Mathématiques

Livret de travail
de la 3eme à la 2nde

23 juin 2021

Préface

Ce livret s'adresse aux élèves qui s'apprêtent à entrer en classe de Seconde au lycée Henri-IV ou au lycée Louis-le-Grand.

Il propose une sélection d'exercices couvrant une large partie du programme de Troisième en mathématiques et a pour but de faire le point sur les connaissances et les techniques utiles à une entrée en Seconde.
Il n'est pas nécessaire de faire tous les exercices mais il paraît raisonnable de chercher au moins les plus faciles

Les exercices présentent un pictogramme donnant une indication du niveau de difficulté. Les exercices ☆☆★☆ et ☆☆★★ mobilisent des connaissances et savoir faire usuels de fin de troisième, les exercices ★☆★★ ou ★★★★ sont plus difficiles. Ces mentions sont d'une part subjectives, d'autre part relatives : le niveau d'ensemble des exercices proposés est assez élevé par rapport au programme de troisième. Ne pas trouver, même en y passant du temps, un exercice ne préjuge en rien d'une future réussite en seconde.
Une solution non détaillée est proposée.

Anne Paradas Arroyo (lycée Louis-le-Grand) et Laurent Lemaire (lycée Henri-IV).

Exercices

I Calcul fractionnaire

Ex 1 ★☆

Effectuer les calculs suivants :

$A = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$

$B = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) \times \frac{3}{4}$

$C = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) \div \frac{3}{4}$

$D = \frac{4}{7} - \frac{1}{7} \times \frac{5}{3}$

$E = \frac{3}{7} - \frac{2}{5} \times \frac{15}{4}$

$F = \dfrac{\frac{3}{5} + \frac{2}{3}}{\frac{9}{4} + 1}$

Ex 2 ★☆

Calculer les expressions suivantes en donnant les résultats sous forme de fraction irréductible :

$A = \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{4}\right) \times \left(\frac{3}{7} - \frac{1}{2}\right)$

$B = \left(\frac{3}{7} - \frac{1}{5}\right) \div \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right)$

$C = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \times \left(3 + \frac{1}{2}\right)$

$D = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\right)$

$E = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \div \left(1 + \frac{1}{3}\right)$

Ex 3 ★☆

Lorsque $a = \frac{2}{3}$, $b = -\frac{3}{2}$ et $c = \frac{-3}{4}$, calculer :

$A = 3a - b - c$

$B = -2a + 4b - 5c$

$C = 6b^2 - 3a + 5$

$D = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

$E = \frac{a+c}{a-b}$

Ex 4 ★☆

Calculer la valeur de $F = \frac{x+5y}{x}$ lorsque

1) $x = \frac{2}{3}$, $y = -4$

2) $x = -4$, $y = -\frac{8}{5}$

3) $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{7}{10}$

4) $x = -\frac{2}{3}$, $y = \frac{2}{15}$

Ex 5 ★☆

Calculer les expressions suivantes en donnant les résultats sous forme de fraction irréductible :

$A = \dfrac{\frac{2}{3} + \frac{5}{7}}{\frac{2}{3} \times \frac{5}{7}}$

$B = \dfrac{5 + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}}{5 - \frac{3}{4} + \frac{1}{3}}$

$C = \dfrac{\frac{1}{5} - \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}}{\left(\frac{1}{5} - \frac{3}{4}\right) \times \frac{2}{3}}$

Ex 6 ★☆

Quel est le nombre qu'il faut ajouter au numérateur et au dénominateur de la fraction $\frac{5}{8}$ pour que la nouvelle fraction soit égale à 4 ?

Ex 7 ★★

Retrouver le nombre caché à la place de ♠ et de ♣.

1) $\frac{87}{60} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{\spadesuit}$

2) $\dfrac{31}{17 + \dfrac{101}{8 - \dfrac{7}{\clubsuit}}} = \dfrac{2015}{2014}$

II Puissances

Ex 8 ☆☆ ★☆ **Formules**

★ **Série 1 :** Écrire sous la forme 3^n

$A = \dfrac{3^5 \times 3^2}{3^{-7}}$

$B = (3^2 \times 3^3)^4$

$C = 3^2 \times (3^3)^4$

$D = \dfrac{\left((-3)^2 \times 3^2\right)^3}{(-3)^5}$

$E = \dfrac{\left((-3)^2\right)^3}{(-3)^3 \times (-3)}$

$F = \dfrac{3^{-2} \times 9^{-8}}{3^4 \times 27^{-17}}$

$G = \left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^5 \times \left(3^2\right)^3\right)^2$

$H = \dfrac{3^2 \times 27}{81^2}$

★ **Série 2 :** Écrire sous la forme a^n.

$A = 2^4 \times 4^{-5}$

$B = 2^5 \times 8^{-3}$

$C = \dfrac{8^3}{4^3}$

$D = 0{,}25^{-6} \times 4^{-25}$

$E = 5^4 \times 25^{-7} \times 125^2$

$F = \dfrac{7^6 \times (-49)^5}{7^{-9}}$

★ **Série 3 :** Écrire les nombres suivants sous la forme $2^n \times 5^m$.

$A = \dfrac{2^4}{(2^2 \times 5)^5}$

$B = \dfrac{2 \times (5^2)^3}{2^{-3}}$

$C = \dfrac{\left(2^3 \times 2^{-4}\right)^2}{(5^3)^2 \times 5^{-5}}$

$D = \dfrac{(10^2)^3}{2^{-4} \times (25)^6}$

$E = \left(\dfrac{2}{5}\right)^4 \times \left(\dfrac{5^2}{2}\right)^3$

$F = \dfrac{64^3 \times 125^4}{250^7}$

Ex 9 ☆☆ ★★ **Nombre de chiffres**

Déterminer le nombre de chiffres de $4^{16} \times 5^{25}$.

Ex 10 ☆☆ ★★ **Somme des chiffres**

Déterminer la somme des chiffres du nombre

$$10^{2\,046} - 2\,046$$

Ex 11 ☆☆ ★☆

En ajoutant 4^{15} et 8^{10}, on obtient une puissance de 2. Laquelle ?

Ex 12 ☆☆ ★★

Déterminer n dans chacun des cas.

1) $2^4 \times 3^2 \times 5^6 \times 7^2 = n^2$

2) $2^3 \times 3^6 \times 5^3 \times 7^3 = n^3$

3) $\left(\frac{4^5+4^5+4^5+4^5}{3^5+3^5+3^5}\right)\left(\frac{6^5+6^5+6^5+6^5+6^5+6^5}{2^5+2^5}\right) = 2^n$

4) $3^{2001} + 3^{2002} + 3^{2003} = n \times 3^{2001}$

5) $8^n = 2^n \times 2^{12}$

Ex 13 ☆☆ ★★ **Calculs algébriques**

Soient $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Calculer puis donner le résultat sous la forme $a^n \times b^m$ où n et m désignent des entiers relatifs.

★ **Série 1**

$A = \dfrac{a^2 b^{-3}}{a^{-2} b}$

$B = \dfrac{a^6 b^{-4}}{a^{10} b^{-8}}$

$C = \dfrac{(a^2 b)^3}{b a^{-2}}$

$D = \dfrac{(ab^2)^{-1}}{(a^2 b^3)^2}$

★ **Série 2**

$A = a^2 (ab)^{-3} (b^{-2})^{-3}$

$B = \dfrac{(ab^2)^{-1}}{a^{-2} b^{-7}}$

$C = (a^3 b)^3 (a^2 b^5)^5$

$D = \dfrac{(ab^3)^{-4} (a^{-2} b)^2}{a^{-6} b^4}$

III Entiers

Ex 14 ☆☆ ★★ Chiffres manquants

Remplacer • par des chiffres pour que les nombres obtenus vérifient la condition donnée. Donner toutes les solutions possibles.

1) 5 • 8 • 2 est divisible par 9.

2) 3 • 5• est divisible par 9 et par 2.

3) 34 • 45• est divisible à la fois par 5 et par 9.

4) 1 • 3• est divisible par 15.

5) •23 45• est divisible par 11 et par 3.

Ex 15 ☆☆ ★☆ pgcd et ppcm

On considère les nombres 4 116 et 2 156.

1) Donner leur décomposition en facteurs premiers.

2) Déterminer leur PGCD et leur PPCM.

