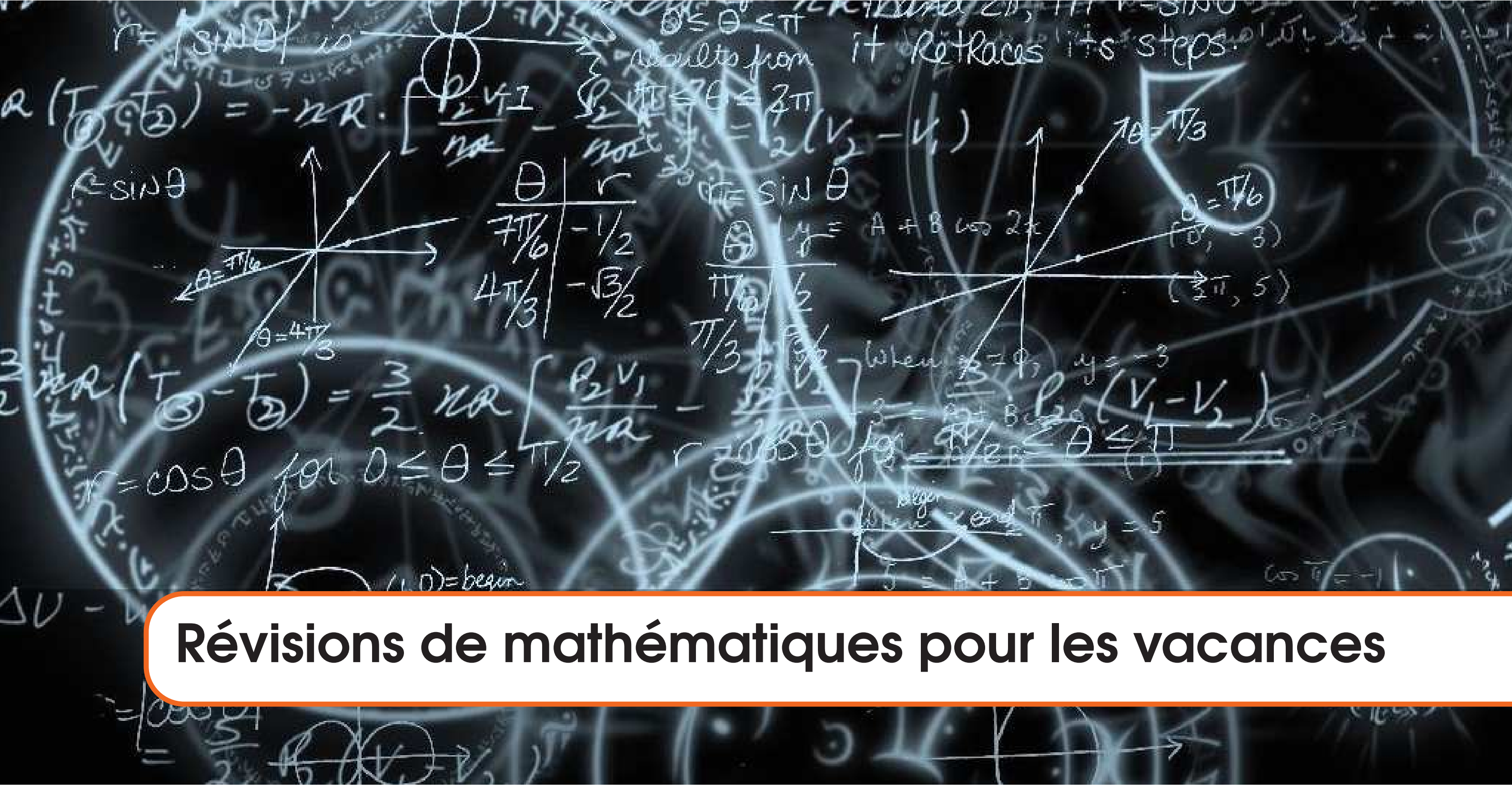

Révisions de mathématiques pour les vacances

Félicitation à tous pour votre admission au CPES !
Afin de préparer votre rentrée en filière ESD je vous propose quelques exercices qui pourront vous aider à réviser votre programme de mathématiques et/ou à le consolider si besoin.
Les exercices sont classés par thème et un tableau final (que vous me rendrez à la rentrée) vous permet de faire le point sur d'éventuelles compétences à revoir de votre côté avant la rentrée.

