \varphi)$ et $s_2(t) = S_2 \cos(\omega t + \varphi + \Delta\varphi)$. En factorisant partiellement par ω dans le cosinus, on peut transformer l'expression de $s_2(t)$ en : $s_2(t) = S_2 \cos\left(2\pi f \left(t + \frac{\Delta\varphi}{2\pi f}\right) + \varphi\right)$. On peut réécrire cela sous la forme : $s_2(t) = S_2 \cos\left(2\pi f\,(t + \Delta t) + \varphi\right)$ avec : $\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{2\pi f}$

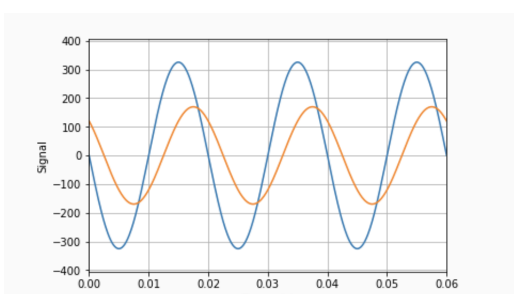
Nous venons d'obtenir une formule qui permet de passer d'un retard temporel à un déphasage et réciproquement.

Elle a une grande utilité pratique, notamment car de nombreux instruments permettent la mesure du temps, mais pas directement de la phase. C'est le cas notamment des oscilloscopes, très utilisés en électronique.

Considérations pratiques Dans la pratique, l'origine des temps est une référence arbitraire (par exemple, sur un oscilloscope, le temps zéro est lié à la configuration du déclenchement). On s'intéresse en conséquence assez peu aux valeurs des phases à l'origine, et la définition du déphasage comme différence entre les phases à l'origine n'a pas d'utilité pratique. À la place, on mesure le retard pour en déduire le déphasage avec la formule vue ci-avant. La mesure de déphasage d'un signal 2 par rapport à un signal 1 s'effectue ainsi :

- On prend un instant de référence t_1 sur le signal 1 (parce qu'on s'intéresse au déphasage du signal 2 par rapport au signal 1). Il peut s'agir par exemple d'un instant où le signal est maximum ou minimum.
- On cherche un instant analogue t_2 sur le signal 2. Par exemple, si on a choisi un maximum comme point de référence, il faut un maximum. Attention, il ne faut pas choisir n'importe quel instant analogue, mais celui le plus près de l'instant de référence. Il s'agit d'une convention qui revient à considérer le déphasage comme compris entre $-\pi$ et π. On mesure le retard $\Delta t_{2/1}$ du signal 2 par rapport au signal 1, défini par $\Delta t_{2/1} = t_2 - t_1$
- On en déduit le déphasage grâce à la formule $\Delta\varphi_{2/1} = \omega \Delta t_{2/1}$
- Cette méthode donne directement le déphasage entre les deux signaux, sans passer par les phases à l'origine.

Exemple 1 : Déterminer le déphasage du signal orange par rapport au signal bleu.



La première étape est de considérer si le signal orange est en avance ou en retard temporel sur le signal bleu. Comme il est à sa droite, on peut conclure que le signal orange est en retard sur le signal bleu. Son déphasage sera donc **négatif**.

La deuxième étape consiste à mesurer l'écart temporel. Le passage par zéro est l'endroit ou le retard est le plus facile à mesurer. C'est assez peu évident à mesurer sur une petite figure, mais l'écart entre les deux signaux vaut 1/4 de graduation, soit $2,5ms$. Le signe est négatif, car le signal orange est en retard.

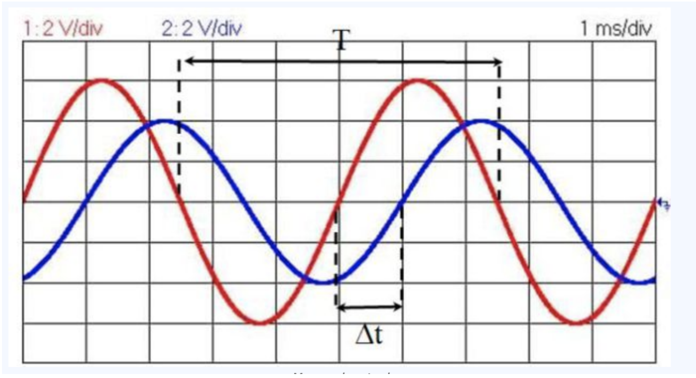
$\Delta t_{orange/bleu} = -2,5$ ms

Il est assez facile de voir qu'une période dure deux graduations, soit $T = 20ms$.

On peut en déduire la fréquence : $f = \frac{1}{T} = 50$ Hz

Donc : $\Delta\varphi = 2\pi f \Delta t_{orange/bleu} = -\frac{\pi}{4}$

Exemple 2 : Ecrire les deux signaux suivants : déterminer leurs amplitudes, pulsations, phases à l'origine. Déterminer leur différence de phase et commenter la cohérence du signe et de la valeur numérique.



8.6 Ecritures alternatives du signal

— L'écriture utilisé $s(t) = s_0 cos(\omega t + \varphi)$ n'est pas la seule envisageable. Le même signal peut en effet s'écrire sous la forme : $s(t) = s_0 sin(\omega t + \varphi') = acos(\omega t) + bsin(\omega t)$

— Autrement dit, toute combinaison linéaire de sinus et de cosinus synchrones (i.e. de même fréquence) peut s'écrire sous la forme d'un sinus, ou d'un cosinus, en choisissant des phases à l'origine adaptées.

Cinquième partie

Développements limités

But Pour confirmer ou infirmer une loi, pour résoudre une équation algébrique, il est souvent nécessaire de simplifier une expression, moyennant certaines hypothèses. On traite ici de la simplification la plus courante : l'approximation linéaire, ou développement limité à l'ordre 1.

9 Généralités et exemples

Ce type de modélisation est de loin le plus fréquent, la linéarisation fonde une partie de la physique. On parlera indifféremment d'approximation linéaire, affine, de linéarisation ou de développement limité à l'ordre 1. Une telle approximation linéaire a déjà été vue précédemment en s'appuyant sur la représentation graphique de la fonction ; on cherche ici à faire de même à partir de l'expression de la fonction étudiée.

11: Principe

On modélise la courbe $f(x)$, au voisinage d'un point d'abscisse x_0 par sa tangente locale d'équation :

$$f(x) \simeq t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

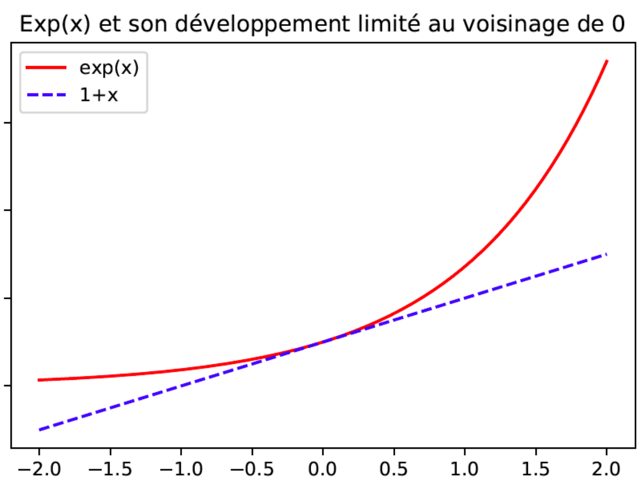
La méthode générale pour établir le développement limité consiste simplement à faire les calculs de $f(x_0)$ et $f'(x_0)$ et de réinjecter les valeurs dans l'expression de $t(x)$.

Exemple Développement limité de e^x au voisinage de $x = 0$

- On calcule la valeur de la fonction en $x = 0$, ce qui donne : $exp(0) = 1$
- On calcule la valeur de la pente de la fonction à approximer en $x = 0$, ce qui donne : $exp(0) = 1$
- L'expression générale donne :

$$exp(x) \sim 1 + x$$

Interprétation Si l'on trace sur le même graphe $exp(x)$ et $1+x$, on visualise simplement la signification de la linéarisation : au voisinage immédiat de $x = 0$, la fonction $exp(x)$ peut être approchée par $1 + x$.



Remarque signalons dès à présent que le développement limité est une approximation qui a *un domaine de validité*. On voit bien sur le graphe précédent que pour $x = -1$, l'approximation de $exp(x)$ par $1 + x$ est vraiment mauvaise. On précise donc toujours, lorsque l'on fait un développement limité, au voisinage de quelle valeur d'abscisse on l'effectue.

Exemple Montrer que : $(1 + x)^\alpha \sim 1 + \alpha x$ pour x petit devant 1

Application Linéariser la fonction $\frac{1}{(1+x)^3}$ au voisinage de $x = 0$ et faire la construction graphique correspondante.

12: Développements limités utiles en physique

Au voisinage de 0 :

$$exp(x) \sim 1 + x$$

$$(1 + x)^\alpha \sim 1 + \alpha x$$

$$ln(1 + x) \sim x$$

$$sin(x) \sim x$$

$$cos(x) \sim 1$$

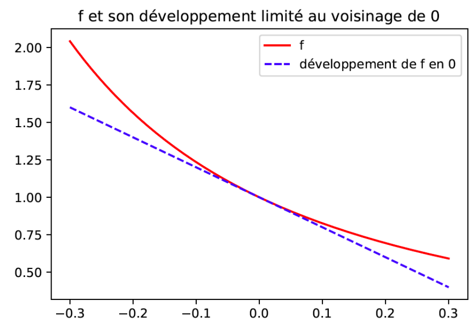
Exemples le développement $(1 + x)^\alpha \sim 1 + \alpha x$ se rencontre très souvent en physique. Voici quelques exemples :

— $(1 + x)^3 \sim 1 + 3x$
— $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \sim 1 - \frac{x}{2}$
— $\frac{1}{(1-x)^{3/2}} \sim 1 + \frac{3x}{2}$
— $(a + x)^3 = a^3(1 + \frac{x}{a})^3 \sim a^3(1 + 3\frac{x}{a}) = a^3 + 3xa^2$

On remarque notamment sur ce dernier exemple que le développement limité ne change pas l'homogénéité de la formule.

Application Linéariser la fonction $\frac{1}{(1+x)^2}$ au voisinage de $x = 0$ et faire la construction graphique correspondante.

Solution $\frac{1}{(1+x)^2} \sim 1 - 2x$ dont les tracés ont pour allures :



10 Méthodes

Dans la plupart des cas, l'utilisation de la formule générale $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, n'est pas nécessaire, et l'on peut se ramener aux formules précédentes *si l'on parvient à créer une grandeur petite devant* 1.

13: Méthode

On remarque que : $x = x_0 + x - x_0$ avec $x - x_0 \ll x_0$.
Par construction, la grandeur petite devant 1 est $(x - x_0)/x_0$. On peut mettre l'ensemble sous la forme : $x = x_0(1 + (x - x_0)/x_0)$. On peut alors réinjecter cette dernière expression dans les formules de développements limités usuels, au voisinage de 0.

Exemple Linéariser $1/z^3$ au voisinage de $z = d$

Solution $\frac{1}{z^3} = \frac{1}{(d+z-d)^3} = \frac{1}{(d(1+\frac{z-d}{d}))^3} = \frac{1}{d^3(1+\frac{z-d}{d})^3} \sim \frac{1}{d^3}(1 - 3\frac{z-d}{d}) = \frac{1}{d^3} - 3\frac{z-d}{d^4}$

Remarque le développement limité ne change pas l'homogénéité d'une fonction.

Il arrive souvent que l'on cherche à quantifier la variation d'une fonction en fonction de l'écart relatif par rapport à une position particulière (position d'équilibre en mécanique, point de fonctionnement en électrocinétique,...)

14: Méthode

Pour une fonction $f(x)$ analysée au voisinage d'un point x_0, on pose ainsi : $x = x_0(1 + \varepsilon)$ avec $\varepsilon \ll 1$
On peut alors réinjecter cette dernière expression dans les formules de développements limités usuels, au voisinage de 0.

Exemple Linéariser $exp(x)$ au voisinage de x_0 ; donner le résultat en fonction de ε puis de x.

Solution $exp(x) = exp(x_0(1+\varepsilon)) = e^{x_0}e^{x_0\varepsilon} \sim e^{x_0}(1+x_0\varepsilon) = e^{x_0}(1+x_0\frac{x-x_0}{x_0}) = e^{x_0}(1+x-x_0)$

15: Méthode

Si l'on envisage une variation infinitésimale dx de l'argument d'une fonction $f(x)$ au voisinage d'un point x_0, faire le développement limité en dx_0 est un calcul proche de celui de la différentielle de f en x_0. Là encore, les formules classiques permettent souvent de s'affranchir du calcul direct. La grandeur petite devant 1 est ici dx/x_0.

Exemple Exprimer l'aire d'un disque de rayon $r+dr$ et en déduire l'aire de la couronne circulaire comprise entre r et $r+dr$

Solution $A(r+dr) = \pi(r+dr)^2 = \pi r^2(1+\frac{dr}{r})^2 \sim \pi r^2(1+2\frac{dr}{r}) = \pi r^2 + 2\pi r dr$

L'aire de la couronne comprise entre r et $r+dr$ est donc : $A(r+dr) - \pi r^2 = 2\pi r dr$, ce qui a une interprétation géométrique simple.

Enfin, la fonction f n'est pas une fonction simple de x, elle peut être un quotient, un produit, une fonction composée de fonctions de x.

16: Méthode

Le développement limité à l'ordre 1 d'une fonction composée est la composée des développements limités : on développe la première fonction, puis on redéveloppe pour la deuxième,...

Exemple Linéariser $exp(x^2)$ au voisinage de 1

17: Méthode

Dans le cas où $f(x)$ « contient » plusieurs fonctions de x, on développe chacune d'entre elles à l'ordre 1 et on ne garde que les termes d'ordre après développement des produits, quotients, sommes...

Exemple Linéariser $exp(x)/(1+x)^2$ au voisinage de 0

Application Déterminer une solution approchée au voisinage de 0 de l'équation $ln(1+x) = 1/(1+x)^2$. Figurer les deux courbes exactes et les courbes linéarisées sur le même graphe et vérifier la cohérence de la démarche.

Equations différentielles du premier ordre

Première partie
Présentation

1 Définitions

Intérêt des équations différentielles en physique En physique, la résolution d'un problème donné se ramène bien souvent à la détermination des dépendances d'une grandeur physique, qui prend la forme mathématique d'une fonction d'une ou plusieurs variables. Par exemple, on peut souhaiter déterminer l'évolution de l'altitude d'un mobile en chute libre en fonction du temps : la résolution de ce problème a alors pour but la détermination de l'expression de la fonction $z(t)$. Suite au choix d'un modèle (cadre pertinent pour l'étude : on peut par exemple choisir de ne pas négliger les frottements de l'air, mais laisser de côté la rotation propre du mobile au cours de la chute etc.) et grâce à une paramétrisation (choix du système d'axes de coordonnées, de l'origine du temps) adaptés, l'application d'un principe physique décrivant le comportement générique du type de système étudié (par exemple, la seconde loi de Newton pour un système mécanique) permet d'aboutir à un relation entre la grandeur recherchée et une ou des dérivées temporelles de cette grandeur : on parle d'*équation différentielle régissant la grandeur recherchée*. Pour une chute libre d'un point dans le champ de pesanteur, l'altitude $z(t)$ vérifie par exemple l'équation différentielle : $\frac{d^2z}{dt^2} = -g - \alpha\frac{dz}{dt}$.