3) Lequel de ces deux nombres a le plus de diviseurs ?

Ex 16 ☆☆ ★☆ Simplification de fraction

En utilisant la décomposition en facteurs premiers, simplifier au maximum les fractions suivantes :

$$A = \frac{71\,610}{20\,790} \qquad C = \frac{2\,635}{1\,274}$$

$$B = \frac{374\,850}{350\,350} \qquad D = \frac{4\,923\,765}{980\,980}$$

Ex 17 ☆☆ ★★

Décomposer 111 111 en produit de facteurs premiers.

Ex 18 ☆☆ ★★ Nombre de zéros

Par combien de zéros se termine les nombres suivants ?

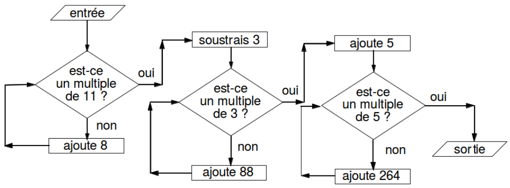
$A = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 9 \times 10$

$B = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 99 \times 100$

$C = 100 \times 101 \times 102 \times 103 \times \cdots \times 998 \times 999$

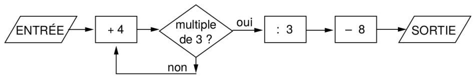
Ex 19 ☆☆ ★☆ Organigramme

Faire entrer le nombre 437 dans l'organigramme suivant, quel nombre obtient-on à la sortie ?

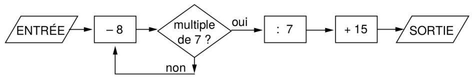


Ex 20 ☆☆ ★☆ Organigramme

1) Quel nombre entier faut-il introduire dans l'organigramme suivant pour obtenir 39 à la sortie ? [3 solutions]



2) Quel nombre entier faut-il introduire dans l'organigramme suivant pour obtenir 24 à la sortie ? [7 solutions]



IV Calcul littéral

Ex 21 ☆☆ ★☆ Distributivité simple

Développer et simplifier :

⋆ **Série 1**

$A = a\times(a+3)$

$B = (x^2+4)\times x$

$C = a\times(a^2+a)$

$D = a\times(a^2+1)$

$E = a\times(3a+6)$

$F = b\times(3b^2+5b)$

$G = (7b^2-6b)\times b$

$H = x\times(5x^2+2x)$

$I = (a^2+2a)\times a$

⋆ **Série 2**

$A = x^2\times(2x+x^2)$

$B = (2x^2-5)\times 3x^2$

$C = 7a^3\times(3a^3+2a)$

$D = (3a-9a^2)\times a^2$

$E = 5x^2\times(8x-9)$

$F = 3x\times(5x^2-3x)$

⋆ **Série 3**

$A = 2xy(x^2y+x)$

$B = (2ab-4ab^2)3a^2b$

$C = 5y^2(y^3-2x^2y+1)$

$D = (3a^3-2a^2b-1)4ab$

$E = 2x^3(3xy+x)$

$F = (2a^2b-3b)ab$

Ex 22 ☆☆ ★☆ Double distributivité

Développer et simplifier.

⋆ **Série 1**

$A = (3t-2)(7t-4)$

$B = (4s-1)(2s+5)$

$C = (3x+5)(2x-1)$

$D = (7y-3)(2y-1)$

$E = (x+3y)(2x-y)$

$F = (4x-5y)(3x-y)$

⋆ **Série 2**

$A = (3x^2-5)(2x^2+1)$

$B = (a^2b+3a)(2a^2b-a)$

$C = (5ab-2b)(ab-4b)$

$D = (3y^2-5x)(3x+5y^2)$

$E = (2x^2-3x)(-4x+5x^2)$

$F = (-2x^2-5y)(-x-4y^2)$

⋆ **Série 3**

$A = (2a^3-7b)(-7a+3b^2)$

$B = (5abc-2ab)(12ab-15abc)$

$C = (5ab^2+3a^2b)(-4a^2b+3ab^2)$

$D = (2a^3b-7ab^3)(-a^3b+2ab^3)$

Ex 23 ☆☆ ★☆ Identités remarquables

Développer et simplifier.

⋆ **Série 1**

$A = (7x-2y)^2$

$B = (4a-2b)^2$

$C = (3a+2b)^2$

$D = (7x-12y)^2$

$E = (2b-7c)^2$

$F = (3x-7y)(3x+7y)$

⋆ **Série 2**

$A = (3a-2b)^2$

$B = (2-2b)^2$

$C = (6a+b)^2$

$D = (3x-z)(3x+z)$

$E = (4a-7)^2$

$F = (10a-7b)^2$

⋆ **Série 3**

$A = (2a-b^2)^2$

$B = (2a^2+b)^2$

$C = (3x^2-y)(3x^2+y)$

$D = (3a^2-2b^3)^2$

$E = (x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$F = \left(3x^2-\dfrac{1}{3}x\right)^2$

Ex 24 ☆☆ ★★ Identités enchaînées

Développer astucieusement et simplifier.

⋆ **Série 1**

$A = (x+a)(x-a)(x^2-a^2)$

$B = (2a-1)(2a+1)(4a^2+1)$

$C = (x-1)(x^2+1)(x+1)$

$D = (x+2)(x-2)(x^4+16)(x^2+4)$

$E = (x^2-1)(x^2+1)(x^4-8)$

$F = (4a^4+3)(2a^2+1)(2a^2-1)$

⋆ **Série 2**

$A = ((x-1)+x^2)((x-1)-x^2)$

$B = (x+(2+x^2))(x-(2+x^2))$

$C = (x+y-1)(x-y+1)$

$D = (a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$

Ex 25 ☆☆ ★★

Soient x, y et z trois nombres réels non nuls.

On pose : $a = \dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}$ $\quad b = \dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}$ $\quad c = \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$

Calculer $a^2+b^2+c^2-abc$.

Ex 26 ★☆ ★★

Sachant que $X+Y=1$ et que $X^2+Y^2=2$:

1) que vaut XY ?

2) que vaut $\dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{Y}$?

3) que vaut X^3+Y^3 ?

4) que vaut X^4+Y^4 ?

Ex 27 Facteurs communs

Factoriser en utilisant un facteur commun :

$A = 3(x-2) + (x+3)(x-2)$

$B = 5x(x-3) - x(2x+1)$

$C = (x+5)^2 + (x-5)(x+5) - 3(x+5)$

$D = 5(2x-1)^3 + (2x-1)^2(x+2)$

$E = x^2(x-2) + 3x^3$

$F = (x-3)^2 - 2x(x-3) + (x-3)$

$G = (2x-3)^2 + 5x(3-2x)$

$H = (2x+5) - (x+3)(4x+10)$

$I = (x+9)(x-5) + 2(6x-30)$

Ex 28 Identités remarquables

Factoriser en utilisant une identité remarquable.

⋆ **Série 1 :**

$A = x^2 + 10x + 25$

$B = 16 - 25x^2$

$C = 1 - 12x + 36x^2$

$D = (x+7)^2 - 1$

$E = 16x^2 - 8x + 1$

$F = 64 - (2x+3)^2$

$G = (3x-1)^2 - 9$

$H = 4x^2 - 20x + 25$

⋆ **Série 2 :**

$A = 4x^2 - (x-5)^2$

$B = \dfrac{1}{4}x^2 + x + 1$

$C = 81 + 4x^2 + 36x$

$D = 9(x+1)^2 - 36$

$E = (2x+3)^2 - (x-1)^2$

$F = \dfrac{4}{9} - (2x + \dfrac{1}{3})^2$

⋆ **Série 3 :**

$A = x^2 - 9 + (x-3)(2x+5)$

$B = 5x(4x-1) + 16x^2 - 1$

$C = x^2 - 25 + x - 5$

$D = 4x^2 + 4x + 1 - (2x+1)(3-5x)$

Ex 29 Regroupements de termes

Factoriser aussi complètement que possible :

⋆ **Série 1 :**

$A = ax + ay + bx + by$

$B = ab + ac + bd + dc$

$C = ad + ac - bd - bc$

$D = 21xy - 3x - 28y + 4$

$E = ac + 3ad - 2bc - 6bd$

$F = 5ax - 5ay - bx + by$

⋆ **Série 2 :**

$A = x^3 + 4x^2 + x + 4$

$B = 3x^3 - x^2 + 6x - 2$

$C = 5x^3 + x^2 + 5x + 1$

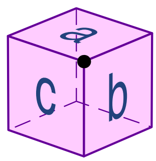
$D = 18x^3 + 9x^2 + 2x + 1$

$E = x^3 + x^2 + x + 1$

$F = x^5 + x^4 + x + 1$

Ex 30

Un entier naturel non nul est écrit sur chacune des faces d'un cube, et sur chaque sommet on écrit le produit des nombres inscrits sur les trois faces adjacentes à ce sommet.