Bonnes révisions et bonnes vacances !
Jordane MATHIEU

Exercice 1 — Savoir effectuer des calculs algébriques (fraction, puissance...).

1. Que vaut :
   a. $\frac{1}{3}-\frac{4}{5}$, b. $\frac{2}{7}\times\frac{2}{3}$ c. $-\frac{4}{3}+5$ d. $x-\frac{5-2x}{4}+\frac{3x}{-4}$
2. Factoriser puis résoudre les équations suivantes
   a. $x^2-2x+1=0$ b. $x^2-18x+81=0$ c. $9x^2+12x+4=0$
   d. $4x^2-4x+1=0$ e. $x^2-7=0$
3. Factoriser les expressions suivantes par x^2 puis par $\frac{1}{x}$
   a. $1+x^2+3x^3$ b. $2x-\frac{1}{x}+3$
4. Simplifier au maximum
   a. $\frac{2^4\times5^3}{2\times5^4}$, b. $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{4}{3}}$, c. $\left(\frac{1}{4}\right)^3\times12$, d. $9/3^2$,
   e. $\left(3^4\right)^2$, f. $(2\times3)^3$, g. $4^{-1}\times16$ h. $\frac{\frac{2x-1}{x}}{\frac{2x+1}{x}}$
5. Mettre les nombres suivants sous la forme $a+b\sqrt{c}$ avec a,b,c trois réels.
   a. $3\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)$ b. $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+3$

Exercice 2 — Savoir étudier un polynôme de degré 2 (racines, signe, identification).

1. Quelles sont les racines et le signe du polynôme $P(x) = x^2 - 3x + 2$?
2. Trouver toutes les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ telles que $(x-1)(x+2) = 2x^2 - 8$.
3. Trouver deux nombres a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad (ax+b)(x+2) = x^2 - x - 6$,
4. Étudier le signe de $P(x) = -x^3 + 2x^2 - 2x + 1$.

Exercice 3 — Savoir résoudre une équation ou une inéquation .

1. Trouver toutes les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ telles que

   a. $2x^2 + 3 = 2x^2 + x - 1$ b. $x^2 = 1$

   c. $x - 1 < 2(x+1)$, d. $\frac{x-1}{x+1} < 2$
2. Déterminer à l'aide d'un tableau, le signe des expressions suivantes

   a. $(x-4)(x-3)$ b. $\frac{3-x}{2+x}$ c. $\frac{x(x+1)}{3x+2}$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

   a. $\frac{5-3x}{x^2-1} \leqslant 0$ b. $\frac{2x+1}{x+2} \leqslant 1$ c. $\frac{x+3}{x^2-1} \geqslant \frac{3}{x-1}$
4. Si $x \in [-1;3]$, $y \in [1;2]$ et $z \in [-3;-1]$, donner un encadrement de

   a. $-5x+1$ b. $x^2 - 4$ c. $x+y$

   d. $\frac{1}{y}$ et $\frac{1}{z}$ e. $3z - 2y$ f. yz
5. Résoudre le système suivant par substitution puis par combinaison : $\left\{\begin{array}{rr} 2x - y = & 5 \\ -x + 2y = & 4 \end{array}\right.$

   De même avec le système $\left\{\begin{array}{rr} 3x + 2y = & 5 \\ x + 3y = & 3 \end{array}\right.$

Exercice 4 — Savoir utiliser les fonctions usuelles (fonctions carrée, racine, inverse, exponentielle, logarithme).

1. Donner le domaine de définition des fonctions suivantes

   a. $f_1(x) = x^2$ b. $f_2(x) = \frac{1}{x}$ c. $f_3(x) = \sqrt{x}$

   d. $f_4(x) = e^x$ e. $f_5(x) = \ln(x)$
2. Tracer les courbes représentatives des cinq fonctions ci-dessus.
3. Donner la dérivée des cinq fonctions ci-dessus.
4. Simplifier au maximum

   a. $\sqrt{8}$ b. $\sqrt{2+3}$ c. $\sqrt{2 \times 3}$

   d. $\sqrt{x^2}$ e. $(\sqrt{x})^2$ f. $\sqrt{\frac{1}{2}}$
5. Compléter, en précisant pour quel x l'expression existe :

   a. $\ln(e^x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ b. $e^{\ln(x)} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ c. $\frac{e^{2x}}{e^{3x}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