1: Définition

Soit une fonction f de la seule variable x. Une équation différentielle (E.D.) sur la fonction est une égalité, valable sur un certain intervalle, entre les valeurs prises par f et ses dérivées successives. L'inconnue d'une telle équation différentielle n'est autre que la fonction vérifiant cette égalité.
L'ordre d'une équation différentielle portant sur la fonction f est l'ordre le plus élevé apparaissant dans les dérivées successives de cette fonction au sein de cette équation.

Exemples

— La fonction exponentielle est une solution de l'équation différentielle : $f' = f$ (notation abrégée signifiant que pour tout réel x, $\frac{df}{dx} = f(x)$). Cette équation différentielle est du premier ordre.
— L'équation différentielle $f'' + 4f' + f = 0$ est dite du second ordre parce que l'ordre maximal des dérivées de f apparaissant dans cette équation est l'ordre 2.

2: Définition

Une équation différentielle est dite homogène lorsqu'elle ne possède que des termes fonction de f et/ou d'une dérivée de f.
On parlera de l'équation différentielle homogène associée à une équation différentielle donnée : c'est cette même équation différentielle privée des termes ne faisant intervenir ni f ni ses dérivées.
Une équation différentielle est dite linéaire à coefficients constants (souvent simplement appelée linéaire) si l'équation différentielle homogène associée à cette équation différentielle peut être mise sous la forme : $\Sigma a_n f^{(n)}(x) = 0$ où les coefficients sont constants.

Exemples

— $f'' + 4f' + f = 0$ est une équation différentielle homogène.
— $f'' + 4f' + f = 5$ est une équation différentielle non homogène à second membre constant
— $f'' + 4f' + f = cos(ax)$ est une équation différentielle non homogène à second membre non constant

2 Etapes de résolution d'une équation différentielle

1: Méthode

Soit une fonction f de la variable x. Pour résoudre une équation différentielle sur la fonction f, il y a deux étapes :
- Intégrer cette équation, c'est-à-dire trouver une expression de $f(x)$ qui vérifie cette équation différentielle. Une équation différentielle ne possédant pas qu'une unique solution, on exhibe en fait un ensemble de solutions : la solution générale fait ainsi apparaître une ou des constantes d'intégration, que l'on ne peut pas connaître a priori. $f(x)$ n'est donc pas entièrement déterminée à cette étape.
- Déterminer la ou les constantes d'intégration en utilisant les conditions initiales (ou les conditions aux limites) sur la fonction $f(x)$ qui sont fournies par le problème que l'on étudie. Les conditions précises dans lesquelles se produit le phénomène étudié permettent en effet de connaître une ou des valeurs particulières de la fonction et/ou de ses dérivées. Ces valeurs particulières permettent ainsi de sélectionner parmi la famille des solutions de l'équation différentielle la fonction solution qui est la solution du problème que l'on étudie : cela revient à déterminer la valeur des constantes d'intégration.
Même si elles ne sont pas nécessaires en mathématiques pour définir l'espace des solutions, les constantes d'intégration jouent un rôle fondamental en physique au-delà de la prise en compte des conditions initiales : pour donner une *dimension* à la solution.

Exemple L'équation différentielle $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ a pour solution générale $x(t) = Acos\omega t + Bsin\omega t$, A et B étant les constantes d'intégration à déterminer. Si l'on sait par ailleurs que $x(t=0) = x_0$ et $\dot{x}(t=0) = 0$, on a nécessairement $A = x_0$ et $B = 0$ d'où l'unique solution vérifiant ces conditions : $x(t) = x_0 cos\omega t$

1: Propriété

Le nombre de constantes d'intégration à déterminer lors de la résolution d'une équation différentielle est égal à l'ordre de cette équation différentielle. On peut vérifier cette propriété sur l'exemple précédent : c'est la constante d'intégration A qui donne son homogénéité à $x(t)$. Il faut donc penser à vérifier a posteriori que l'on a bien utiliser un nombre suffisant de conditions initiales.

Vérification Vérifier qu'une fonction est bien solution d'une équation différentielle correspond à :

— réinjecter cette fonction dans l'équation différentielle, et à s'assurer que l'équation est bien valable pour toutes les valeurs du domaine de résolution de la fonction
— s'assurer que la fonction vérifie la ou les condition(s) initiale(s)

Exemple soit l'équation différentielle $\frac{df}{dt} + kf = 0$ avec $f(t=0) = f_0$.

On peut vérifier que la fonction $f(t) = f_0 e^{-kt}$ est bien solution de cette équation. En effet, avec cette solution : $\frac{df}{dt} = -kf_0 e^{-kt} = -kf$ donc $\frac{df}{dt} + kf = -kf + kf = 0$ qui est vérifiée pour tout t. De plus, $f(t=0) = f_0 e^{-k0} = f_0$ ce qui correspond bien à la condition initiale.

Contre-exemple On peut vérifier que la fonction $f(t) = f_0 cos\,(kt)$ n'est pas solution de l'équation précédente. En effet, avec cette solution : $\frac{df}{dt} = -kf_0 sin(kt)$ donc $\frac{df}{dt} + kf = -kf_0 sin(kt) + kf_0 cos(kt)$. Il existe certes un instant t_0 pour lequel $-kf_0 sin(kt_0) + kf_0 cos(kt_0) = 0$ mais il s'agit d'une annulation fortuite. L'équation doit être vérifiée pour tout t, ce qui n'est pas le cas ici, on peut donc dire que $f(t) = f_0 cos(kt)$ n'est pas solution de $\frac{df}{dt} + kf = 0$.

Deuxième partie

Résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre

3 Résolution des équations différentielles linéaires homogènes

On rappelle qu'il y a deux étapes de résolution (intégration, détermination de la constante d'intégration). Dans la plupart des cas (sauf si l'on fait du raccordement de solutions), les conditions initiales sont données à $t = 0$. Dans ce cas, l'équation à résoudre est :

$$\frac{df}{dt} + kf = 0$$

$$f(t=0) = f_0$$

2: Propriété

La solution d'une équation différentielle du premier ordre à coefficient constant dans l'espace des réels est de la forme :

$$f(t) = \lambda e^{rt}$$

où r est un complexe quelconque et λ est un réel.

3: Propriété

La solution de l'équation différentielle précédente est donc :

$$f(t) = f_0.e^{-k.t}$$

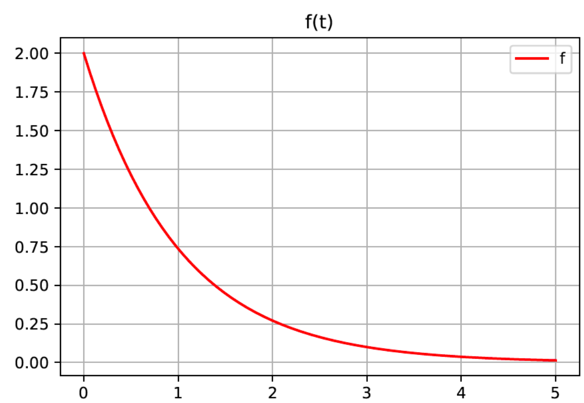
Démonstration

— On réinjecte une telle solution dans l'équation différentielle, on obtient :
— $\lambda r e^{rt} + \lambda k e^{rt} = 0$
— soit $r + k = 0$ et donc $r = -k$
— et donc une solution du type $f(t) = \lambda e^{-kt}$
— Il ne reste qu'à déterminer la constante d'intégration $f(t=0) = \lambda e^0 = \lambda = f_0$
— ce qui donne finalement : $f(t) = f_0 e^{-kt}$

Vérification il faut prendre l'habitude, une fois le résultat établi, de vérifier que la solution proposée vérifie bien l'équation et les conditions initiales. Ici :

— $f(t=t_0) = f_0 e^{-k(t_0-t_0)} = f_0 e^0 = f_0$
— Et : $\frac{df}{dt} = -kf_0 e^{-k(t-t_0)} = -kf$ ce qui est bien l'équation différentielle.

Allure dans le cas où $t_0 = 0$ et $f_0 = 2$.



4: Propriété

Dans certains cas, la ou les conditions initiales sont données à $t = t_0$. Dans ce cas, le problème étudie s'écrit :

$$\frac{df}{dt} + kf = 0 \text{ et } f(t=t_0) = f_0$$

Et sa solution est

$$f(t) = f_0.e^{-k.(t-t_0)}$$

Démonstration

— On réinjecte une telle solution dans l'équation différentielle, on obtient :
— $\lambda r e^{rt} + \lambda k e^{rt} = 0$
— soit $r + k = 0$ et donc $r = -k$
— et donc une solution du type $f(t) = \lambda e^{-kt}$
— Il ne reste qu'à déterminer la constante d'intégration $f(t=t_0) = \lambda e^{-kt_0} = f_0$
— ce qui donne finalement : $f(t) = f_0 e^{-k(t-t_0)}$

Vérification une fois le résultat établi, on vérifie que la solution proposée vérifie bien l'équation et les conditions initiales. Ici :

— $f(t=t_0) = f_0 e^{-k(t_0-t_0)} = f_0 e^0 = f_0$
— Et : $\frac{df}{dt} = -kf_0 e^{-k(t-t_0)} = -kf$ ce qui est bien l'équation différentielle.

2: Analyse

Le fait que la solution d'une équation différentielle $\frac{df}{dt} = -kf$ ait une solution de la forme $f = \lambda e^{-kt}$ est logique car l'équation différentielle correspond à une phrase du type : "quand je dérive f, je retrouve f multipliée par $-k$", ce qui correspond aux propriétés de la fonction exponentielle.

Démonstration On peut montrer que la solution est bien une exponentielle.

— Pour cela, il faut séparer les fonctions de f et du temps t : $\frac{df}{f} = -kdt$.
— Ensuite, on peut identifier les termes en tant que différentielles de fonctions connues (si les différentielles sont égales, les fonctions les ont aussi, à une constante du temps près) : $lnf = -kt + cste$
— soit$f = \lambda e^{-kt}$

4 Equations différentielles linéaires non-homogènes à second membre constant

Considérons l'équation différentielle linéaire du premier ordre non-homogène sous sa forme générale :

$$\frac{df}{dt} + kf = c$$

$$f(0) = f_0$$

5: Propriétés

La solution de toute équation différentielle linéaire est la somme :

- d'une **solution particulière** $f_P(t)$ à déterminer. **Celle-ci ne dépend pas des conditions initiales** et peut être entièrement déterminée sans conditions initiales. On peut montrer qu'**elle est de la même forme que le second membre** : si le second membre est une constante, une solution particulière de type constante convient.

- et **de la solution** $f_H(t)$ **de l'équation homogène associée**.

Méthode

— Déterminer la solution particulière : $f_P = \frac{c}{k}$ convient. Pour la déterminer, puisque le second membre est ici une constante, une solution particulière de type constante convient. On cache le terme dérivé (puisqu'on cherche une constante, sa dérivée est nulle) et on identifie directement.
— Déterminer la solution f_H de l'équation homogène associée : comme précédemment : $f_H = \lambda e^{-kt}$
— Ecrire la solution générale : $f = f_P + f_H = \frac{c}{k} + \lambda e^{-kt}$
— Déterminer la constante d'intégration est comme précédemment fournie par la condition initiale : $f(t_0) = f_0 = \frac{c}{k} + \lambda e^{-kt_0}$
— ce qui donne *in fine* : $\lambda = \left(f_0 - \frac{c}{k}\right) e^{kt_0}$

Et on a ainsi :

6: Propriété

la solution de l'équation : $\frac{df}{dt} + kf = c$ avec $f(t=0) = f_0$ est :

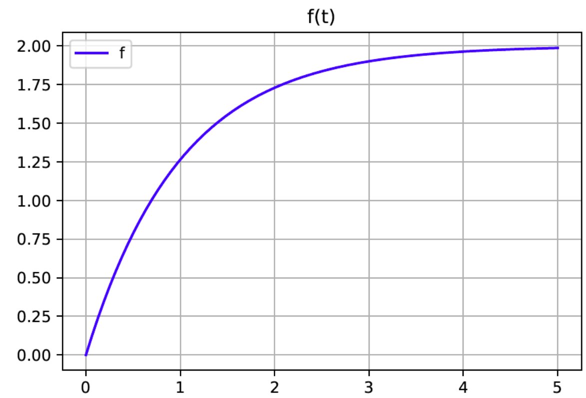
$$f(t) = \frac{c}{k} + \left(f_0 - \frac{c}{k}\right) e^{-kt}$$

Attention la condition initiale est vérifiée par la forme générale de la solution et pas uniquement par la solution homogène ou la solution particulière.

Vérification La solution proposée vérifie bien l'équation et les conditions initiales. En effet :

— $f(t=0) = \frac{c}{k} + (f_0 - \frac{c}{k})e^0 = \frac{c}{k} + (f_0 - \frac{c}{k}) = f_0$

— Et : $\frac{df}{dt} = -k(f_0 - \frac{c}{k})e^{-kt} = -kf + c$ ce qui est bien l'équation différentielle.



Analyse Cette forme de solution peut-être reconstruite qualittivement :

— la fonction doit tendre vers sa solution particulière c/k

— la fonction doit valoir f_0 en $t = 0$, donc on s'arrange avec la constante d'intégration devant l'exponentielle pour que ce soit le cas.

Remarque on peut retrouver cette forme de solution.

— Il faut commencer par séparer les variables $\frac{df}{c-kf} = df$

— Identifier les termes en tant que différentielles de fonctions connues : $\frac{-1}{k}ln(c - kf) = t + D$

— soit : $c - kf = exp(-k(t + D))$

— que l'on réécrit sous la forme : $f = \frac{c}{k} + \lambda e^{-kt}$

7: Propriété

La solution particulière et donc le régime établi ne dépendent pas des conditions initiales. On voit que la solution tend vers c/k, c'est-à-dire vers la solution particulière quand le temps tend vers l'infini. La solution particulière est associée au **régime établi du système**.

5 Equations différentielles linéaires du premier ordre à second membre quelconque

On considère une équation de la forme : $\frac{df}{dt} + kf = u(t)$ avec $f(t_0) = f_0$

8: Propriétés

De même que précédemment, la solution est la somme :

- d'une **solution particulière** $f_P(t)$ à déterminer. **Celle-ci ne dépend pas des conditions initiales** et peut être entièrement déterminée sans conditions initiales. On peut montrer qu'**elle est de la même forme que le second membre** : si le second membre est une fonction sinusoïdale, une solution particulière de type sinusïdale déphasée convient. Pour déterminer la solution particulière, on suppose qu'elle est de la même forme que le second membre, en gardant le plus de généralité possible. On réinjecte alors cette forme générale dans l'équation différentielle étudiée pour déterminer d'éventuels paramètres indéterminés.

- et la solution $\lambda.e^{-kt}$ de l'équation homogène associée.