La somme des nombres placés aux sommets du cube est 105.
Quelle est la somme des nombres placés sur les faces du cube ?

Ex 31 En facteurs premiers

Décomposer en produit de facteurs premiers :

A = 24 999 999

B = 1 018 081

V Équations, inéquation

Ex 32 ☆☆ ★☆

Résoudre les équations :

1) $1-2x+3-5x=-x-1+2-4x$

2) $-5x+1-x+3-4x+1=0$

3) $(2x+1)-3(5x+1)=2(x-4)-(3x-6)$

4) $3x-4(x+2)=x+3-(7-6x)$

5) $7-(2x-3)+x=x-1-3(2x+1)$

6) $4-(-2x-(5+4x))=5x-(3-2(4x-1))$

Ex 33 ☆☆ ★★

Résoudre les équations :

1) $\dfrac{x-3}{4}=x+3$

2) $\dfrac{1}{2}x+2=\dfrac{1}{3}x-1$

3) $\dfrac{2x-1}{3}=\dfrac{-5-x}{4}$

4) $\dfrac{2x-3}{4}=\dfrac{3x-1}{2}$

5) $\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{6}$

6) $\dfrac{3}{8}x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{2}{3}$

7) $\dfrac{x}{2}-1=\dfrac{7x-4}{8}$

8) $\dfrac{5}{6}x-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{2}$

Ex 34 ☆☆ ★☆ Problèmes géométriques

1) L'aire d'un trapèze est de 85,5 cm². Sa hauteur est de 4,5 cm. Une de ses bases mesure 15 cm. Calculer la longueur de l'autre base.

2) Le périmètre d'un rectangle mesure 240 m. Sa longueur mesure 26 m de plus que sa largeur. Calculer ses dimensions.

3) Combien mesure le côté d'un triangle équilatéral dont une hauteur mesure 6 cm ?

4) Un rectangle a 15 m de largeur. Si on diminuait sa longueur de 14 m et si on augmentait sa largeur de 6 m, l'aire ne varierait pas. Calculer la longueur de ce rectangle.

5) Dans un losange, la grande diagonale mesure 7 cm de plus que la petite. Si on diminuait la longueur de la grande diagonale de 9 cm et si on augmentait la longueur de la petite diagonale de 5 cm, l'aire diminuerait de 82 cm² . Calculer la longueur de chaque diagonale.

Ex 35 ☆☆ ★☆ Problèmes d'âge

1) L'âge d'un père est le quadruple de celui de son fils. Quel est l'âge du père, sachant que, dans 20 ans, il ne sera plus que le double de celui de son fils ?

2) Bob a le double de l'âge de Joe. Il y a 10 ans, Bob avait quatre fois l'âge de Joe. Quels sont les âges de Bob et de Joe ?

3) Il y a 55 ans, l'âge d'un père dépassait de 25 ans l'âge de son fils. Dans 14 ans, l'âge du fils sera égal aux trois quarts de l'âge de son père. Quels sont les âges du père et du fils ?

Ex 36 ☆☆ ★☆ Brevet 2003

Soit l'expression

$$A=9x^2-49+(3x+7)(2x+3).$$

1) Développer l'expression A.

2) Factoriser $9x^2-49$; puis l'expression A.

3) Résoudre l'équation $A=0$.

Ex 37 ☆☆ ★☆ Brevet 1998

On considère l'expression

$$E=(3x+2)^2-(x-1)^2.$$

1) Développer et réduire E.

2) Factoriser E.

3) Résoudre l'équation $E=0$.

Ex 38 ☆☆ ★★ Bambou brisé

Un bambou de 1 mètre de hauteur, lorsqu'il est brisé, a son extrémité qui touche le sol à une distance de 30 cm de sa base.

À quelle hauteur a-t-il été brisé ?

Ex 39 ☆☆ ★★ Le lièvre et la tortue

Un lièvre et une tortue font la course : ils s'élancent pour 5 km en ligne droite. Le lièvre court 5 fois plus vite que la tortue.

Au départ, le lièvre est parti par erreur perpendiculairement à la bonne route. Quand il s'en est aperçu, il a instantanément changé de direction pour aller tout droit vers l'arrivée.

Le lièvre et la tortue ont franchi l'arrivée exactement en même temps.

À quelle distance de l'arrivée se trouve le point où le lièvre a changé de direction ?

Ex 40 ☆☆ ★★ **Les chariots**

Sur un parking de supermarché, se trouvent deux lignes de chariots bien rangés.

La première ligne, de 10 chariots, mesure 2,9 mètres de long.
La seconde, de 20 chariots, mesure 4,9 mètres de long.
Quelle est la longueur d'un chariot ?

Ex 41 ☆☆ ★☆ **Équation $x^2 = a$**

Résoudre les équations suivantes :

⋆ **Série 1 :**

1) $x^2+5=0$

2) $2x^2-18=0$

3) $x^2-1=2x^2-3$

4) $3x^2-7=x^2-7$

⋆ **Série 2 :**

1) $(x-3)^2=49$

2) $(2x+7)^2=25$

3) $(x-4)(x+4)=9$

Ex 42 ☆☆ ★☆ **Brevet 1996**

1) Résoudre l'inéquation : $7x > 8x-3$.
Représenter les solutions sur une droite graduée.

2) Résoudre l'inéquation $-3x+1 > -5x-2$.
Représenter les solutions sur une droite graduée.

3) Représenter sur une droite graduée les solutions du système :

$$\mathscr{S}_1 : \begin{cases} 7x > 8x-3 \\ -3x+1 > -5x-2 \end{cases}$$

Ex 43 ☆☆ ★★ **Fabrication sous contrainte**

Une entreprise de menuiserie fabrique 150 chaises par jour. Elle produit deux types de chaises, les unes vendues à 35 € pièce, les autres 60 € pièce.

L'entreprise souhaite que le montant des ventes soit strictement supérieur à 7 000 € par jour et elle veut fabriquer plus de chaises à 35 € que de chaises à 60 €.
Combien doit-elle fabriquer de chaises à 35 € par jour ?

VI Géométrie

Ex 44

ABC est un triangle isocèle de sommet principal A tel que AB = 8 cm et BC = 9,6 cm. On appelle respectivement H et K les pieds des hauteurs issues de A et C.

1) Calculer AH puis l'aire du triangle ABC.

2) Calculer CK puis BK.

Ex 45 Brevet 1998

ABC est un triangle tel que AB = 4,2 cm ; AC = 5,6 cm et BC = 7 cm.

1) Démontrer que ABC est un triangle rectangle.

2) Calculer son aire.

3) On sait que si R est le rayon du cercle circonscrit à un triangle dont les côtés ont pour longueurs a, b, c données en cm, l'aire de ce triangle est égale à $\dfrac{abc}{4\text{R}}$.

a) En utilisant cette formule, calculer le rayon du cercle circonscrit à ABC.

b) Pouvait-on prévoir ce résultat ? Justifier la réponse.

Ex 46 Brevet 2006

Soit un cercle de centre O et de diamètre [ST] tel que ST = 7 cm. Soit U un point de ce cercle tel que SU = 3 cm.

1) Faire une figure.

2) Démontrer que STU est rectangle en U.

3) Calculer, au dixième près, la valeur de $\widehat{\text{STU}}$.

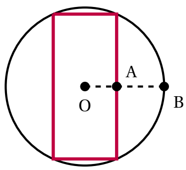
4) En déduire, au dixième près, la valeur de $\widehat{\text{SOU}}$.

Ex 47 Avec des losanges

1) Un rectangle est inscrit dans un cercle. Un rectangle est inscrit dans un cercle. On sait que

OA = 5 et AB = 8,

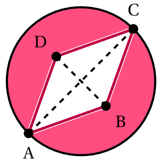
où O est le centre du cercle. Calculer l'aire du rectangle.