   d. $(e^x)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ e. $\ln(2) + \ln(x) = \ldots\ldots\ldots$ f. $\ln(\frac{1}{x}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

   g. $\ln(x^n) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

6. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ (dire auparavant pour quel x l'équation a du sens) :
   a. $\ln(e^x) = 1$
   b. $e^{\ln(4x)} = 4$
   c. $e^{2x+3} = e^{3x}$
   d. $e^{-x} - \frac{1}{e^x} = 2$
   e. $\frac{e^{2x}}{e^{3x}} = 1$
   f. $(e^x)^2 = 0$
   g. $\ln(2) + \ln(x) = \frac{1}{2}$
   h. $\ln(\frac{1}{x}) = 0$
   i. $x^n = 2$, où $n \in \mathbb{N}$

Exercice 5 — Savoir étudier une fonction simple.

1. Après avoir donné leur ensemble de définition, calculer les dérivées des fonctions suivantes :
   a. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$
   b. $f(x) = \sqrt{x+2}$
   c. $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1+x}}$
   d. $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$
   e. $f(x) = \ln(1+x^2)$
   f. $f(x) = e^{x\ln(2)}$
2. Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la dérivée première, construire le tableau de variations et donner une représentation graphique. Quelle est la limite de f lorsque $x \to +\infty$?
   a. $f(x) = \frac{1}{x}$
   b. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
   c. $f(x) = x^3 - 6x^2 + x - 1$
   d. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
3. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 1/2$ à la courbe représentative de la fonction $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Exercice 6 — Savoir étudier une suite arithmétique et géométrique, donner sa limite, donner sa monotonie.

1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et $u_{n+1} = 1 + 2u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer u_1, et u_2.
   (b) La suite (u_n) est-elle une suite arithmétique ? géométrique ?
   (c) On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + 1$. Justifier que la suite (v_n) est une suite géométrique et donner sa raison.
   (d) Quelle est sa limite quand n tend vers $+\infty$?
2. On suppose qu'un pin d'un âge supérieur à 10 ans a une croissance régulière annuelle de 40cm de hauteur. Pour tout n entier supérieur à 10, on note h_n la hauteur en mètre du pin à l'âge n.
   (a) En supposant dans cette question que $h_{10} = 22$, calculez h_{11} et h_{12}.
   (b) Montrer que (h_n) est une suite arithmétique. Est-elle croissante ou décroissante ?
   (c) On suppose qu'un pin de 10 ans a une hauteur de 17m. Quelle sera sa hauteur lorsqu'il aura 22 ans ?
3. Déterminer les limites des suites suivantes :
   a. $\lim_{n\to+\infty} 2^n$
   b. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$
   c. $\lim_{n\to+\infty} 1.01^n$
   d. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{47}{43}\right)^n$
   e. $\lim_{n\to+\infty} 0.89^n$
4. En 2005, année de sa création, un club de randonnée pédestre comportait 80 adhérents. Chacune des années suivantes on a constaté que 10% des participants ne renouvelaient pas leur adhésion au club et que 20 nouvelles personnes s'inscrivaient au club. On suppose que cette évolution reste la même au fil des ans.
   On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 80$ et pour tout entier natuel n,
   $u_{n+1} = 0,9u_n + 20$. Pour tout entier naturel n on pose $v_n = u_n - 200$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser sa raison et son premier terme. Exprimer v_n en fonction de n.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n on a $u_n = 200 - 120 \times 0.9^n$. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
   (c) L'objectif du président du club est d'atteindre au moins 180 adhérents. Cet objectif est-il réalisable ? Idem avec 300.

Bilan des révisions par exercice :

Nom : ....

Prénom : ....

Compétences	**Détails**	**A revoir ?**
Savoir effectuer des calculs algébriques	fraction	
	puissance	
	racine carrée	
Savoir étudier un polynôme de degré 2	racines, signe	
	identification polynomiale	
Savoir résoudre une équation ou une inéquation	équation	
	inéquation	
	tableaux de signes	
	encadrements	
Savoir utiliser les fonctions usuelles : ensemble de définition, courbe, dérivée, propriétés algébriques	carrée	
	racine	
	inverse	
	exponentielle	
	logarithme	
	équation $x^n = k$	
Savoir étudier une fonction simple	définition	
	dérivation	
	tableau de variations	
	tangente	
Savoir étudier une suite arithmétique et géométrique	arithmétique	
	géométrique	
	monotonie	
	limite	