Exemples

— Pour un second membre du type $Be^{-k't}$, on cherchera une solution particulière de la forme $B'e^{-k't}$, B' étant déterminée au cours de la réinjection.

— Pour un second membre du type $Bsin\omega t$ on cherche une solution particulière de la forme : $B'sin(\omega t+\varphi)$ou, $Ccos\omega t + Dsin\omega t$ plus simple à manipuler. On réinjecte l'une de ces formes dans l'équation et on obtient un système de deux équations à deux inconnues en identifiant les termes en facteur de $sin\omega t$ et $cos\omega t$, ce qui permet de déterminer les deux constantes d'intégration C et D.

6 Equations du premier ordre non-linéaires

9: Méthode

On considère une équation de la forme : $\frac{df}{dt} = u(f)$

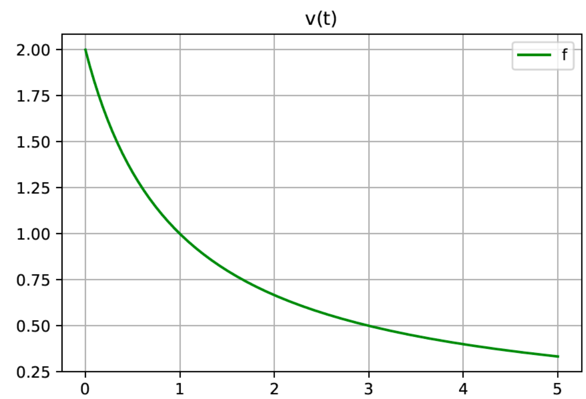
- La méthode consiste à séparer les variables, et de réécrire l'xéquation sous la forme : $\frac{df}{u(f)} = dt$

- Il ne reste plus qu'à intégrer des deux côtés par variables séparables. (Il faut donc connaître une primitive de 1/u(f))

Exemple intégrer l'équation : $\frac{dv}{dt} = -bv^2$ avec $v(t=0) = v_0$. Tracer l'allure de $v(t)$.

Solution on sépare les variables, ce qui donne : $-\frac{dv}{v^2} = bdt$

Or, on sait que : $-\frac{dv}{v^2} = d\left(\frac{1}{v}\right)$, donc l'intégration donne : $\frac{1}{v} = bt + cste$ (on peut vérifier, en différentiant cette égalité que l'on retombe bien sur l'équation différentielle)
Pour déterminer la constante d'intégration, on utilise la condition initiale : $v(t=0) = v_0$, on évalue donc l'égalité $\frac{1}{v} = bt + cste$ en $t = 0$, ce qui donne : $\frac{1}{v_0} = b.0 + cste$ donc $cste = \frac{1}{v_0}$
Donc : $\frac{1}{v} = bt + \frac{1}{v_0}$ ce qui donne finalement :
$v = \frac{v_0}{1+btv_0}$ dont on peut simplement vérifier l'homogénéité.



Analyse qualitative d'une équation différentielle

1 Présentation

Les cours précédents synthétisent les outils mathématiques que l'on utilise habituellement pour résoudre les équations différentielles. Mais la physique ne se résume pas à utiliser ces outils : il s'agit ensuite de comprendre la signification des évolutions prévues par les équations différentielles. C'est l'objet de cette partie.

But Il s'agit de prévoir qualitativement la forme de la solution de l'équation différentielle. Cette analyse peut être menée soit :

— après la résolution quantitative, en vue de confirmer la cohérence de la solution.
— avant la résolution quantitative, en vue de prévoir la forme de la solution.

Si une telle analyse n'est pas explicitement demandée à l'écrit, elle a un réel intérêt (prévision, vérification) et elle est très appréciée à l'oral. En tout état de cause, elle n'est jamais suffisante et on ne peut se passer de la résolution quantitative, qui constitue « le gros » du travail demandé.

Sophistication Par une analyse qualitative, il est possible de déterminer des grandeurs pertinentes de l'évolution de la solution d'une équation (temps typique d'évolution, période, valeur maximale, minimale, amplitude, pente initiale,...).

Là encore, de telles grandeurs peuvent être déterminées soit :

— après la résolution quantitative vue précédemment. Il s'agit alors simplement d'une étude de fonction. Par exemple, pour déterminer un temps typique ou une période, on utilise souvent le fait que les arguments de fonctions complexes sont sans dimension.
— avant la résolution de l'équation. Il s'agit alors, souvent à l'aide de considérations d'homogénéités, de construire, à partir de l'équation différentielle, les grandeurs pertinentes de l'évolution. Cet usage est beaucoup plus rapide, mais nécessite de « comprendre » le fonctionnement de l'équation différentielle, afin de ne pas construire n'importe quoi.

2 Analyse qualitative de l'influence des différents termes sur l'exemple d'une équation du premier ordre

2.1 Généralités

Restriction En physique, les équations différentielles du premier ordre sont souvent du type réaction-relaxation, c'est-à-dire de la forme : $\dot{x} = -f(x) + h(t)$

où f est une fonction positive ou nulle.

Analyse

— Supposons que le dernier terme n'existe pas, l'équation devient : $\dot{x} = -f(x)$
ce qui correspond à une *relaxation* de $x(t)$: $\dot{x}$ est non nul et négatif tant que $f(x)$ est non nul. L'équation fait décroître $x(t)$ jusqu'à ce qu'il atteigne une des racines de f.

— Supposons que le premier terme n'existe pas, l'équation devient : $\dot{x} = h(t)$
ce qui correspond à une réponse de x à une excitation $h(t)$.

1: Analyse

L'évolution générale de au cours du temps correspond à la compétition entre les influences de ces deux termes : $x(t)$ va le plus souvent se relaxer jusqu'à atteindre une valeur d'équilibre, pour laquelle réaction et relaxation se compensent.

2.2 Un exemple important : analyse qualitative d'une équation linéaire

Examinons maintenant qualitativement "le fonctionnement" d'une équation différentielle sur un cas simple. On envisage ici l'analyse qualitative dans les deux sens (analyse de la cohérence de la solution et prévision de celle-ci).

Soit l'équation : $\dot{x} = -kx + c$

avec pour condition initiale $x(0) = 0$

2.2.1 Première partie de l'évolution : les temps courts

Prévision $x(t \sim 0) \sim x(t = 0) = 0$ est négligeable, et l'équation est approximativement $\dot{x} \sim c$

et on a donc

$$x(t \sim 0) \sim ct$$

On peut ainsi prévoir la pente initiale de la solution.

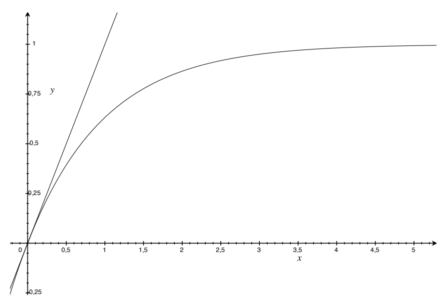
Cohérence Cette évolution linéaire approchée correspond forcément à l'approximation linéaire (au développement limité) de la solution exacte, quelle qu'elle soit. Ici, la solution exacte est :

$$x = \frac{c}{k}(1 - e^{-kt})$$

On vérifie simplement qu'aux temps courts, $x(t)$ est croissante de pente c :

- Si on dérive l'expression précédente, pour avoir la pente, et que l'on calcule celle-ci à $t = 0$, on obtient c.
- Si on fait le développement limité de cette fonction pour t faible, on obtient : $x(t) \sim \frac{c}{k}\,(1 - (1 - kt)) = ct$ qui est bien cohérent avec l'analyse aux temps courts.

Représentation l'approximation linéaire de la solution aux temps courts donne :



2.2.2 Deuxième partie de l'évolution : les temps intermédiaires

Prévision les deux termes, du fait de l'évolution de $x(t)$, deviennent commensurables et l'évolution de $x(t)$ se fait plus lente.

Cohérence On vérifie sur la solution exacte que l'évolution de $x(t)$ est plus lente et que la pente est plus faible.

2.2.3 Troisième partie de l'évolution : aux temps longs

Prévision Aux temps longs, les deux termes se compensent et $x(t)$ atteint sa valeur finale qui correspond à $\dot{x}(t = \infty) = 0$

et donc qui est donnée par $\dot{x}(t = \infty) = 0 = -kx_f + c$
donc

$$x_f = \frac{c}{k}$$

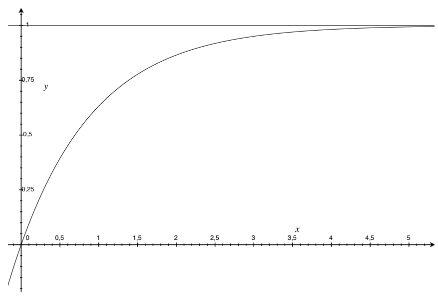
On peut ainsi prévoir la valeur finale de la solution.

Cohérence La solution atteint en effet un régime stationnaire.

2: Analyse

L'état stationnaire correspond à la **solution particulière**.
Cette solution particulière est **indépendante des conditions initiales**.

Représentation



2.2.4 Conclusion

Tous ces raisonnements sont basés sur le fait que k est une constante positive. L'existence d'un comportement asymptotique de la solution est lié à la mise en forme : $\dot{x} + kx = c$.

A retenir On retiendra que lorsqu'on met tous les termes fonctions de x d'un côté de l'équation, s'ils sont tous du même signe, alors la solution est stable et tend vers un comportement asymptotique.

2.3 Méthodes de détermination d'un temps typique d'évolution

2.3.1 Généralités

1: Méthodes

Si on a déjà déterminé la solution de l'équation, cette détermination est une simple étude de fonction. Sinon, à partir de l'équation différentielle elle-même, le temps typique d'évolution - qui correspond ici au temps typique pour atteindre un régime stationnaire - peut être déterminé soit :
- Par homogénéité : en comparant les différents membres de l'équation. Cela peut-être plus ou moins immédiat selon la forme de l'équation.
- Si cela n'est pas possible, il faut écrire que le temps typique est celui nécessaire pour atteindre la valeur finale en ayant une vitesse typique d'évolution correspondant approximativement à la vitesse initiale - ce qui correspond à la méthode de la tangente.

2.3.2 Construction du temps typique d'évolution pour une équation linéaire homogène

Soit une équation du type : $\dot{x} = -kx$ avec $x(0) = x_0$

Méthode Par homogénéité, le premier membre est homogène à : $\frac{[x]}{temps}$ donc le second membre doit avoir la même homogénéité, donc $[kx] = \frac{[x]}{temps}$ donc k est forcément homogène à l'inverse d'un temps et l'on peut poser : $\tau = \frac{1}{k}$

Analyse la résolution analytique de l'équation conduit à une solution en exponentielle avec un temps typique $\tau = \frac{1}{k}$ cohérent avec cette analyse.

2.3.3 Construction du temps typique d'évolution pour une équation linéaire non-homogène

Soit une équation du type : $\dot{x} = -kx + c$ avec $x(0) = 0$

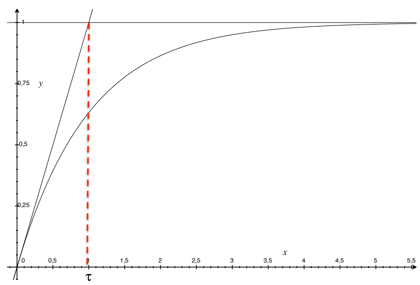
Méthode Soit on procède comme précédemment : le premier membre est homogène à : $\frac{[x]}{temps}$ donc le second membre doit avoir la même homogénéité, donc $[kx] = \frac{[x]}{temps}$ donc k est forcément homogène à l'inverse d'un temps et l'on peut poser : $\tau = \frac{1}{k}$

Méthode Soit on écrit que le temps typique est celui nécessaire pour atteindre la valeur finale en ayant une vitesse typique d'évolution correspondant approximativement à la vitesse initiale :

— ici, la pente initiale est $\dot{x}(t=0) = c$
— la valeur finale est $x_f = \frac{c}{k}$
— Donc le temps typique pour passer de 0 à x_f avec une pente typique de c est tel que : $\frac{x_f - 0}{\tau_T} = c$
— Donc $\tau_T = \frac{x_f}{c} = \frac{1}{k}$. On retrouve le temps typique précédent.

Remarque on aurait pu appliquer la même méthode à l'équation précédente.

Représentation



2.3.4 Construction du temps typique d'évolution pour une équation non linéaire homogène

Soit une équation du type : $\dot{x} = -kx^2$ avec $x(0) = x_0$.

Méthode On écrit que le temps typique est celui nécessaire pour atteindre la valeur finale en ayant une vitesse typique d'évolution correspondant approximativement à la vitesse initiale :

— Ici, la pente initiale est $\dot{x}(t=0) = -kx_0^2$
— la valeur finale est $x_f = 0$.
— Donc le temps typique pour passer de x_0 à $x_f = 0$ avec une pente typique de $-kx_0^2$ est tel que : $\frac{x_f - x_0}{\tau_T} = -kx_0^2$ donc $\tau_T = \frac{-x_0}{-kx_0^2} = \frac{1}{kx_0}$.

Remarque on aurait pu construire ce temps par homogénéité.

Remarque Dans la partie précédente, on a montré que la solution de l'équation différentielle $\frac{dv}{dt} = -bv^2$ avec $v(t = 0) = v_0$ était $v = \frac{v_0}{1+btv_0}$. Si l'on note $\tau_{1/2}$ le temps nécessaire pour que $v(t)$ soit divisé par deux par rapport à sa valeur initiale, on a : $v(\tau_{1/2}) = \frac{v_0}{2} = \frac{v_0}{1+b\tau_{1/2}v_0}$ ce qui implique : $1 + b\tau_{1/2}v_0 = 2$. Donc $\tau_{1/2} = \frac{1}{bv_0}$. On retombe donc exactement sur les mêmes dépendances par une analyse quantitative.

2.3.5 Méthode Construction du temps typique d'évolution pour une équation non linéaire non-homogène

Soit une équation du type $\dot{x} = -kx^2 + c$ avec $x(0) = 0$

Méthode

— On écrit que le temps typique est celui nécessaire pour atteindre la valeur finale en ayant une vitesse typique d'évolution correspondant approximativement à la vitesse initiale – ce qui correspond à la méthode de la tangente.
— Ici, la pente initiale est $\dot{x}(t=0) = c$
— la valeur finale est x_f telle que $\dot{x}(x_f) = 0 = -kx_f^2 + c$ donc $x_f = \sqrt{\frac{c}{k}}$
— Donc le temps typique pour passer de 0 à $x_f = \sqrt{\frac{c}{k}}$ avec une pente typique de c est tel que : $\frac{x_f - 0}{\tau_T} = c$ donc $\tau_T = \frac{x_f}{c} = \frac{\sqrt{\frac{c}{k}}}{c} = \frac{1}{\sqrt{ck}}$

3 Equations différentielles du second ordre sans terme de frottement

3.1 Equation du type $\ddot{x} = \omega_0^2 x$

3.1.1 Généralités

Analyse si $x(t)$ est positif, $\ddot{x}$ est positif et donc au bout d'un moment, $\dot{x}$ devient positif, ce qui fait augmenter $x(t)$: on a une divergence de $x(t)$ vers l'infini. Les choses sont inversées si $x(t)$ est négatif, mais toujours avec une divergence. On peut prévoir une divergence de $x(t)$ quelles que soient les conditions initiales.