2) ABCD est un losange.

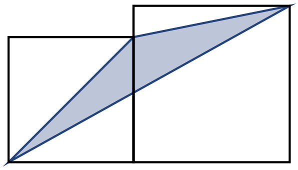
[AC] est un diamètre du cercle. Calculer l'aire de la figure grisée, sachant que

AB = 9 et BD = 6.



Ex 48 Avec des carrés

Deux carrés de côtés 14 et 18 sont tracés côte à côte.



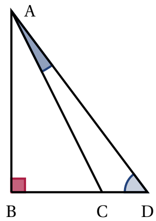
Quelle est l'aire du triangle coloré sur la figure ?

Ex 49 Calcul de périmètre

le triangle ABD est rectangle en A. Calculer le périmètre du triangle ACD dans les cas suivants :

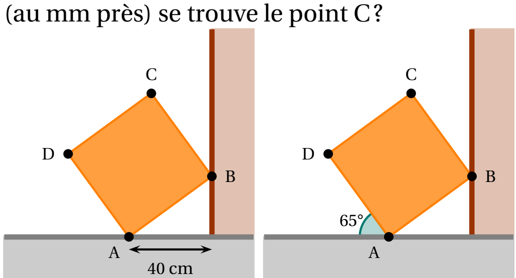
1) AB = 15 , $\widehat{\text{ADB}} = 65°$ et $\widehat{\text{CAD}} = 10°$.

2) AD = 10 , $\widehat{\text{ADB}} = 60°$ et $\widehat{\text{CAD}} = 20°$.



Ex 50 Appui sur un mur

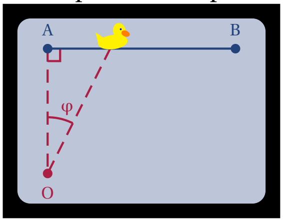
Une boîte cubique de 50 cm d'arête s'appuie contre un mur vertical comme indiqué sur le dessin. Dans chacun des cas, à quelle hauteur (au mm près) se trouve le point C ?



Ex 51 Jeu

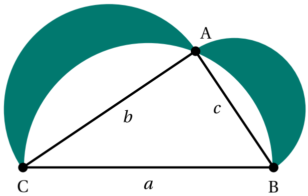
La figure représente l'écran d'un jeu vidéo d'arcade dans lequel des canards se déplacent de A vers B à la vitesse de 7 cm/s. Des balles tirées depuis le point O traversent à 25 cm/s.

Si un joueur tire dès qu'un canard apparaît au point A , quel devrait être l'angle de tir pour atteindre la cible du premier coup ?



Ex 52 ☆☆★★ Lunules d'Hippocrate

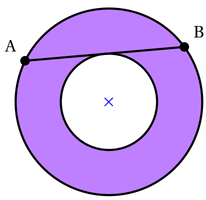
Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AC = b et AB = c. On a construit un demi-cercle sur chacun de ses côtés pris comme diamètre. On a coloré les croissants compris entre le grand demi-cercle et les deux autres.



Démontrer que l'aire colorée est égale à l'aire du triangle.

Ex 53 ☆☆★★ Corde tangente

Calculer l'aire de la figure grisée, sachant que la longueur de la corde [AB], tangente au petit cercle, est de 24 cm.



Ex 54 ★★★★

Soient deux points A et B tels que : AB = 10.
Sur le segment [AB], on place le point C tel que : AC = 6 (et par conséquent : CB = 4).
D'un même côté de la droite (AB), on place les points D et E tels que :

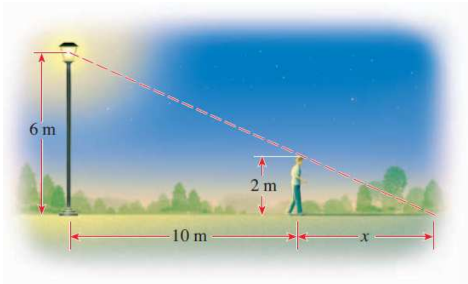
DC = DB = 3, EA = 8 et EC = 6.

Calculer la distance DE.

Ex 55 ★☆★★ La carte au trésor

Une carte indique qu'un trésor est situé dans un terrain rectangulaire à 1260 m d'un coin, à 320 m du coin opposé et à 1120 m d'un troisième coin.
A quelle distance du quatrième coin se trouve-t-il ?

Ex 56 ☆☆★☆ Ombre

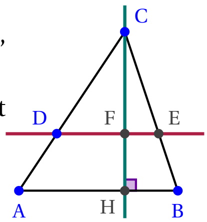


Un homme marche sous un lampadaire dont la source lumineuse se trouve à 6 m du sol. L'homme mesure 2 m. Quelle est la longueur de son ombre quand il se trouve à 10 m du lampadaire ?

Ex 57 ☆☆★★

Dans chacun des cas,

(DE)//(AB) et (AB) ⊥ (CH).



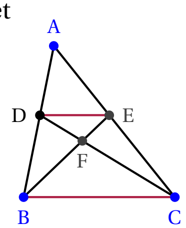
1) CD = 30, CF = 24, CE = 25 et DA = 20.
Calculer DF, FH, AH, DE, CB et HB.

2) CD = 10, DA = 5, CB = 13 et DF = 6.
Calculer FH, HB, FE et CE.

3) AH = 3, CH = 2 et DC = 2.
Calculer FH et DF.

Ex 58 ☆☆★★

Dans chacun des cas, (DE)//(AB).



1) AD = 5, FE = 4, DB = 10 et BC = 18.
Calculer BF.

2) FE = 3, FB = 4 et BD = 5.
Calculer AD.

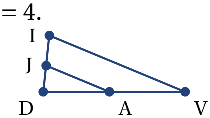
3) FE = 4, FB = 6 et EB = 5.
Calculer AE.

Ex 59 ☆☆★☆ Parallèles ?

l'unité est le cm.

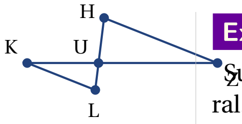
1) AD = 3 ; AV = 6 ; DJ = 2,4 ; JI = 4.

Les droites (AJ) et (VI) sont-elles parallèles ?



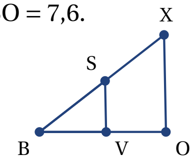
2) UL = 2 ; UK = 5 ; UH = 7 ; ZU = 17.

Les droites (LK) et (ZH) sont-elles parallèles ?



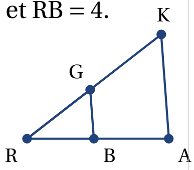
3) BS = 5, SX = 4,5, BV = 4 et BO = 7,6.

Les droites (OX) et (VS) sont-elles parallèles ?



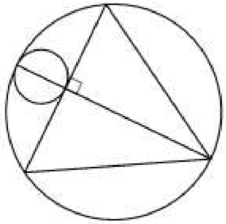
4) RA = 8,5, RK = 10,2, GK = 5,4 et RB = 4.

Les droites (AK) et (BG) sont-elles parallèles ?



Ex 60 ★☆★★ Agrandissement

Sur la figure ci-dessous le triangle est équilatéral.



Par quel nombre faut-il multiplier l'aire du petit disque pour obtenir l'aire du grand disque ?

VII Fonctions

Ex 61 ☆☆★☆ Brevet 2017

Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre
- Ajouter 1 à ce nombre
- Calculer le carré du résultat
- Soustraire le carré du nombre de départ au résultat précédent.
- Écrire le résultat.

1) On choisit 4 comme nombre de départ. Quel est le résultat obtenu ?

2) On note x le nombre choisi. Exprimer le résultat du programme en fonction de x.

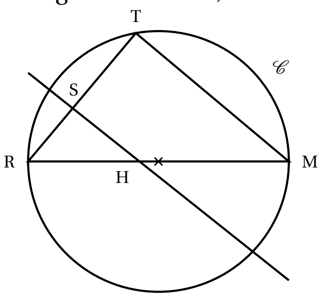
3) Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x + 1$.

a) Calculer l'image de 0 par f.

b) Déterminer l'antécédent de 5 par f.

Ex 62 ☆☆★☆ Brevet 2007

L'unité de longueur est le cm,



Soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre RM = 10.
Soit T un point de $\mathscr{C}$ tel que RT = 6.
Soit S un point de [RT] et H le point de [RM] tel que (SH)//(TM). On pose RS = x.