2: Propriété

Pour une équation du type $\ddot{x} = \omega_0^2 x$, les solutions sont de la forme :

$$x = Ae^{\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t}$$

où A et B sont des constantes dintégration déterminées à laide des conditions initiales.

3.1.2 Analyse qualitative

Comme la solution d'une telle équation est divergente, construire une pulsation typique n'a pas de sens. Il est plus pertinent de construire un temps typique de divergence. Par homogénéité, on peut proposer : $\tau = 1/\omega_0$. De sorte qu'il vaut mieux réécrire une telle équation sous la forme : $\ddot{x} = \frac{x}{\tau^2}$

3.2 Equation du type $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$

Analyse si $x(t)$ est positif, $\ddot{x}$ est négatif et donc au bout d'un moment, $\dot{x}$ devient négatif, ce qui fait diminuer $x(t)$: on a un rappel de $x(t)$ vers 0 qui est la seule valeur d'équilibre de l'équation. Les choses sont inversées si $x(t)$ est négatif, mais toujours avec un rappel vers 0. On peut prévoir des oscillations de $x(t)$ autour de 0.

3: Propriété

Pour une équation du type $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$, les solutions sont de la forme :

$$x = Acos\omega_0 t + Bsin{-}\omega_0 t$$

où A et B sont des constantes dintégration déterminées à laide des conditions initiales.

3.3 Conclusion

On retrouve là encore le fait que :

— l'équation $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$ qui peut s'écrire $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ a des solutions stables en $x = Asin(\omega_0 t) + Bcos(\omega_0 t)$

— l'équation $\ddot{x} = \frac{x}{\tau^2}$ qui peut s'écrire $\ddot{x} - \frac{x}{\tau^2} = 0$ a des solutions instables en $x = Ae^{t/\tau} + Be^{-t/\tau}$

4: Propriété

On retrouve le fait que si tous les termes du premier membre sont du même signe, la solution est stable (ici, au sens où elle n'est pas divergente)

Utilisation des complexes en physique

En physique, de nombreuses manipulations concernant les grandeurs physiques réelles d'un problème sont beaucoup plus rapides et beaucoup plus systématiques si on les effectue non pas sur les grandeurs physiques réelles, mais sur des grandeurs complexes associées aux grandeurs réelles. Ainsi, la manipulation des complexes est un enjeu majeur en physique. On notera que les notations utilisées en physique sont différentes de celles utilisées en mathématiques, j remplace souvent i. Cela provient du fait que i est une notation classique en physique, que ce soit pour l'intensité en électrocinétique, pour les angles en optique,... Dans la suite, on prendra indifféremment i ou j. On se sert essentiellement du fait qu'un complexe z est la représentation d'un point $M(z)$ dans un plan. Ce plan est engendré par deux axes orthogonaux, l'axe des réels - qui sert d'axe des abscisses - et l'axe des imaginaires purs - qui sert d'axe des ordonnées.

1 Quelques rappels

1.1 Généralités

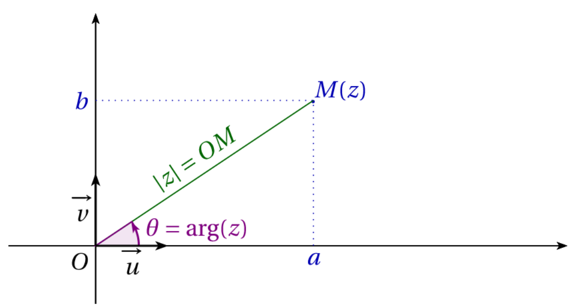
1.1.1 Ecritures géométrique et arithmétique d'un nombre complexe

1: Definition

La forme géométrique d'un complexe est :

$$z = |z|\, e^{j\theta}$$

où $|z|$ est le module de z qui correspond à la distance entre O et $M(z)$
et où θ est son argument, souvent noté $Arg(z)$, et correspond à l'angle entre l'affixe de $M(z)$ et l'axe des réels



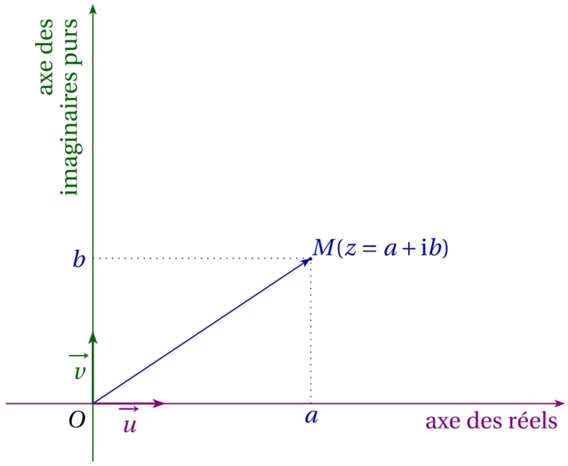
2: Definition

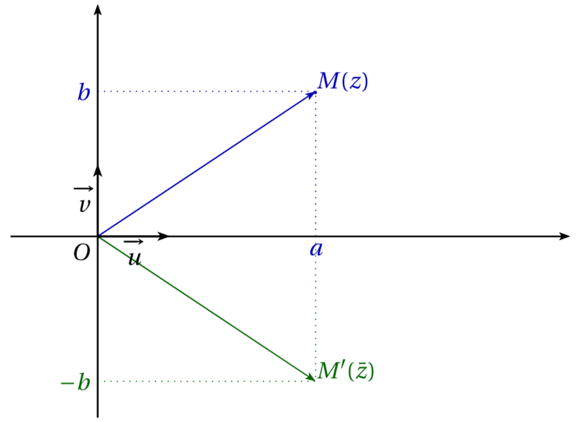
La forme arithmétique d'un complexe est :

$$z = a + jb = Re(z) + j.Im(z)$$

où a est la partie réelle du complexe et b sa partie imaginaire. On appelle conjugué de z le complexe z' :

$$z' = a - jb$$





1.1.2 Relations entre les deux écritures

L'identification des deux écritures fournit de nombreuses relations qui permettent de passer de l'une à l'autre et de compléter l'interprétation géométrique d'un complexe. On a ainsi :

$$Re(z) = |z|\, cos(\theta)$$
$$Im(z) = |z|\, sin(\theta)$$
$$\frac{Im(z)}{Re(z)} = tan(\theta)$$

On voit sur la première représentation que $b = Im(z) = |z|\, sin(\theta)$ et $a = Re(z) = |z|\, cos(\theta)$ et donc, on a bien : $\frac{Im(z)}{Re(z)} = tan(\theta)$

1: Relations de passage

Les deux relations suivantes sont particulièrement utiles en physique :

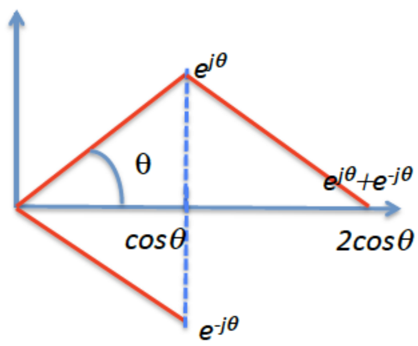
$$a + jb = \sqrt{a^2 + b^2} e^{jtan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)}$$
$$\frac{1}{a+jb} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} e^{-jtan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)}$$

1.2 Relations de base

Relations

$$j^2 = -1$$
$$cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$
$$sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$
$$e^{j\theta} = cos(\theta) + jsin(\theta)$$
$$cos(\theta) = Re(e^{j\theta})$$
$$sin(\theta) = Im(e^{j\theta})$$

Exemple Interprétation géométrique de la relation : $cos(\theta) = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$:



Autres relations

l'égalité $cos^2 + sin^2 = 1$ fournit une définition du module :

$$|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$$

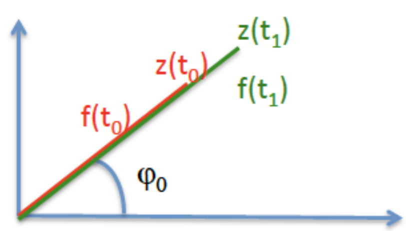
Cette relation a une interprétation géométrique en lien avec les précédentes : elle correspond simplement à la relation de Pythagore.

Propriété si deux complexes sont égaux, alors leurs modules et leurs arguments sont forcément égaux.

2 Evolution d'un complexe fonction du temps

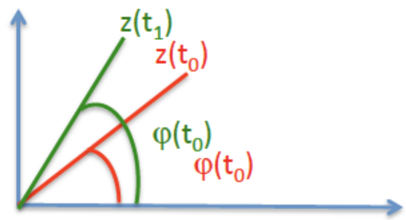
2.1 Effet d'une variation de son module à argument fixé

On envisage un complexe de la forme $z = f(t)e^{j\varphi_0}$ où le module $f(t)$ du complexe est une fonction croissante. Supposons par exemple que f soit une fonction croissante et que φ_0 sont une constante. Dans ce cas, l'évolution de z dans le plan complexe se fait avec un angle fixe par rapport à l'axe des réels et le complexe s'éloigne simplement de O à cause de la croissance de son module.



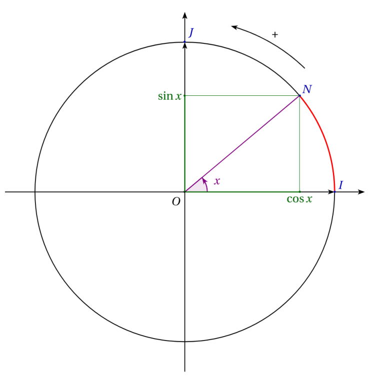
2.2 Effet d'une variation de son argument à module fixé

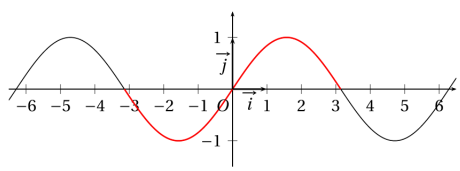
On envisage un complexe de la forme $z = z_0 e^{j\varphi(t)}$ où le module z_0 du complexe est constante. Supposons par exemple que $\varphi(t) = \omega t$. Dans ce cas, l'évolution de z dans le plan complexe se fait à une distance fixée de O et comme l'argument augmente linéairement avec le temps, l'angle $\varphi = \omega t$ croît avec le temps : le complexe tourne autour de O et décrit donc un cercle de rayon z_0.



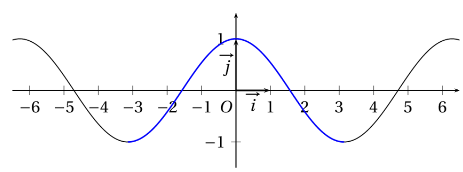
Remarque La grandeur ω décrit la "vitesse de croissance de l'angle φ" : on parle de vitesse angulaire. Au bout d'un temps T, le complexe z reprend sa valeur initiale, si $\omega T = 2\pi$. Et donc, si T est la période du mouvement, on a la relation : $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Cette relation traduit bien le fait que ω est une vitesse angulaire : c'est la vitesse à laquelle l'angle doit bouger pour parcourir un tour (2π) en une période (un temps T)

Remarque Soit une grandeur sinusoïdale $s(t) = s_0 sin(\omega t + \varphi_0)$. De nombreuses manipulations de cette grandeur sont compliquées par la nature particulière des fonctions sinusoïdales. Une approche bien plus élégante – et que l'on utilisera face à de nombreux problèmes – consiste à passer par les complexes. L'idée est d'associer à la grandeur réelle $x(t) = x_0 sin(\omega t + \varphi_0)$ une grandeur complexe $\underline{x(t)} = x_0 e^{j(\omega t + \varphi_0)}$ donc telle que $x(t) = Im(\underline{x(t)})$. Ainsi, dans l'exemple suivant, on illustre le fait que $sin(x) = Im(\underline{e^{jx}})$ et $cos(x) = Re(\underline{e^{jx}})$: les variations des fonction cos et sin peuvent être retrouvées simplement à l'aide des variations du complexe e^{jx}.





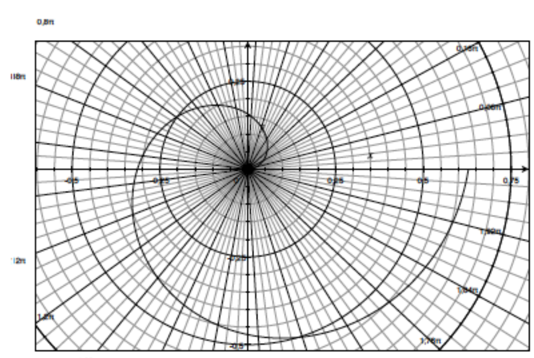
Représentation graphique de la fonction sinus



Représentation graphique de la fonction cosinus

2.3 Evolution dans le cas général

Le mouvement général est la composée de celui du à la variation du module (éloignement-rapprochement de O) et de celui dû à la variation de l'argument (rotation autour de O). Par exemple, l'évolution du complexe : $z = 2t.e^{3jt}$ est figurée ci-après :



TD : Outils mathématiques

CPES 1

Première partie

Généralités

1 Tracé d'allures

Quelques fonctions Donner les allures des fonctions suivantes :

$h(x) = x.e^{-x}$; $m(x) = \frac{1}{x} + x$; $n(x) = x + sinx$; $z(x) = z_0 sin^2\left(2\pi\frac{x}{L}\right)$; $y(x) = \frac{x}{x+x_0}$; $z(x) = z_0 e^{-x/x_0} cos(kx)$; $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$; $h_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$; $h_2(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$; $h_3(x) = a(1 - cos(kx))$.

Dilatations Comparer les graphes de $sinx$, $ksinx$ et $sin(kx)$

Charge d'un capteur capacitif La plupart des surfaces tactiles utilisent des capteurs capacitifs. La tension aux bornes d'un tel capteur, soumis à un échelon de tension est de la la forme : $U = E(1 - e^{-t/\tau})$

1 - Tracer l'allure de la fonction.

2 - Déterminer la pente initiale de la fonction.

3 - Déterminer l'expression de la fonction $h(t)$, tangente à $U(t)$ en $t = 0$. Tracer cette tangente sur le même graphe.

4 - On appelle temps de montée t_m la durée nécessaire pour que le signal passe de 10% de sa valeur finale à 90% de sa valeur finale. Exprimer t_m en fonction de τ.

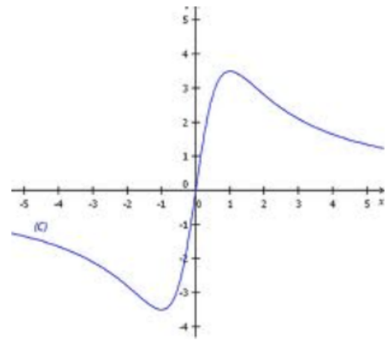
Impédance d'un dipôle On peut montrer qu'une bobine est caractérisée par une grandeur appelée impédance, dont le module est : $z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$.