1) Démontrer que RMT est un triangle rectangle.

2) Démontrer que TM = 8.

3) Déterminer, en fonction de x, RH et SH.

4) Exprimer, en fonction de x, le périmètre du triangle RSH.

5) Exprimer, en fonction de x, le périmètre du trapèze STMH.

6) On considère les fonctions affines f et g telles que :

$$f \; : x \longmapsto 4x \quad \text{et} \quad g : x \longmapsto 24 - \frac{4}{3}x.$$

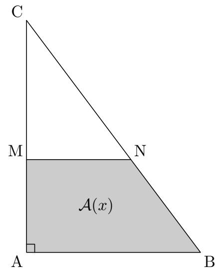
a) Calculer $f(0)$, $f(6)$, $g(0)$ et $g(6)$.

b) Déterminer par le calcul la valeur de x pour laquelle $f(x) = g(x)$.

Ex 63 ☆☆★☆ Brevet 1997

L'unité de longueur est le mètre.

⋆ **Partie A :** Soit un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 4 et AC = 5.



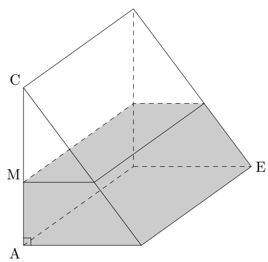
Soit M un point du segment [AC].
On pose AM = x. La parallèle à la droite (AB) passant par M coupe le segment [BC] en N.

1) a) Entre quelles valeurs peut varier x ?
Quelle est, en fonction de x, la longueur CM ?

b) Démontrer que MN = $4 - 0,8x$.

2) Calculer, en fonction de x, l'aire $\mathscr{A}(x)$ du trapèze ABNM.

⋆ **Partie B :**



Le schéma ci-dessus représente une citerne posée sur un sol horizontal. Elle a la forme d'un prisme droit ABCDEF :

- sa base ABC est le triangle décrit dans la première partie ;
- BE = 10.

1) Quel est, en mètres cubes, le volume de la citerne ?

2) La citerne contient de l'eau jusqu'au niveau du plan MNPQ, comme l'indique le schéma. x désignant la longueur AM, démontrer que le volume $\mathscr{V}(x)$ est égal à $4x(10 - x)$.

3) Calculer le volume d'eau contenue dans la citerne lorsqu'elle est remplie à mi-hauteur.

4) a) Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	1	1,4	1,5	1,6	2
$V(x)=4x(10-x)$					

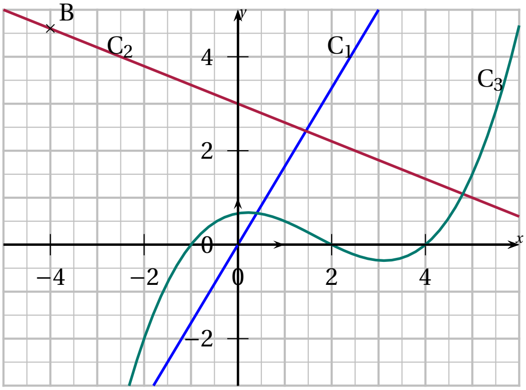
b) En déduire un encadrement à 0,1 près de la hauteur d'eau lorsque la citerne est remplie à la moitié de sa capacité.

Ex 64 ★☆ Brevet 2009

On donne ci-dessous les représentations graphiques de trois fonctions. Ces représentations sont nommées C_1, C_2 et C_3.

L'une d'entre elles est la représentation graphique d'une fonction linéaire.

Une autre est la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto -0,4x+3$.



1) Lire graphiquement les coordonnées du point B.

2) Par lecture graphique, déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe C_3 avec l'axe des abscisses.

3) Laquelle de ces représentations est celle de la fonction linéaire ? Justifier.

4) Laquelle de ces représentations est celle de la fonction f ? Justifier.

5) Quel est l'antécédent de 1 par la fonction f ? Justifier par un calcul.

6) A est le point de coordonnées $(4,6\ ;\ 1,2)$. A appartient-il à C_2 ? Justifier par un calcul.

Ex 65 ★★

1) f est une fonction affine telle que

$$f(2)=4 \quad \text{et} \quad f(3)=9.$$

Combien vaut $f(4)$?

2) Soient f une fonction linéaire et g une fonction affine telles que

$$f(2)=g(2)=4 \quad \text{et} \quad f(3)=-g(3).$$

Combien vaut $g(1)$?

Ex 66 ★★

Soit $f : x \longmapsto 2015x^{17}-2$.

On considère le nombre h (que l'on ne cherchera pas à calculer) tel que $f(h)=-2015$.

Calculer $f(-h)$.

Ex 67 ★★

Soit f une fonction telle que $f(1)=\dfrac{1}{2}$ et

$f(x+y)=f(x)f(y)$ pour tous entiers x et y.

Combien vaut $f(2)+f(0)+f(2)+f(1)$?

VIII Raisonnements

Ex 68 ☆☆★★ Triangle

Démontrer qu'un triangle (non aplati) dont les côtés sont des nombres entiers et dont le périmètre vaut 8, est isocèle.

Ex 69 ☆☆★☆ Le ballon de foot

Un ballon de football est formé de 12 pentagones réguliers et de 20 hexagones réguliers assemblés entre eux par une couture.

Leurs côtés mesurent 4,5 cm.

Trouver la longueur de la couture.

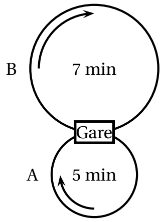
Ex 70 ☆☆★★ Trains

Deux trains, A et B, suivent des parcours circulaires et se croisent à la gare G.

Le train A fait un tour en 5 minutes.

Le train B fait un tour en 7 minutes.

Dans combien de temps les deux trains se retrouveront-ils ensemble à la gare



1) S'ils sont partis en même temps de la gare ?

2) Si le train A est parti de la gare depuis 4 minutes et le train B depuis 2 minutes ?

Ex 71 ☆☆★★ Probabilités

Trois nombres différents sont choisis au hasard parmi 2, 0, 2 et 1.

Quelle est la probabilité d'obtenir 0 comme résultat de la multiplication des trois nombres ?

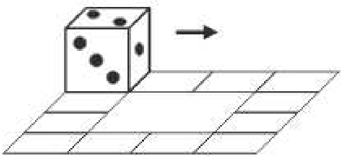
Ex 72 ☆☆★★ Probabilités

On lance deux dés (les dés sont des dés équilibrés standard à six faces marquées de 1 à 6).On calcule la somme des deux nombres obtenus.

Quelle est la probabilité que cette somme soit un nombre premier ?

Ex 73 ★☆★★ Le dé qui roule

Sur la figure ci-dessous, on dispose d'un chemin constitué de douze carreaux unités. Un dé est placé sur ce chemin et il y roule (dans le sens de parcours, la face verticale ici numérotée 1, tombe sur le premier carreau du chemin).



Combien de tours complets du chemin le dé doit-il effectuer pour se retrouver exactement dans la position initiale ?

Ex 74 ★☆★★ Mensonges

Un garçon dit toujours la vérité le jeudi et le vendredi. Il ment toujours le mardi. Et les autres jours, il ment ou dit la vérité au hasard.

Sept jours de suite, on lui demande son prénom. Voici, dans l'ordre, ses réponses des six premiers jours :

John, Bob, John, Bob, Pit, Bob.

Quelle est sa réponse le septième jour ?

Réponses

I Calcul fractionnaire

Ex 1

$A = \frac{19}{30}$ | $C = \frac{44}{45}$ | $E = -\frac{15}{14}$

$B = \frac{11}{20}$ | $D = \frac{1}{3}$ | $F = \frac{76}{195}$

Ex 2

$A = \frac{3}{140}$ | $C = \frac{1}{6}$ | $E = \frac{1}{4}$

$B = \frac{32}{35}$ | $D = \frac{1}{16}$

Ex 3

$A = \frac{17}{4}$ | $C = \frac{33}{2}$ | $E = -\frac{1}{26}$

$B = -\frac{43}{12}$ | $D = -\frac{1}{2}$

Ex 4

1) $F = -29$

2) $F = 3$

3) $F = -6$

4) $F = 0$

Ex 5

$A = \frac{29}{10}$ | $B = \frac{13}{11}$ | $C = \frac{9}{11}$

Ex 6

$\frac{5+x}{8+x} = 4$ donc $5 + x = 4(8 + x)$ soit $-27 = 3x$ et donc $x = -9$

Ex 7

1) $\spadesuit = 5$.