1 - Tracer l'allure de ce module en fonction de ω pour ω variant de 0 à $+\infty$.

2 - Donner le domaine de ω dans lequel il est pertinent de considérer z comme une constante. Donner le domaine de ω dans lequel il est pertinent de considérer z comme une fonction linéaire.

2 Modèle de force non-linéaire

Soit un oscillateur non-linéaire caractérisé par la fonction suivante :



1. On souhaite modéliser cette courbe par la fonction $y(x) = \frac{kx}{x^2+x_0^2}$. Déterminer la position du maximum de cette fonction et la valeur de ce maximum. En utilisant la courbe, déterminer les valeurs numériques de k et x_0.

2. Déterminer le modèle affine de cette caractéristique au voisinage de $x = 3$.

3. Donner l'équation qui permet de savoir à quelle distance de ce point le modèle s'éloigne de la réalité de plus de $0,1$.

3 Détecteur de particules

Un détecteur de particules fournit un signal électrique de la forme : $V(t) = V_0 ln(1 + t/\tau)$ si $t < t_1$ et $V(t) = Ae^{-\lambda t}$si $t > t_1$.

1. Tracer l'allure de $V(t)$ sachant qu'elle est continue. A quoi correspondent respectivement τ et λ ? On précisera la valeur extrémale de $V(t)$. Déterminer A (on pourra noter V_1 un des intermédiaires de calcul).

2. Exprimer la dérivée temporelle de $V(t)$ en $t = 0$. Exprimer la dérivée seconde de $V(t)$ en $t = 0$. Existe-t-il un rapport entre ces deux grandeurs ?

3. Exprimer le temps de montée t_m défini comme le temps mis par le signal pour atteindre la moitié de sa valeur extrémale.

4. Montrer que la dérivée première de $V(t)$ n'est pas continue en t_1. Exprimer sa discontinuité $\dot{V}(t_1^+) - \dot{V}(t_1^-)$.

4 Régimes transitoires

Soit une tension dans un circuit décrite par la fonction $u(t) = u_0 cos(\omega t)$. On note $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ et $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$.

1 - Exprimer $\dot{u}(t)$, $\dot{u}(t = 0)$, $\ddot{u}(t)$ et $\ddot{u}(t = 0)$.

Soit maintenant une tension décrite par la fonction $u(t) = Acos(\omega t) + Bsin(\omega t)$.

2 - Exprimer $u(t=0)$, $\dot{u}(t)$, $\dot{u}(t=0)$. Sachant que $u(t=0)=0$ et $\dot{u}(t=0)=\dot{u}_0$, déterminer A et B. Tracer l'allure de cette fonction.

Soit maintenant une tension de la forme : $u(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}(Acos\Omega t + Bsin\Omega t)$.

3 - Exprimer $u(t=0)$, $\dot{u}(t)$, $\dot{u}(t=0)$. Sachant que $u(t=0)=0$ et $\dot{u}(t=0)=\dot{u}_0$, déterminer A et B. Tracer l'allure de cette fonction.

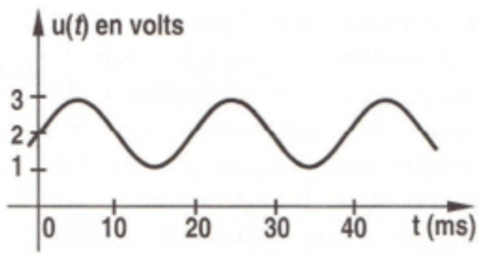
Soit maintenant une tension de la forme : $u(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} + Be^{-\frac{t}{\tau_2}}$.

4 - Exprimer $u(t=0)$, $\dot{u}(t)$, $\dot{u}(t=0)$. Sachant que $u(t=0)=0$ et $\dot{u}(t=0)=\dot{u}_0$, déterminer A et B. Tracer l'allure de cette fonction.

5 Fonctions sinusoïdales

Ecriture d'une fonction *Mise en forme*

1. Donner l'expression de la tension $u(t)$ dont le graphe est figuré ci-après. Déterminer sa valeur moyenne et la valeur efficace de sa composante alternative.

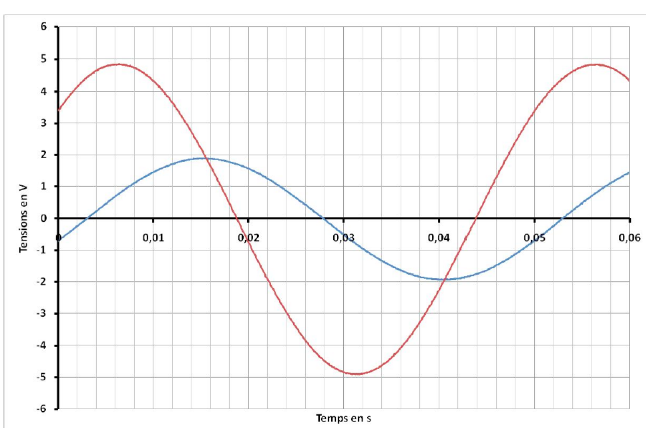


Problème inverse

Soit un signal sinusoïdal d'amplitude maximale 2 Volts, et de période 2 ms.

2. Tracer-le. Tracer sur le même schéma un signal sinusoïdal d'amplitude double et de fréquence double du précédent, initialement déphasé d'un quart de période.

Ecriture de deux fonctions Lorsqu'on alimente un transformateur, on observe en deux points du circuit les tensions suivantes, que l'on notera respectivement $u_1(t)$ (en rouge) et $u_2(t)$ (en bleu).



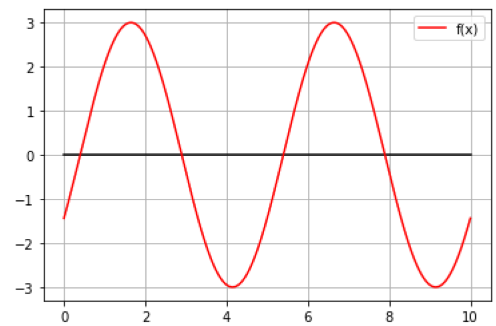
1. Déterminer la période et la pulsation des deux signaux : sont-ils synchrones ? Déterminer les amplitudes u_{20} et u_{10} des deux signaux.

2 - Déterminer de trois manières différentes la phase à l'origine du signal rouge si on l'écrit à l'aide d'une fonction sin. Déterminer de même, de trois manières différentes, la phase à l'origine du signal bleu, si on l'écrit à l'aide d'une fonction sin.

3. Déterminer le déphasage entre ces deux fonctions, en précisant bien quel signal est en avance par rapport à l'autre et en le reliant au signe du déphasage. Est-il cohérent d'avoir un déphasage différent de $\pi/2$ au vu des deux courbes ?

4. Ecrire les deux signaux $u_1(t)$ et $u_2(t)$ correspondants, en prenant comme origine des temps l'instant où $u_2(t)$ est maximale.

Ecritures d'une fonction Soit la fonction ayant le graphe suivant :

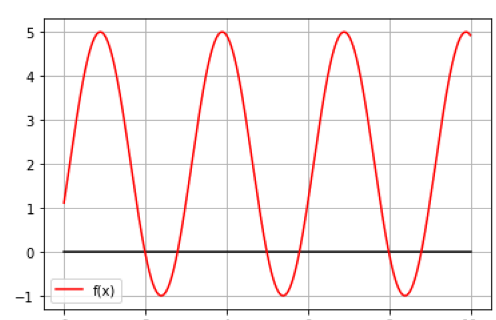


1 - Ecrire cette fonction à l'aide d'une fonction sin. On déterminera de trois manières différentes la phase à l'origine. Ecrire cette fonction à l'aide de l'argument $t - t_0$ où t_0 correspond à un instant d'annulation de la fonction.

2 - Ecrire cette fonction à l'aide d'une fonction cos. Ecrire cette fonction à l'aide de l'argument $t - t'_0$ où t'_0 correspond à un maximum de la fonction.

Fonction décalée **1 -** Reprendre les trois méthodes précédentes et déterminer S_0, S_1, ω et φ pour le signal suivant, écrit sous la forme : $f(t) = S_0 + S_1 sin(\omega t + \varphi)$.

2 - Ecrire la fonction à l'aide d'un cos.



Deuxième partie

Développements limités

6 Vérification

Vérifier les développements limités suivants et corriger les éventuelles erreurs : $\frac{1}{1+x} \sim 1-x$; $\frac{1}{a+x} \sim a - \frac{x}{a}$; $\frac{1}{a+x} \sim a-x$; $\frac{1}{(1+x)^{3/2}} \sim 1 + \frac{3x}{2}$; $\frac{1}{(d+x)^4} \sim d^4 - 4x$

7 Solution approchée

On cherche à résoudre l'équation algébrique suivante $k\frac{cos(x)}{(1-x)^2} = x$ où $k = 0{,}1$. En supposant que la solution est petite devant 1, linéariser l'équation précédente et en déduire une solution approchée de l'équation. Comparer cette solution à celle issue d'une résolution numérique exacte. Commenter.

8 Champ de gravité terrestre

Soit le champ de gravité terrestre $g(r) = g_0 R_T^2/r^2$.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 1 du champ de gravitation au voisinage de la surface terrestre en fonction de G, M_T, R_T et r. On supposera donc que $r - R_T << R_T$.

2. Tracer la fonction exacte et la fonction linéarisée en fonction de r. A-t-on tendance à sur ou à sous-estimer $g(r)$ en utilisant son développement limité ?

Troisième partie

Différentielles

9 Aire d'un disque

Soit un disque de rayon r. Si son rayon varie légèrement de dr, exprimer la variation de son aire, dA. Proposer une interprétation géométrique.

10 Champ de gravité terrestre

L'intensité du champ de gravité en fonction de r distance au centre de la Terre est $g(r) = g_0 R_T^2/r^2$ où g_0 est l'intensité du champ de gravité à la surface terrestre et R_T le rayon terrestre. On cherche à savoir s'il est pertinent de considérer le champ de gravité comme uniforme.

1. Exprimer la variation infinitésimale dg du champ de gravité pour une variation de distance dr au voisinage de R_T en fonction de g_0, R_T et dr uniquement.

2. Evaluer cette variation pour $dr = h = 30km$, sachant que $g_0 = 9,8m.s^{-2}$ et $R_T = 6,4.10^3 km$. Comparer cette variation à g_0. Commenter l'approximation $g(r) \sim g_0$.

Quatrième partie

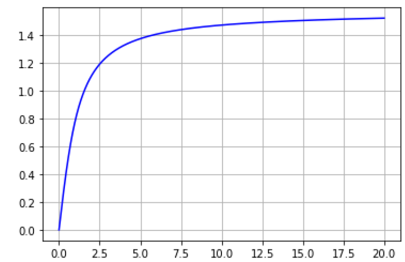
Nombres complexes

11 Passages

Soit un dipôle électrique caractérisé par un complexe $\underline{Z}$ appelé impédance, qui est de la forme : $\underline{Z} = R + j\omega L$.

1 - Exprimer le module Z de l'impédance $\underline{Z}$. Tracer $Z(\omega)$ en fonction de ω pour ω variant de 0 à $+\infty$.

2 - Exprimer l'argument φ de l'impédance. Tracer $\varphi(\omega)$ en fonction de ω pour ω variant de 0 à $+\infty$. On rappelle que la fonction $x \mapsto arctan(x)$ est :



3 - Exprimer le complexe $\underline{Z}$ sous forme géométrique.

4 - Représenter ce complexe dans le plan complexe si $Re(\underline{Z}) = 2$ et $Im(\underline{Z}) = 3$. Mesurer le module et l'argument sur cette représentation. Vérifier que l'on retrouve les valeurs théoriques obtenues avec les expressions précédentes.

12 Egalité entre deux complexes

Soit l'égalité : $A(x+jy) = Be^{jg}$ où A , B, x, y et g sont des réels.

- Exprimer B en fonction de B, x et y.
- Exprimer g en fonction de x et y
- Exprimer x en fonction de A, B et g. Exprimer y en fonction de A, B et g.

TD : Equations différentielles du premier ordre

Première partie

Analyse et résolution analytique d'équations linéaires

1 Quelques outils de base

1 - Pour les équations suivantes, après avoir déterminer la solution, tracer l'allure de la solution en exhibant les valeurs et les pentes d'intérêt (valeur initiale, valeur finale, pente initiale)

— $y'-4y = 0$ avec $y(t = 2) = 9$

— $y' + 7y = 9$ avec $y(t = 0) = 0$

Soit une grandeur $y(t)$ vérifiant l'équation différentielle : $\dot{y} + \frac{y}{\tau} = 0$, avec $y(t = 0) = y_0$

2 - On cherche une solution de la forme : $y = \lambda e^{rt}$. Réinjecter cette fonction dans l'équation. En déduire r. Réinjecter cette fonction dans la condition initiale. En déduire λ. Tracer la fonction solution $y(t)$.

Soit une grandeur $y(t)$ vérifiant l'équation différentielle : $\dot{y} + \frac{y}{\tau} = \alpha$, avec $y(t = 0) = 0$

3 - On cherche une solution de la forme : $y = \lambda e^{rt} + b$. Réinjecter cette fonction dans l'équation. En identifiant les fonctions qui dépendent du temps et les constantes, déduire r et b. Réinjecter cette fonction dans la condition initiale. En déduire λ. Tracer la fonction solution $y(t)$.

2 Phase d'accélération d'un TGV, modèle simple

Soit un TGV de masse m soumis à une force F_0 et à un frottement fluide linéaire, en $-bv$.

1. Donner l'équation qui régit sa vitesse $v(t)$.
2. Déterminer l'allure et les grandeurs pertinentes de $v(t)$ si la vitesse initiale est nulle. Même question si la vitesse initiale est v_0.
3. Retrouver ces caractéristiques par une résolution analytique de l'équation dans les deux cas.

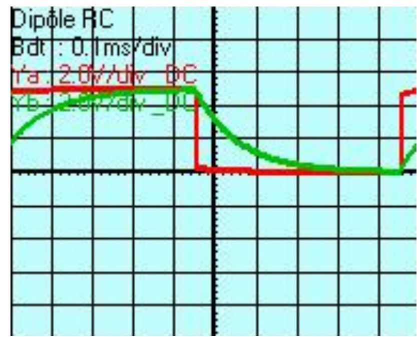
3 Extraction de données à partir d'une courbe expérimentale

Soit un système dont une grandeur notée $u(t)$ est régie par une équation différentielle d'ordre 1 à coefficient constant, avec un second membre nul à partir d'un instant t_0. L'évolution de cette grandeur est donnée par le graphe ci-après.