2) $\clubsuit = 9$.

II Puissances

Ex 8

⋆ **Série 1 :** Écrire sous la forme 3^n

$A = 3^{14}$ | $C = 3^{14}$ | $E = 3^2$ | $G = 3^2$

$B = 3^{20}$ | $D = -3^7$ | $F = 3^{29}$ | $H = 3^{-3}$

⋆ **Série 2 :** Écrire sous la forme a^n.

$A = 2^{-6}$ | $C = 2^3$ | $E = 5^{-4}$

$B = 2^{-4}$ | $D = 4^{-19}$ | $F = -7^{25}$

⋆ **Série 3 :** Écrire les nombres suivants sous la forme $2^n \times 5^m$.

$A = 2^{-6} \times 5^{-5}$ | $C = 2^{-2} \times 5^{-1}$ | $E = 2^1 \times 5^2$

$B = 2^4 \times 5^6$ | $D = 2^{10} \times 5^{-6}$ | $F = 2^{11} \times 5^{-9}$

Ex 9

Ce nombre a 28 chiffres car :
$4^{16} \times 5^{25} = 2^{32} \times 5^{25} = 2^7 \times 2^{25} \times 5^{25} = 128 \times 10^{25}$

Ex 10

La somme des chiffres est 18421

Ex 11

$4^{15} + 8^{10} = 2^{31}$.

Ex 12

1) $n = 2^2 \times 3 \times 5^3 \times 7$

2) $n = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

3) Le produit est égal
$\frac{4 \times 4^5}{3 \times 3^5} \times \frac{6 \times 6^5}{2 \times 2^5} = 4^6 = 2^{12}$
donc $n = 12$.

4) $3^{2001}+3^{2002}+3^{2003}=3^{2001}(1+3+3^2)$
$3^{2001}+3^{2002}+3^{2003}=13\times 3^{2001}$
d'où $n=13$.

5) On a $3n=n+12$ donc $n=6$.

Ex 13

⋆ **Série 1**

$A=a^4b^{-4}$ | $C=a^8b^2$
$B=a^{-4}b^4$ | $D=a^{-5}b^{-8}$

⋆ **Série 2**

$A=a^{-1}b^3$ | $C=a^{19}b^{28}$
$B=a^1b^5$ | $D=a^{-2}b^{-14}$

III Entiers

Ex 14

1) La somme des chiffres manquants est 3 ou 12.
50832, 51822, 52812, 53802 et 53892, 54882, 55872, 56862, 57852, 58842, 59832.

2) Le chiffre des unités est pair et la somme des chiffres manquants est 1 ou 10.
3150 et 3852, 3654, 3456, 3258.

3) Le chiffre des unités est 0 ou 5 et la somme des chiffres manquants est 2 ou 11.
342 450 et 346 455.

4) Divisible par 15 signifie divisible par 3 et par 5 donc le chiffre des unités est 0 ou 5 et la somme des chiffres manquants est 2, 5, 8, 11, 14 ou 17.
1230, 1530, 1830 et 1035, 1335, 1635, 1935.

5) 123453, 423456 et 723459.

Ex 15

1) $4\,116=2^2\times3\times7^3$ et $2\,156=2^2\times7^2\times11$.

2) $\text{pgcd}(4116;2156)=2^2\times7^2=196$
et $\text{ppcm}(4116;2156)=2^2\times3\times7^3\times11=45\,276$.

3) $4\,116=2^2\times3\times7^3$ a $3\times2\times4=24$ diviseurs et $2\,156=2^2\times7^2\times11$ a $3\times3\times2=18$ diviseurs.

Ex 16

$$A=\frac{2\times3\times5\times7\times11\times31}{2\times3^3\times5\times7\times11}=\frac{31}{9}$$
$$B=\frac{2\times3^2\times5^2\times7^2\times17}{2\times5^2\times7^2\times11\times13}=\frac{153}{143}$$
$$C=\frac{5\times17\times31}{2\times7^2\times13}=\frac{2\,635}{1\,274}$$
$$D=\frac{3^2\times5\times7^3\times11\times29}{2^2\times5\times7^3\times11\times13}=\frac{261}{52}$$

Ex 17

On a,
$$\begin{aligned}111111&=111\times1001=3\times37\times11\times91\\&=3\times37\times11\times7\times13\\&=3\times7\times11\times13\times37\end{aligned}$$

Ex 18

A se termine par 2 zéros

B se termine par 24 zéros

C se termine par 224 zéros

Ex 19

On obtient 695.

Ex 20

1) Pour obtenir 39 il faut entrer 129, 133 ou 137.

2) Pour obtenir 24 il faut entrer 71, 79, 87, 95, 103, 111 et 119.

IV Calcul littéral

Ex 21

⋆ **Série 1**

$A=a^2+3a$ | $D=a^3+a$ | $G=7b^3-6b^2$
$B=x^3+4x$ | $E=3a^2+6a$ | $H=5x^3+2x^2$
$C=a^3+a^2$ | $F=3b^3+5b^2$ | $I=a^3+2a^2$

⋆ **Série 2**

$A=2x^3+x^4$ | $D=3a^3-9a^4$
$B=3x^4-15x^2$ | $E=40x^3-45x^2$
$C=21a^6+14a^4$ | $F=15x^3-9x^2$

⋆ **Série 3**

$A = 2x^3y^2 + 2x^2y$

$B = 6a^3b^2 - 12a^3b^3$

$C = 5y^5 - 10x^2y^3 + 5y^2$

$D = 12a^4b - 8a^3b^2 - 4ab$

$E = 6x^4y + 2x^4$

$F = 2a^3b^2 - 3ab^2$

Ex 22

★ **Série 1**

$A = 21t^2 - 26t + 8$

$B = 8s^2 + 18s - 5$

$C = 6x^2 + 7x - 5$

$D = 14y^2 - 13y + 3$

$E = 2x^2 + 5xy - 3y^2$

$F = 12x^2 - 19xy + 5y^2$

★ **Série 2**

$A = 6x^4 - 7x^2 - 5$

$B = 2a^4b^2 + 5a^3b - 3a^2$

$C = 5a^2b^2 - 22ab^2 + 8b^2$

$D = -16y^2x + 15y^4 - 15x^2$

$E = -23x^3 + 10x^4 + 12x^2$

$F = 2x^3 + 8x^2y^2 + 5xy + 20y^3$

★ **Série 3**

$A = -21b^3 + 6a^3b^2 + 49ab - 14a^4$

$B = -75a^2b^2c^2 + 90a^2b^2c - 24a^2b^2$

$C = 15a^2b^4 - 11a^3b^3 - 12a^4b^2$

$D = -14a^2b^6 + 11a^4b^4 - 2a^6b^2$

Ex 23

★ **Série 1**

$A = 49x^2 - 28xy + 4y^2$

$B = 16a^2 - 16ab + 4b^2$

$C = 9a^2 + 12ab + 4b^2$

$D = 49x^2 - 138xy + 144y^2$

$E = 4b^2 - 28bc + 49c^2$

$F = 9x^2 - 49y^2$

★ **Série 2**

$A = 9a^2 - 12ab + 4b^2$

$B = 4 - 8b + 4b^2$

$C = 36a^2 + 12ab + b^2$

$D = 9x^2 - z^2$

$E = 16a^2 - 56a + 49$

$F = 100a^2 - 140ab + 49b^2$

★ **Série 3**

$A = 4a^2 - 4ab^2 + b^4$

$B = 4a^4 + 4a^2b + b^2$

$C = 9x^4 - y^2$

$D = 9a^4 - 12a^2b^3 + 4b^6$

$E = x^6 - y^6$

$F = 9x^4 - 2x^3 + \frac{1}{9}x^2$

Ex 24

★ **Série 1**

$A = x^4 - 2a^2x^2 + a^4$

$B = 16a^4 - 1$

$C = x^4 - 1$

$D = x^8 - 256$

$E = x^8 - 9x^4 + 8$

$F = 16a^8 + 8a^4 - 3$

★ **Série 2**

$A = -x^4 + x^2 - 2x + 1$

$B = -x^4 - 3x^2 - 4$

$C = x^2 - y^2 + 2y - 1$

$D = b^4 + a^2b^2 + a^4$

Ex 25

$a^2 = \dfrac{z^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{z^2} + 2$ de même :

$b^2 = \dfrac{z^2}{x^2} + \dfrac{x^2}{z^2} + 2$ et $c^2 = \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} + 2$

$abc = \dfrac{z^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{z^2} + \dfrac{z^2}{x^2} + \dfrac{x^2}{z^2} + \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} + 2$

Donc $a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4$

Ex 26

1) On a $1^2 = (X+Y)^2 = X^2 + Y^2 + 2XY = 2 + 2XY$. $XY = -\dfrac{1}{2}$.