1. Déterminer t_0 et donner la condition initiale sur $u(t)$.

2. Déterminer le temps typique de décroissance τ.

3. Ecrire $u(t)$.



4 Démarrage d'une voiture

Une voiture M initialement immobile suit la voiture qui la précède, qui démarre à la vitesse v_0 à l'instant $t = 0$. La vitesse de M est continue. On admet que l'équation différentielle qui régit le comportement de M est tel que, pour $t < \tau_1$: $\tau_2 \frac{dv}{dt} + v = 0$

1. Montrer que dans cet intervalle, la solution de cette équation est $v(t) = 0$. A quoi correspond τ_1 ?

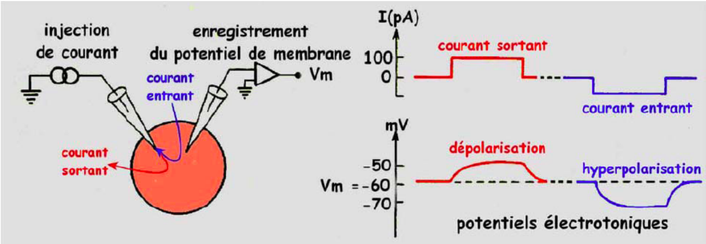
Pour $t > \tau_1$, on admet que l'équation différentielle est de la forme : $\tau_2 \frac{dv}{dt} + v = v_0$.

2. Résoudre l'équation différentielle dans cet intervalle, en prenant garde à la continuité de v et à la date des conditions initiales. Tracer l'allure de $v(t)$ dans les deux intervalles. A quoi correspond τ_2 ?

3. Déterminer la position de M, $x(t)$, en fonction du temps.

5 Comportement de la membrane d'un axone

La membrane neuronale est constituée d'une bicouche lipidique à travers laquelle des ions peuvent circuler par l'intermédiaire de canaux dits canaux ioniques. Cette circulation d'ions correspond à un courant électrique, à travers les canaux ioniques. Dans une première expérience, on impose un courant transmembranaire en forme d'échelon et on mesure la tension transmembranaire induite par cet échelon.



La durée totale de l'échelon de courant sortant est 4ms. A l'aide de ces courbes expérimentales, on cherche à déterminer l'équation différentielle qui régit le comportement de la tension transmembranaire $V(t)$.

1. D'après les graphes précédents, proposer une expression pour $V(t)$ dans la partie dépolarisation. On introduira tous les paramètres pertinents nécessaires et on les estimera sur le graphe.

2. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $V(t)$ dans cette partie.

3. On suppose que la dépolarisation est stoppée à une date $t_S = 3\tau$ et que $V(t)$ est alors régie par la même équation que précédemment, mais sans second membre. Déterminer $V(t)$ pour $t > t_S$ en supposant que $V(t)$ est continue en t_S.

Deuxième partie

Analyse qualitative d'équations non-linéaires

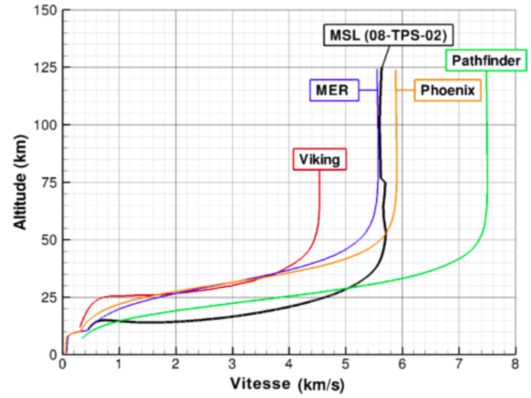
6 Autre modèle de l'accélération d'un TGV

Soit un TGV de masse m soumis à une force F_0. On prend en compte une force de frottement en $-kv^2$.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$.
2. Déterminer l'allure et les grandeurs pertinentes de $v(t)$ solution de cette équation pour $v(t = 0) = 0$ (valeur asymptotique, pente initiale, temps typique d'évolution).
3. Même question si la vitesse initiale est v_0.

7 Modèle d'atterrissage sur Mars

Voici quelques courbes donnant l'altitude en fonction de la vitesse de quelques sondes envoyées sur Mars.



1. Dans quel sens sont parcourues ces courbes pendant l'atterrissage ? Identifier l'altitude z_0 en deça de laquelle on ne peut pas négliger les frottements de l'atmosphère.

Soit une sonde de masse m. A l'issue de la première phase, la sonde a une vitesse v_0, une altitude z_0. On suppose que la force de frottements peuvent se mettre sous la forme $F_f = -bv^3$. On considère le champ de gravité comme uniforme de norme g_m.

2. Donner la dimension du terme b. A quoi correspond-il physiquement (que signifie avoir un grand b ou au contraire avoir un petit b) ?

3. Donner l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $v(t)$.

4. Prévoir le comportement et l'allure de $v(t)$. Construire les grandeurs typiques de son évolution : valeur asymptotique, pente initiale, temps typique d'évolution. On se placera pour le tracé de l'allure dans le cas où $v_0 > v_{lim}$.

5. En déduire l'allure de $z(t)$ puis celle de $v(z)$. Commenter l'accord avec le graphe.

TD : Outils mathématiques

Corrigé

Première partie

Généralités

1 Tracé d'allures

Cf. calculatrice

Charge d'un capteur capacitif **1 -** Cf. calculatrice.

2 - La pente initiale de la fonction est la valeur initiale de la dérivée. Or : $U = E(1-e^{-t/\tau})$ donc $\boxed{\frac{dU}{dt} = \frac{E}{\tau}e^{-t/\tau}}$

qui vaut en $t = 0$: $\boxed{\left(\frac{dU}{dt}\right)_{t=0} = \frac{E}{\tau}}$

3 - L'expression de la fonction $h(t)$, tangente à $U(t)$ en $t = 0$ est donnée en adaptant la formule générale de la tangente d'une fonction f de l'argument x en un point x_0 : $f(x) \simeq t(x) = f(x_0) + (x - x_0).\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}$

Ce qui donne ici : $\boxed{U(t) \simeq h(t) = f(0) + (t-0).\left(\frac{df}{dt}\right)_0 = 0 + \frac{E}{\tau}t}$

qui est bien tangente à $U(t)$ en $t = 0$.

4 - Si l'on note t_{10} le temps pour que $U(t)$ atteigne 10% de sa valeur maximale qui est E, on a par définition :

$U(t_{10}) = \frac{E}{10} = E.(1 - e^{-t_{10}/\tau})$

et de même : $U(t_{90}) = \frac{9E}{10} = E.(1 - e^{-t_{90}/\tau})$

dont les inversions donnent : $t_{10} = -\tau ln\frac{9}{10}$ et $t_{90} = -\tau ln\frac{1}{10}$.

Par définition : $\boxed{t_m = t_{90} - t_{10} = \tau ln9}$

Impédance d'un dipôle **1 -** Tracer l'allure de ce module en fonction de ω pour ω variant de 0 à $+\infty$.

2 - Le domaine de ω dans lequel il est pertinent de considérer z comme une constante correspond à la situation pour laquelle le terme en $\omega^2 L^2 \ll R^2$ donc si : $\boxed{\omega \ll \frac{R}{L} = \omega_C}$; dans ce cas : $\boxed{z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \simeq \sqrt{R^2} = R}$

Au contraire, le domaine de ω dans lequel il est pertinent de considérer z comme une fonction linéaire correspond à la situation pour laquelle le terme $\omega^2 L^2 \gg R^2$ donc $\boxed{\omega \gg \frac{R}{L} = \omega_C}$

dans ce domaine : $\boxed{z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \simeq \sqrt{\omega^2 L^2} = \omega L}$

2 Modèle de force non-linéaire

1. Pour déterminer le maximum de la fonction $y(x) = \frac{kx}{x^2+x_0^2}$, il suffit de voir quand sa dérivée s'annule :

$\frac{dy}{dx} = k\frac{(x^2+x_0^2)-2x^2}{(x^2+x_0^2)^2}$ qui s'annule clairement quand $\boxed{x = x_0}$

La valeur du maximum est donc $\boxed{y(x_0) = \frac{k}{2x_0}}$.

On voit sur la courbe que le max est atteint en $x = x_0 = 1$ ce qui donne la valeur de x_0 et on voit que ce max vaut $y_{max} = 3,5 = \frac{k}{2\times 1}$ donc $\boxed{k = 7}$

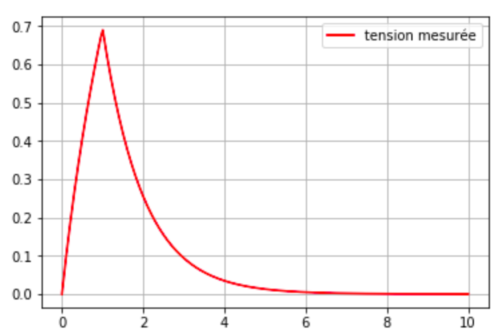
2. Pour déterminer le modèle affine de cette caractéristique au voisinage de $x = 3$, on utilise l'équation de la tangente : $t(x) = y'(x_1).(x - x_1) + y(x_1)$ pour $\boxed{x_1 = 3}$

- soit on utilise l'expression de $y(x)$ avec les valeurs de k et de x_0 déterminées précédemment et on a : $\boxed{y(x_1 = 3) = 2}$ et $\boxed{y'(x_1) = -0,56}$
- Soit on utilise le graphe, on voit que $\boxed{y(x_1 = 3) = 2}$ et que $\boxed{y'(x_1) = -0,6}$. Donc, le modèle affine de la fonction au voisinage de $x_1 = 3$ est $\boxed{t(x) = -0,6.(x-3) + 2}$

3. L'équation qui permet de savoir à quelle distance de ce point la modélisation s'aloigne de la réalité de plus de 0,1 correspond à rechercher la solution de l'équation $y(x) - t(x) = 0,1$ i.e. $\boxed{y(x) - t(x) = \frac{7x}{x^2+1} + 0,6.(x-3) - 2 = 0,1}$

3 Détecteur de particules

1. L'allure de $V(t)$ est une juxtaposition d'une fonction *log* croissante et d'une fonction en exponentielle décroissante, telle qu'elle soit continue à la jonction :



τ correspond au temps typique de variation de la fonction dans sa partie croissante (c'est-à-dire au temps nécessaire pour que l'argument du ln passe de 1 à 2)

et λ est l'inverse du temps typique de décroissance de l'exponentielle, c'est-à-dire qu'à partir d'un temps égal à quelques $1/\lambda$, l'argument de l'exponentielle sera grand devant 1 et l'exponentielle sera faible.

La valeur extrémale de $V(t)$ est la valeur en t_1 $V(t_1) = V_1 = V_0 ln(1 + t_1/\tau)$

Pour déterminer A, on écrit la continuité de la fonction en t_1, ce qui donne : $V(t_1) = V_1 = V_0 ln(1+t_1/\tau) = Ae^{-\lambda t_1}$

Donc :

$A = V_1 e^{\lambda t_1}$

Ainsi, on a bien une fonction $V(t)$ qui s'écrit pour $t > t_1$ sous la forme :

$\boxed{V(t) = V_1 e^{-\lambda(t-t_1)}}$

dont on voit bien qu'elle voit V_1 en $t = t_1$.

2. La dérivée temporelle de $V(t)$ en $t = 0$ vaut :

$\boxed{\dot{V}(t=0) = \left(\frac{dV}{dt}\right)_{t=0} = \frac{V_0}{\tau}\left(\frac{1}{1+t/\tau}\right)_{t=0} = \left(\frac{V_0}{\tau+t}\right)_{t=0} = \frac{V_0}{\tau}}$

La dérivée seconde de $V(t)$ en $t = 0$ est :

$\boxed{\ddot{V}(t=0) = \left(\frac{d^2V}{dt^2}\right)_{t=0} = \left(\frac{-V_0}{(\tau+t)^2}\right)_{t=0} = \frac{-V_0}{\tau^2}}$

Il n'y a aucun rapport entre ces deux grandeurs : la dérivée d'une fonction en un point n'a rien à voir avec la valeur de cette fonction en ce point. On peut par exemple tout à fait envisager une fonction nulle en un point dont la dérivée en ce point est non-nulle.

3. Le temps de montée t_m défini comme le temps mis par le signal pour atteindre la moitié de sa valeur extrémale est donc donné par la relation :

$V(t_m) = V_0 ln(1 + t_m/\tau) = \frac{V_1}{2}$

Ce qui donne :

$\boxed{t_m = \tau\left(exp\left(\frac{V_1}{2V_0}\right) - 1\right)}$

4. La dérivée première de $V(t)$ pour t_1^- (le $-$ fait référence au fait que l'on se place "juste avant t_1") vaut :

$\dot{V}(t = t_1^-) = \left(\frac{dV}{dt}\right)_{t=t_1} = \frac{V_0}{\tau}\left(\frac{1}{1+t/\tau}\right)_{t_1^-} = \frac{V_0}{\tau+t_1}$

La dérivée première de $V(t)$ pour t_1^+ (le $+$ fait référence au fait que l'on se place "juste après t_1") vaut :

$\dot{V}(t = t_1^+) = -\lambda V_1 e^{-\lambda(t_1-t_1)} = -\lambda V_1$

A priori, ces deux valeurs n'ont aucune raison d'être égales : la dérivée de $V(t)$ n'est pas continue en t_1 (c'est d'ailleurs ce que l'on voit sur le graphe : la pente de la fonction n'est pas continue en t_1)

La discontinuité de cette grandeur vaut :

$\boxed{\dot{V}(t = t_1^+) - \dot{V}(t = t_1^-) = -\lambda V_1 - \frac{V_0}{\tau+t_1}}$

4 Régimes transitoires

1 - On a donc :

$\boxed{\dot{u}(t) = -\omega u_0 sin(\omega t)}$, donc

$\boxed{\dot{u}(t=0) = 0}$

et $\boxed{\ddot{u}(t) = -\omega^2 u_0 cos(\omega t)}$

et donc $\boxed{\ddot{u}(t=0) = -\omega^2 u_0}$

On retrouve le fait que la valeur de la dérivée d'une fonction en un point n'a rien à voir avec la valeur de cette fonction en ce point.

Soit maintenant une tension décrite par la fonction $u(t) = Acos(\omega t) + Bsin(\omega t)$.

2 - On a donc :

$u(t=0) = A$

$\dot{u}(t) = -\omega Asin(\omega t) + B\omega cos(\omega t)$

et donc : $\dot{u}(t=0) = 0 + B\omega$.

Sachant que $u(t=0) = 0 = A$

et $\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 = B\omega$

Ce qui donne : $A = 0$ et $B = \frac{\dot{u}_0}{\omega}$

Ainsi la fonction recherchée est :

$\boxed{u(t) = \frac{\dot{u}_0}{\omega} sin(\omega t)}$

L'allure de cette fonction est une sinusoïde de valeur initiale nulle.

Soit maintenant une tension de la forme : $u(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}(Acos\Omega t + Bsin\Omega t)$.

3 - On a :

$u(t=0) = A$

ensuite, on a (il faut faire la dérivée d'une somme de deux produits, ce qui donne quatre termes) :

$\dot{u}(t) = -e^{-\frac{t}{\tau}} A\Omega sin\Omega t - \frac{A}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} cos\Omega t + e^{-\frac{t}{\tau}} B\Omega cos\Omega t - \frac{B}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} sin\Omega t$

Si on évalue cette fonction en $t = 0$, on a :

$\dot{u}(t=0) = \frac{A}{\tau} + B\Omega$.