2) $\dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{Y} = \dfrac{X+Y}{XY} = \dfrac{1}{\frac{-1}{2}} = -2$?

3) $X^3 + Y^3 = (X+Y)(X^2 - XY + Y^2) = 1 \times (2 + \frac{1}{2}) = \dfrac{5}{2}$

4) $2^2 = (X^2 + Y^2)^2 = X^4 + Y^4 + 2X^2Y^2 = X^4 + Y^4 + 2 \times (\frac{1}{2})^2$

$X^4 + Y^4 = 4 - \frac{1}{2} = \dfrac{7}{2}$

Ex 27

$A = (x-2)(x+6)$

$B = x(3x-16)$

$C = (x+5)(2x-3)$

$D = (2x-1)^2(11x-3)$

$E = x^2(4x-2)$

$F = (x-3)(-x-2)$

$G = (2x-3)(-3x-3)$

$H = -(2x+5)^2$

$I = (x-5)(x+21)$

Ex 28

★ **Série 1 :**

$A = (x+5)^2$

$B = (4-5x)(4+5x)$

$C = (1-6x)^2$

$D = (x+6)(x+8)$

$E = (4x-1)$

$F = (5-2x)(11+2x)$

$G = (3x+2)(3x-4)$

$H = (2x-5)^2$

★ **Série 2 :**

$A = (x+5)(3x-5)$

$B = \frac{1}{4}(x+2)^2$

$C = (2x+9)^2$

$D = 9(x+3)(x-1)$

$E = (3x+2)(2x+4)$

$F = \left(\frac{1}{3}-2x\right)(1+2x)$

⋆ **Série 3 :**

$A = (x-3)(3x+8)$

$B = (4x-1)(9x+1)$

$C = (x-5)(x+6)$

$D = (2x+1)(7x-2)$

Ex 29

⋆ **Série 1 :**

$A = (a+b)(x+y)$

$B = (b+c)(a+d)$

$C = (d+c)(a-b)$

$D = (7y-1)(3x-4)$

$E = (c+3d)(a-2b)$

$F = (5a-b)(x-y)$

⋆ **Série 2 :**

$A = (x+4)(x^2+1)$

$B = (3x-1)(x^2+2)$

$C = (5x+1)(x^2+1)$

$D = (2x+1)(9x^2+1)$

$E = (x+1)(x^2+1)$

$F = (x+1)(x^4+1)$

Ex 30

Sur les quatre sommets de la base, les nombres sont abc, abe, acd, ade.

Les autres sommets sont fbc, fbe, fcd, fde.
La somme des nombres placés aux sommets du cube est :

$$\begin{aligned}
S &= abc+abe+acd+ade+fbc+fbe+fcd+fde\\
&= a(bc+be+cd+de)+f(bc+be+cd+de)\\
&= (a+f)(bc+be+cd+de)\\
&= (a+f)(b(c+e)+d(c+e))\\
&= (a+f)(b+d)(c+e) = 105
\end{aligned}$$

$S = 3\times 5\times 7$

Les nombres sont des entiers naturels non nul donc aucune somme n'est égale à 1 et donc :

$$(a+f)+(b+d)+(c+e) = 5+3+7 = 15$$

Ex 31

1) $A = 24\ 999\ 999 = 25\ 000\ 000 - 1$
$A = (5000-1)(5000+1) = 4999\times 5001$
$A = 4999\times 3\times 1667.$
Reste à montrer que 4999 et 1667 sont premiers.

2) $B = 1\ 018\ 081 = 10^6+18\times 10^3+81 = (10^3+9)^2$
Reste à montrer que 1009 est premier.

V Équations, inéquation

Ex 32

1) $x = \dfrac{3}{2}$

2) $x = \dfrac{1}{2}$

3) $x = 0$

4) $x = -\dfrac{1}{2}$

5) $x = -\dfrac{7}{2}$

6) $x = 2$

Ex 33

1) $x = -5$

2) $x = -18$

3) $x = -1$

4) $x = -\dfrac{1}{4}$

5) $x = \dfrac{3}{2}$

6) $x = \dfrac{4}{3}$

7) $x = -\dfrac{4}{3}$

8) $x = -1$

Ex 34

1) $\dfrac{(b_1+b_2)h}{2} = A$ donc $\dfrac{(b_1+15)\times 4{,}5}{2} = 85{,}5$ donc $b_1 = 23$

2) $p = 2(L+\ell)$ donc $240 = 2(2\ell+26)$ soit $\ell = 47$

3) Pythagore $6^2+\left(\dfrac{c}{2}\right)^2 = c^2$ donc $c^2 = 48$ donc $c = 4\sqrt{3}$

4) x la longueur. $15x = 21(x-14)$ donc $x = 49$

5) x longueur de la petite diagonale.
Aire du losange $\dfrac{(7+x)x}{2}$.
Aire du nouveau losange $\dfrac{(x-2)(x+5)}{2}$.
Équation : $\dfrac{(x-2)(x+5)}{2} = \dfrac{(7+x)x}{2} - 82$
D'où $x = \dfrac{77}{2}$

Ex 35

1) x l'âge du fils , le père a $4x$. Dans 20 ans, le fils aura $x+20$ et le père $4x+20$.
Équation $4x+20 = 2(x+20)$ soit $x = 10$

2) x l'âge de Joe. Bob a $2x$. Il y a 10 ans, Joe avait $x-10$ et Bob $2x-10$.
Équation $2x-10 = 4(x-10)$ soit $x = 15$

3) x l'âge du fils (actuel), le père a $x+25$. Dans 14 ans, le fils aura $x+14$ et et père $x+39$.
Équation $x+14 = \dfrac{3}{4}(x+39)$ soit $x = 61$.

Ex 36

1) $A = 15x^2 + 23x - 28$.

2) $A = (3x+7)(5x-4)$.

3) $x = -\dfrac{7}{3}$ ou $x = \dfrac{4}{5}$.

Ex 37

1) $E = 8x^2 + 14x + 3$.

2) $E = (4x+1)(2x+3)$.

3) $x = -\dfrac{1}{4}$ ou $x = -\dfrac{3}{2}$.

Ex 38

On pose x la hauteur cherchée en cm.
On a un triangle rectangle donc (par Pythagore) :
$x^2 + 30^2 = (100 - x)^2$ soit
$x^2 + 900 = 10000 - 200x + x^2$ donc $200x = 9100$ donc $x = 45{,}5$ cm.

Ex 39

Le lièvre, allant 5 fois plus vite que la tortue, a parcouru 25 km tandis qu'elle en parcourait 5.
Soit x la distance cherchée en km.
x est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un côté de l'angle droit est 5 et l'autre $25 - x$;
donc $x^2 = 52 + (25–x)^2$.
D'où $50x = 52 + 252$, soit $2x = 1 + 25$,
donc $x = 13$.

Ex 40

Appelons x la longueur, en mètres, de l'arrière d'un chariot (partie qui dépasse d'un chariot rangé dans un autre) et y celle de l'avant (partie encastrée dans le chariot précédent).
On a : $10x + y = 2{,}9$ et $20x + y = 4{,}9$.
Donc : $10x = 2$ soit $x = 0{,}2$ et $y = 0{,}9$.
La longueur d'un chariot est $x + y$, soit $1{,}1$ m.