Sachant que $u(t=0) = 0 = A$

et $\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 = \frac{A}{\tau} + B\Omega$

ce qui donne : $A = 0$ et $B = \frac{\dot{u}_0}{\Omega}$

La fonction recherchée est donc :

$\boxed{u(t) = \frac{\dot{u}_0}{\Omega} e^{-\frac{t}{\tau}}(sin\Omega t)}$

Soit maintenant une tension de la forme : $u(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} + Be^{-\frac{t}{\tau_2}}$.

4 - On a : $u(t=0) = A + B$

ensuite : $\dot{u}(t) = -\frac{A}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{B}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}}$

donc : $\dot{u}(t=0) = -\frac{A}{\tau_1} - \frac{B}{\tau_2}$.

Sachant que $u(t=0) = 0 = A + B$

et $\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 = -\frac{A}{\tau_1} - \frac{B}{\tau_2}$

La première équation donne : $B = -A$, qui, réinjectée dans la deuxième donne : $\dot{u}_0 = -\frac{A}{\tau_1} + \frac{A}{\tau_2}$ ce qui donne : $A = \frac{\dot{u}_0 \tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}$

Donc : $B = -\frac{\dot{u}_0 \tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}$

Donc la fonction étudiée est : $\boxed{u(t) = \frac{\dot{u}_0 \tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}\left(e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)}$

La fonction est nulle à $t = 0$, puis croissante si $\dot{u}_0 > 0$, elle atteint un max puis tend vers 0.

5 Fonctions sinusoïdales

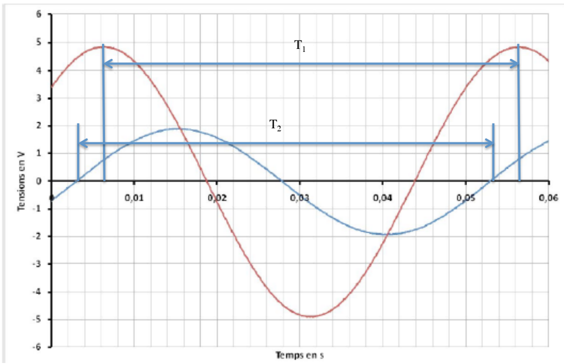
Ecriture d'une fonction **1.** $u(t)$ est une sinusoïde de valeur moyenne $u_{moy} = 2V$, d'amplitude $u_0 = 1V$, de période $T = 20ms$ et qui commence à sa valeur moyenne. Pour toutes ces raisons, on peut la mettre sous la forme :

$\boxed{u(t) = u_{moy} + u_0 sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}$

2. Sa valeur moyenne est égale à $\boxed{u_{moy}}$ car la moyenne du sin est nulle.

3. La valeur efficace de sa composante alternative est $\boxed{u_0/\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}}$

Ecriture de deux fonctions



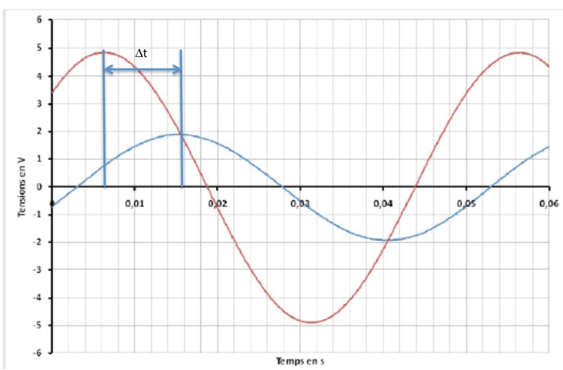
1. Les périodes se lisent sur le graphe : $\boxed{T_1 = 0,05s}$ et $\boxed{T_2 = 0,05s}$. Les deux signaux ont même période. La pulsation associée est :

$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,05} = 40\pi = 122rad.s^{-1}}$

2. Le signal rouge est en avance sur le bleu. Si l'on note Δt l'avance temporelle de rouge par rapport à bleu, on peut mesurer : $\boxed{\Delta t = 0,01s}$.

Et on a donc un déphasage :

$\boxed{\varphi_{SE} = \frac{2\pi\Delta t}{T} = \frac{2\pi 0,01}{0,05} rad}$



Il est cohérent d'avoir un déphasage inférieur à $\boxed{\pi/2}$ au vu des deux courbes, car la courbe bleu atteint son maximum avant que la courbe rouge n'atteigne 0.

3. Les amplitudes se lisent directement sur le graphe $\boxed{u_{20} = 5V}$ pour le rouge et $\boxed{u_{10} = 2V}$ pour le bleu.

Deuxième partie
Développements limités

6 Vérification

Les développements limités corrects sont :
$\frac{1}{1+x} \sim 1 - x$; $\frac{1}{a+x} \sim \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2}$; $\frac{1}{(1+x)^{3/2}} \sim 1 - \frac{3x}{2}$

On vérifie notamment sur la deuxième formule que le développement limité ne change pas l'homogénéité d'une formule.

7 Solution approchée

On effectue les développements limités des diverses fonctions : $cos x \sim 1$, $(1-x)^{-2} \sim 1 + 2x$

donc le développement du terme de gauche donne $k\frac{cos(x)}{(1-x)^2} \sim k(1+2x) = x$ donc

$\boxed{x = \frac{k}{1-2k} = \frac{0,1}{0,8} = 0,12}$

On peut comparer cette solution à la solution issue d'une résolution numérique exacte qui est $\boxed{x = 0,13}$. On a un résultat relativement proche : le développement limité est satisfaisant.

8 Champ de gravité terrestre

1. Le champ de gravité terrestre est $g(r) = g_0 R_T^2/r^2$. Pour faire le développement limité à l'ordre 1 de ce champ au voisinage de la surface terrestre, on fait apparaître une grandeur petite devant en utilisant le fait que $r - R_T << R_T$.

$g(r) = \frac{g_0 R_T^2}{r^2} = \frac{g_0 R_T^2}{(R_T + r - R_T)^2} = \frac{g_0 R_T^2}{R_T^2\left(1+\frac{r-R_T}{R_T}\right)^2} \sim \frac{g_0 R_T^2}{R_T^2}\left(1 - 2\frac{r-R_T}{R_T}\right) = g_0\left(1 - 2\frac{r-R_T}{R_T}\right)$

$\boxed{g(r) \sim g_0\left(1 - 2\frac{r-R_T}{R_T}\right)}$

2. On approxime une fonction en r^{-2} par sa fonction tangente. Or vu la courbure de r^{-2}, sa tangente est sous la courbe : on a donc tendance à sous-estimer la norme de $g(r)$ en en faisant le développement limité à l'ordre 1.

Troisième partie
Différentielles

9 Aire d'un disque

On a $A = \pi r^2$ dont la différentielle est $\boxed{dA = 2\pi r dr}$. On peut interpréter cela en comprenant que $2\pi r$ est le périmètre du cercle et que dA correspond donc à l'aire du bandeau d'épaisseur dr que l'on peut plaquer sur ce périmètre de sorte à augmenter le rayon de dr.

10 Champ de gravité terrestre

1. La variation infinitésimale dg est donc $\boxed{dg = \frac{dg}{dr}dr = -g_0\frac{2R_T^2}{r^3}dr}$

2. Pour $dr = h = 30km$, on a $\boxed{dg = 10^{-3}S.I.}$. Comparée à g_0, cette variation est négligeable : l'approximation $g(r) \sim g_0$ est une bonne approximation.

Quatrième partie

Nombres complexes

11 Passages

1 - Le module Z de l'impédance $\underline{Z}$ est : $\boxed{Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$

Pour le tracé, cf. calculatrice.

2 - L'argument φ de l'impédance est tel que : $tan(\varphi) = \frac{Im(\underline{Z})}{Re(\underline{Z})} = \frac{\omega L}{R}$

Donc : $\boxed{\varphi = tan^{-1}(\frac{\omega L}{R})}$

Pour le tracé, c'est l'opposé de la fonction tan^{-1}

3 - D'après ce qui précède, on a :

$\boxed{\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} e^{jtan^{-1}(\frac{\omega L}{R})}}$

.

4 - La représentation de ce complexe procède du cours de terminale.

On doit trouver :

$\boxed{Z = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}}$

et $\boxed{\varphi = tan^{-1}(\frac{3}{2})}$

12 Egalité entre deux complexes

- On a B qui est le module du complexe de droite, donc qui doit être égal au module du complexe de gauche, ce qui est : $\boxed{B = A\sqrt{x^2 + y^2}}$
- g est l'argument du complexe de droite, il doit donc être égal à l'argument de celui de gauche, donc : $\boxed{g = tan^{-1}(\frac{Ay}{Ax}) = tan^{-1}(\frac{y}{x})}$
- Ax est la partie réelle du complexe de gauche, donc $Ax = Bcos(g)$ donc : $\boxed{x = \frac{B}{A}cos(g)}$
- De même Ay est la partie imaginaire du complexe de gauche, donc : $Ay = Bsin(g)$ donc : $\boxed{y = \frac{B}{A}sin(g)}$

TD : Equations différentielles du premier ordre

Corrigé

Première partie

Analyse et résolution analytique d'équations linéaires

1 Equations différentielles linéaires

Equation 1

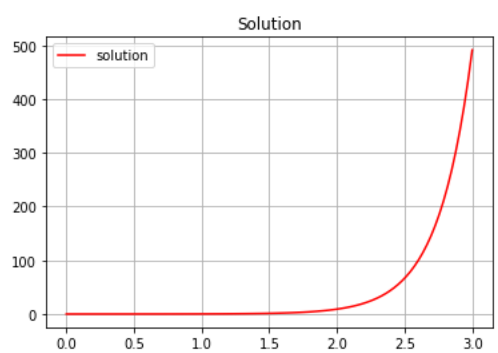
La solution de $y'-4y=0$ est de la forme : $y = ke^{4t}$

Avec $y(t=2)=9$, cela impose $y(2)=ke^{8}=9$

donc : $k=9e^{-8}$

donc :

$\boxed{y = 9e^{(4t-8)}}$



Equation 2

La solution de $y' + 7y = 9$ est la somme :

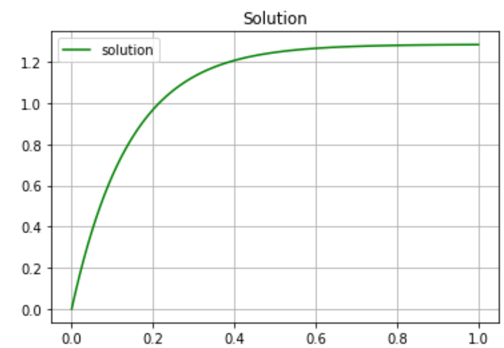
— de la solution particulière, y_P qui est de la même forme que le second membre, qui est une constante, donc on cherche une solution constante, i.e. y_P telle que $y'_P = 0$, ce qui donne l'équation $y_P' + 7y_P = 9$ donc $y_P = 9/7$

— de la solution y_H de l'équation homogène, i.e. $y_H' + 7y_H = 0$, i.e. $y_H = ke^{-7t}$

— Donc la solution est : $y = y_P + y_H = 9/7 + ke^{-7t}$

— Or $y(t=0)=0$, ce qui impose : $y(0) = 0 = 9/7 + k$ donc $k = -9/7$ et finalement :

$\boxed{y = 9/7(1-e^{-7t})}$



2 Phase d'accélération d'un TGV, modèle simple

1. L'équation qui régit sa vitesse $v(t)$ est :

$\boxed{m\frac{dv}{dt} = F_0 - bv}$

2. Si la vitesse initiale est nulle :

— aux temps courts l'équation est environ $m\frac{dv}{dt} \sim F_0$, ce qui donne une vitesse qui évolue en $\frac{dv}{dt} \sim \frac{F_0}{m}$, i.e. $v \sim \frac{F_0}{m}t + cste$ or la constante est nulle, parce que la vitesse est nulle initialement.

— Ensuite, le terme en bv augmente et la vitesse augmente de moins en moins vite jusqu'à atteindre un état d'équilibre dynamique entre les deux termes qui correspond à une vitesse donnée par $m\frac{dv}{dt} = 0 = F_0 - bv_{lim}$ i.e. $v_{lim} = \frac{F_0}{b}$ dont les dépendances sont logiques.

— Pour atteindre cette vitesse limite, on écrit que le temps typique est le temps nécessaire pour atteindre v_{lim} en partant de $v(0)=0$ avec une pente $\frac{F_0}{m}$, i.e. $\tau = \frac{v_{lim}-0}{\frac{F_0}{m}} = \frac{m}{b}$

Si la vitesse initiale est v_0 :

— aux temps courts l'équation est environ $m\frac{dv}{dt} \sim F_0 - bv_0$, ce qui donne une vitesse qui évolue en $\frac{dv}{dt} \sim \frac{F_0 - bv_0}{m}$, i.e. $v \sim \frac{F_0-bv_0}{m}t + cste$ or la vitesse est v_0 initialement, donc $v \sim \frac{F_0-bv_0}{m}t + v_0$.

— Ensuite, le terme en bv augmente et la vitesse augmente de moins en moins vite jusqu'à atteindre un état d'équilibre dynamique entre les deux termes qui correspond à une vitesse donnée par $m\frac{dv}{dt} = 0 = F_0 - bv_{lim}$ i.e. $v_{lim} = \frac{F_0}{b}$ dont les dépendances sont logiques.

— Pour atteindre cette vitesse limite, on écrit que le temps typique est le temps nécessaire pour atteindre v_{lim} en partant de $v(0) = v_0$ avec une pente $\frac{F_0-bv_0}{m}$, i.e. $\tau = \frac{v_{lim}-v_0}{\frac{F_0-bv_0}{m}} = \frac{m}{b}$ i.e. le même temps que précédemment.

3. On peut retrouver ces caractéristiques par une résolution analytique :

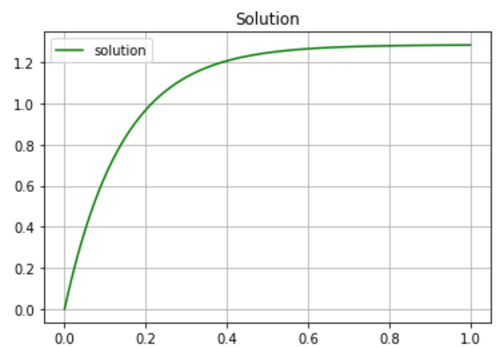
— La solution de $m\frac{dv}{dt} = F_0 - bv$ est la somme de la solution particulière $v_P = F_0/b$ et de la solution de l'équation homogène associée $v_H = ke^{-t/\tau'}$ avec $\tau' = m/b$. On a donc : $v = \frac{F_0}{b} + ke^{-t/\tau'}$

— Si $v(0) = 0$, cela implique $0 = \frac{F_0}{b} + k$ donc $k = -\frac{F_0}{b}$, ce qui donne $v = \frac{F_0}{b}(1 - e^{-t/\tau'})$

— Si $v(0) = v_0$, cela implique $v_0 = \frac{F_0}{b} + k$ donc $k = v_0 - \frac{F_0}{b}$, ce qui donne

$$\boxed{v = \frac{F_0}{b} + (v_0 - \frac{F_0}{b})e^{-t/\tau'}}$$

Toutes ces évolutions sont cohérentes avec les analyses qualitatives précédentes, et notamment avec le fait que le temps typique d'évolution n'est pas une fonction des conditions initiales.



3 Extraction de données à partir d'une courbe expérimentale

1. Le signal $u(t)$ est une exponentielle décroissante, qui comme à décroître en un instant t_0, donc elle est de la forme

$$\boxed{u = u_0 e^{-(t-t_0)/\tau}}$$

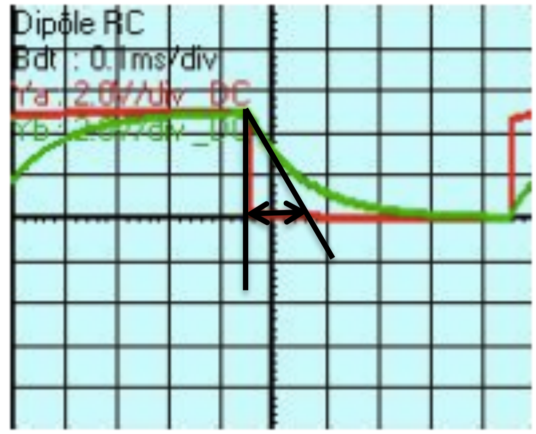
Or t_0 est négatif sur le graphe et il correspond environ à un 1/2 carreau, donc

$$\boxed{t_0 = -0,05ms}$$

2. A l'aide du graphe, l'amplitude est 2,5 carreaux donc

$$\boxed{u_0 = 5V}$$

Pour le temps typique de décroissance, on utilise la méthode de la tangente à l'origine, mais il faut faire attention à l'origine des temps.



Sur le graphe, on lit une intersection qui a lieu 1 carreau après le début de la décroissance, donc $\tau = 0,1ms$.

3. On a $u(t) = u_0 e^{-(t-t_0)/\tau}$ qui est bien solution d'une équation de la forme :

$$\boxed{\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = 0 \text{ avec } u(t=t_0) = u_0}$$

4 Démarrage d'une voiture

1. La solution de cette équation est $v(t) = \lambda e^{-t/\tau_2}$. Comme la voiture est initialement immobile, $v(t=0) = 0 = \lambda$ ce qui donne :

$$\boxed{v(t) = 0}$$

2. L'équation différentielle dans cet intervalle a pour solution :

$v(t) = v_P + v_H = v_0 + \lambda e^{-t/\tau_2}$

On sait ensuite que $v(\tau_1) = 0 = v_0 + \lambda e^{-\tau_1/\tau_2}$ ce qui donne : $-v_0 e^{\tau_1/\tau_2} = \lambda$

Et donc :

$$\boxed{v(t) = v_P + v_H = v_0(1 - e^{-(t-\tau_1)/\tau_2})}$$

Remarque on aurait pu, sachant que la condition initiale était donnée en τ_1, directement écrire une solution adaptée, qui donne une constante d'intégration plus simple à déterminer et poser directement :

$v(t) = v_P + v_H = v_0 + \lambda' e^{-(t-\tau_1)/\tau_2}$

On détermine ensuite la constante d'intégration avec la condition initiale, ce qui donne :

$v(\tau_1) = 0 = v_0 + \lambda'$ ce qui donne $-v_0 = \lambda'$

et on retrouve directement le même résultat que précédemment :

$v(t) = v_P + v_H = v_0(1 - e^{-(t-\tau_1)/\tau_2})$

Analyse

— τ_2 correspond au temps typique d'accélération de la voiture

— τ_1 correspond visiblement au temps qu'il a fallu attendre pour que le conducteur décide de démarrer : c'est le temps de réaction du conducteur.

3. La position de M, $x(t)$, est donnée par l'intégration de $\frac{dx}{dt} = v = v_0(1 - e^{-(t-\tau_1)/\tau_2})$

Ce qui donne : $x = v_0(t + \tau_2 e^{-(t-\tau_1)/\tau_2}) + cste$

On détermine la constante en écrivant que $x(t=0) = 0 = v_0\tau_2 e^{\tau_1/\tau_2} + cste$

Ce qui donne :

$x = v_0(t + \tau_2 e^{-(t-\tau_1)/\tau_2}) - v_0\tau_2 e^{\tau_1/\tau_2}$

Donc finalement :

$$\boxed{x = v_0(t + \tau_2\left(e^{-(t-\tau_1)/\tau_2} - 1\right))}$$

5 Comportement de la membrane d'un axone

1. D'après les graphes, on peut proposer comme expression pour $V(t)$:

$$V(t) = V_f + (V_m - V_f)e^{-t/\tau}$$

où V_m est la valeur initiale, V_f la valeur finale et τ le temps typique d'évolution de l'exponentielle.

2. L'équation différentielle vérifiée par $V(t)$ dans cette partie est donc forcément de la forme :

$$\tau\frac{dV}{dt} + V = V_f$$

avec $V(t=0) = V_m$ comme condition initiale.

3. Si la dépolarisation est stoppée à une date $t_S = 3\tau$, la valeur de $V(t)$ est alors : $V(t_S) = V_f + (V_m - V_f)e^{-t_S/\tau}$

Si $V(t)$ est alors régie par la même équation que précédemment, mais sans second membre, on a :

$\boxed{\tau\frac{dV}{dt} + V = 0 \text{ avec } V(t_s) = V(t_s)}$

On a une solution de la forme $V(t) = \lambda e^{-t/\tau}$. Mais comme on a une condition initiale en t_s, il vaut mieux l'écrire sous la forme : $V(t) = \lambda e^{-(t-t_s)/\tau}$

Et on utilise alors la condition initiale, ce qui donne :

$V(t_s) = \lambda$

Et donc :

$\boxed{V(t) = V(t_s)e^{-(t-t_s)/\tau}}$

Numériquement : A l'aide du graphe, on voit qu'en régime permanent, l'augmentation de ddp vaut : $V_f - V_m = 10mV$. Le temps typique de mise en place de cette ddp est de l'ordre de $\tau = 1ms$ d'après le graphe.

Deuxième partie

Analyse qualitative et semi-quantitative d'équations non-linéaires

6 Modèle plus élaboré

1. On a l'équation différentielle, d'après le PFD :

$\boxed{m\frac{dv}{dt} = F_0 - kv^2}$

2. Si la vitesse initiale est nulle :

- A $t = 0$, la vitesse est nulle pendant un moment, par continuité, donc l'équation différentielle se simplifie en : $m\frac{dv}{dt} \sim F_0$
- Donc $v(t) \sim F_0 t/m + constante$
- Or à $t = 0$ la vitesse est nulle, donc la constante d'intégration est nulle (si on écrit l'équation précédente à $t = 0$)
- Donc la vitesse croît linéairement avec une pente F_0/m
- Pour des temps suffisamment longs, la vitesse croît et donc les deux termes de l'équation vont finir par se compenser et on aura une situation d'équilibre dynamique avec une vitesse limite définie par : $m\frac{dv}{dt})_{v_l} = 0 = F_0 - kv_{lim}^2$ donc $v_{lim} = (F_0/k)^{1/2}$
- Le temps typique pour passer de la vitesse nulle à cette vitesse limite est de l'ordre du temps nécessaire pour atteindre v_{lim} avec une pente de F_0/m, c'est-à-dire $\tau \sim v_{lim}/(F_0/m)$ donc $\tau \sim (F_0/k)^{1/2}/(F_0/m)$

3. Si la vitesse initiale est non nulle :

- On a l'équation différentielle, d'après le PFD : $m\frac{dv}{dt} = F_0 - kv^2$
- A $t = 0$, la vitesse est v_0 pendant un moment, par continuité, donc l'équation différentielle se simplifie en : $m\frac{dv}{dt} \sim F_0 - kv_0^2$
- Donc $v(t) \sim (F_0 - kv_0^2)t/m + constante$
- Or à $t = 0$ la vitesse est v_0, donc la constante d'intégration est v_0 (si on écrit l'équation précédente à $t = 0$)
- Donc la vitesse croît linéairement avec une pente $(F_0 - kv_0^2)/m$
- Pour des temps suffisamment longs, la vitesse croît et donc les deux termes de l'équation vont finir par se compenser et on aura une situation d'équilibre dynamique avec une vitesse limite définie par : $m\frac{dv}{dt})_{v_l} = 0 = F_0 - kv_{lim}^2$ donc $v_{lim} = (F_0/k)^{1/2}$

Remarque la solution particulière ne dépend pas des conditions initiales

- Le temps typique pour passer de la vitesse v_0 à cette vitesse limite est de l'ordre du temps nécessaire pour atteindre v_{lim} avec une pente de $(F_0 - kv_0^2)/m$, c'est-à-dire $\tau \sim (v_{lim} - v_0)/((F_0 - kv_0^2)/m)$

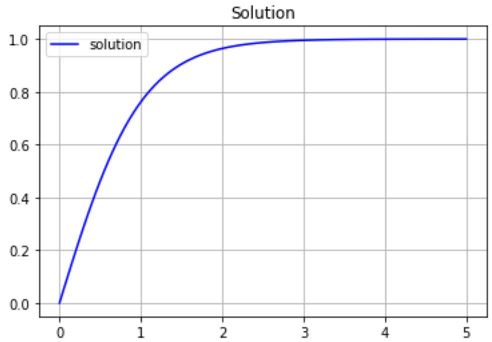
Bonus On peut faire une résolution analytique de l'équation :

On a l'équation différentielle, d'après le PFD : $m\frac{dv}{dt} = F_0 - kv^2$

- On sépare les variables et on met l'équation sous la forme : $m\frac{dv}{F_0 - kv^2} = dt$
- que l'on peut réécrire sous la forme : $\frac{dX}{1-X^2} = Edt$
- On sait de plus que $\int\frac{dX}{1-X^2} = \frac{1}{2}ln\frac{1+X}{1-X}$

On calcule cette primitive entre $X(t=0)$ et $X(t)$:

- si on est dans le cas où $v(t=0) = 0$, on a : $X(t=0) = 0$ donc : $\frac{1}{2}ln\frac{1+X}{1-X} = Et$
- sinon, il faut calculer $X(t=0)$ sachant que $v(t=0) = v_0$



7 Modèle d'atterrissage sur Mars

1. Pendant l'atterrissage, l'altitude décroît, donc les courbes sont parcourues de la droite vers la gauche. Pour toutes les sondes, la vitesse décroît aux alentours de $z_0 = 50km$. On peut supposer Identifier l'altitude z_0 en deça de laquelle on ne peut pas négliger les frottements de l'air.

2. La dimension du terme b est telle que la forme précédente soit homogène à une force : $N = kg.m.s^{-2} = [b]\, m^3.s^{-3}$ donc $[b] = kg.m^{-2}s$. b est un facteur lié à l'intensité des frottements à une vitesse donnée, il dépend de la surface transverse de la sonde, de la masse volumique de l'atmosphère :

— avoir un grand b signifie subir beaucoup de frottements

— au contraire avoir un petit b signifie subir peu de frottements

3. L'équation différentielle vérifiée par la vitesse $v(t)$ est donc :

$$\boxed{m\dot{v} = mg_m - bv^3}$$

La condition initiale sur la vitesse est $v(t=0) = v_0$

4. Pour prévoir le comportement et l'allure de $v(t)$, on analyse l'équation différentielle aux temps courts et aux temps longs.

Aux temps courts, l'équation peut se simplifier en :

$m\dot{v}(t \sim 0) \sim mg_m - bv_0^3$. Ce qui donne : $\dot{v} \sim g - \frac{bv_0^3}{m}$ et $v \sim \left(g - \frac{bv_0^3}{m}\right) t$: on a une évolution linéaire de la vitesse avec une pente $g_m - \frac{bv_0^3}{m}$

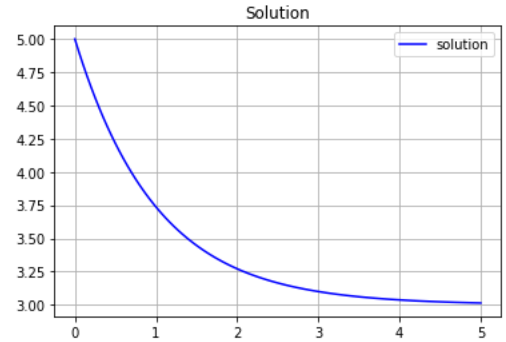
Aux temps longs, la vitesse est importante, la force de frottement non-négligeable et comme l'équation est une équation de relaxation, la solution va tendre vers une valeur limite qui correspond à l'annulation de l'accélération :

$m\dot{v} = mg_m - bv_{lim}^3 \sim 0$ donc $v_{lim} = \left(\frac{mg_m}{b}\right)^{1/3}$

Entretemps, la vitesse a crû jusqu'à cette vitesse limite et la force de frottement aussi, jusqu'au moment d'équilibre dynamique où elle est parvenue à équilibrer le poids.

Le temps typique τ' d'évolution correspond au temps mis par la vitesse pour passer de v_0 à v_{lim} avec une pente typique de l'ordre de $g_m - \frac{bv_0^3}{m}$, donc $\tau' = \frac{v_{lim} - v_0}{g_m - \frac{bv_0^3}{m}}$.

L'allure du graphe est donc :



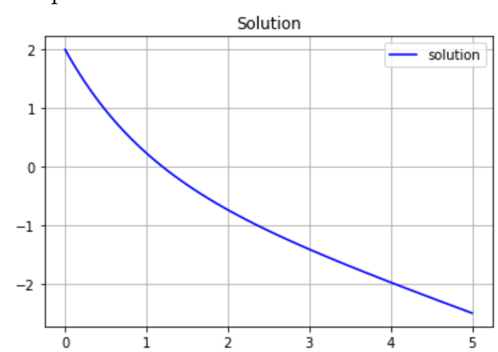
5. Il faut simplement prendre garde que la vitesse est dirigée vers le bas et que ce que l'on a noté $v(t)$ est la norme de la vitesse. Ainsi, la relation mathématique exacte est $\frac{dz}{dt} = v_z = -v$. Donc $z(t)$ est l'opposé de la primitive de $v(t)$.

Ainsi, à la fin de l'évolution $v(t)$ est constante et égale à sa valeur limite, v_l et donc l'altitude décroît de manière affine : $z(t) = -v_l t + cste$

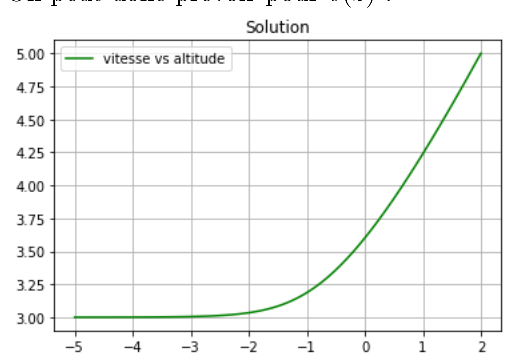
Au début de l'évolution, $v(t)$ décroît et donc la diminution de $z(t)$, initialement rapide, décroît pour atteindre le régime affine vu précédemment.

Enfin, $z(t=0) = z_0$.

On peut donc s'attendre à une évolution de la forme :



On peut donc prévoir pour $v(z)$:



Ce qui est en accord avec le graphe étudié.