Ex 41

⋆ **Série 1 :**

1) pas de solution

2) $x = -3$ ou $x = 3$

3) $x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$

4) $x = 0$

⋆ **Série 2 :**

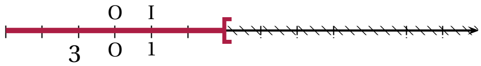
1) $x = -4$ ou $x = 10$

2) $x = -6$ ou $x = -1$

3) $x = -5$ ou $x = 5$

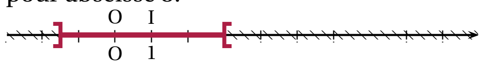
Ex 42

1) $3 > x$.



2) $x > -\dfrac{3}{2}$.

3) Segment]AB[où A a pour abscisse $-\dfrac{3}{2}$ et B a pour abscisse 3.



Ex 43

Si x est le nombre de chaise à 35 € alors :
$x < 150 - x$ soit $x > 75$
et $35x + 60(150 - x) > 7000$ soit $80 > x$.
Conclusion x vaut 76, 77, 78 ou 79.

VI Géométrie

Ex 44

1) $AH = 6{,}4$ cm et $\mathscr{A}(ABC) = 30{,}72$ cm^2.

2) $CK = \dfrac{\mathscr{A}(ABC)}{4} = 7{,}68$ cm et $BK = 5{,}76$ cm.

Ex 45

1) On a $BC^2 = AB^2 + AC^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en A.

2) $\mathscr{A}(ABC) = 11{,}76$ cm^2.

3) On sait que si R est le rayon du cercle circonscrit à un triangle dont les côtés ont pour longueurs a, b, c données en cm, l'aire de ce triangle est égale à $\dfrac{abc}{4R}$.

a) $\mathscr{A}(ABC) = \dfrac{abc}{4R}$
donc $R = \dfrac{abc}{4\mathscr{A}(ABC)} = 3{,}5$ cm

b) Oui car le centre du cercle circonscrit d'un triangle rectangle est le milieu de l'hypoténuse.

Ex 46

1) Comme U appartient au cercle de diamètre [ST] alors le triangle STU est rectangle en U.

2) Dans le triangle STU rectangle en U, on a :
$\sin\widehat{STU} = \frac{SU}{ST} = \frac{3}{7}$ donc $\widehat{STU} \approx 25°$

3) Dans le cercle de diamètre [ST], $\widehat{STU}$ est un angle inscrit et $\widehat{SOU}$ son angle au centre associé donc $\widehat{STU} = \frac{1}{2}\widehat{SOU}$ et on obtient $\widehat{SOU} \approx 50°$.

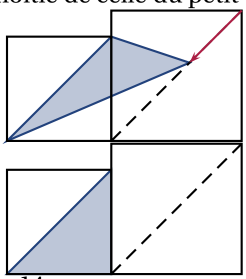
Ex 47

1) $\mathscr{A} = 240$

2) $OA = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ et $\mathscr{A} = 72\pi - 36\sqrt{2}$

Ex 48

L'aire d'un triangle ne change pas quand on déplace un sommet parallèlement au côté opposé. En déplaçant le sommet du grand carré sur sa diagonale, on obtient un triangle dont l'aire est la moitié de celle du petit carré.



Soit $\mathscr{A} = \dfrac{14 \times 14}{2} = 98$.

Ex 49

1) $AD = \dfrac{15}{\sin(65°)}$, $AC = \dfrac{15}{\cos(15°)}$,
$BC = 15\tan(15°)$ et $BD = 15\tan(25°)$.
Donc $p \approx 35{,}05$

2) $AD = \dfrac{10}{\sin(60°)}$, $AC = \dfrac{10}{\cos(10°)}$,
$BC = 10\tan(10°)$ et $BD = 10\tan(20°)$.
Donc $p \approx 23{,}58$

Ex 50

1) $d = 70cm$

2) $d = 50(\cos(65°) + \sin(65°)) \approx 66{,}44$ cm.

Ex 51

On obtient $\varphi \approx 16°$

Ex 52

On trace la figure symétrique pour avoir un rectangle, aire du rectangle=ab

Diamètre du grand cercle $\mathscr{C}_1$: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Pythagore).

Diamètre de $\mathscr{C}_2$: a; diamètre de $\mathscr{C}_3$: c.

Donc aire grisée=$\pi a^2 + \pi b^2 - \pi c^2 + ab = ab$

Ex 53

Si R est le rayon du grand cercle et r celui du petit. D'après Pythagore, on a $R^2 - r^2 = 12^2$.

Donc $\mathscr{A} = 144\pi$ cm^2.

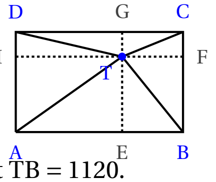
Ex 54

ACE est isocèle en C, CDB est isocèle en D et les deux triangles sont semblables.

Avec un peu de Pythagore et de trigonométrie on trouve $ED = \sqrt{21}$

Ex 55

Supposons que le terrain où se trouve le trésor soit représenté par le rectangle ABCD. Le trésor T est placé à un endroit où (par exemple)



$TA = 1260$, $TC = 320$ et $TB = 1120$.

Il faut calculer la dernière distance TD.

On trace la parallèle à (AB) passant par T et la parallèle à (AD) passant par T. On construit ainsi les points E, F, G et H sur les quatre côtés du rectangle ABCD.

On note $x = TF$, $y = TH$, $z = TG$ et $t = TE$.

Par Pythagore : $\begin{cases} 1120^2 = TB^2 = x^2 + t^2 \\ 1260^2 = TA^2 = y^2 + t^2 \\ 320^2 = TC^2 = x^2 + z^2 \end{cases}$ donc

$TD^2 = y^2 + z^2 = 1260^2 + 320^2 - 1120^2 = 660^2$

Ex 56

$\dfrac{2}{6} = \dfrac{x}{x + 10}$ (Thalès) d'où l'ombre $x = 5$ m.

Ex 57

1) Par Thalès $CH = 40$ donc $FH = 16$.
$AH = 30$ (Pythagore) et $DF = 18$ (Thalès).
$CB = \dfrac{125}{3}$ (Thalès) et $HB = \dfrac{35}{3}$ (Pythagore) .

2) $CF = 8$(Pythagore) , $CH = 12$ (Thalès)
donc $FH = 4$.
$HB = 5$ (Pythagore) , $FE = \dfrac{10}{3}$ et $CE = \dfrac{26}{3}$ (Thalès).

3) $CA = 5$ (Pythagore) , $DF = \dfrac{6}{5}$ et $CF = \dfrac{8}{5}$ (Thalès) donc $FH = \dfrac{12}{5}$.

Ex 58

1) Par Thalès $DE = 9$ et $BF = 8$

2) Par Thalès $\dfrac{FE}{FB} = \dfrac{3}{4} = \dfrac{DE}{BC} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{x}{x+5}$
donc $3(x + 5) = 4x$ soit $x = AD = 15$.

3) Par Thalès $\frac{DE}{BC} = \frac{4}{6} = \frac{AE}{AC} = \frac{x}{x+5}$ donc $4(x+5) = 6x$ soit $x = AE = 10$.

Ex 59

1) (AJ) et (VI) ne sont pas parallèles.

2) (LK) et (ZH) ne sont pas parallèles.

3) (OX) et (VS) sont parallèles.

4) (AK) et (BG) sont parallèles.

Ex 60

L'aire est multipliée par 16.

VII Fonctions

Ex 61

1) On obtient successivement : $4 \to 4+1=5 \to 5^2 = 25 \to 25-4^2 = 25-16 = 9$.

2) On note x le nombre choisi. On obtient successivement :
$x \to x+1 \to (x+1)^2 \to (x+1)^2 - x^2$.
Et $(x+1)^2 - x^2 = x^2+2x+1-x^2 = 2x+1$.

3) Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x+1$.

a) L'image de 0 par f est $f(0) = 2\times 0+1 = 1$.

b) On a $f(x) = 2x+1 = 5$ ou $2x = 4$ ou $x = 2$. L'antécédent de 5 par f est 2.

Ex 62

1) T est un point du cercle de diamètre [RM] donc RMT est un triangle rectangle.

2) (Pythagore) $TM^2 = RM^2 - RT^2 = 100-36 = 64$
Donc $TM = 8$.

3) (Thalès) $RH = \frac{5}{3}x$ et $SH = \frac{4}{3}x$.

4) Le périmètre du triangle RSH est $4x$.

5) Le périmètre du trapèze STMH est $24 - \frac{4}{3}x$.

6) a) $f(0) = 0$, $f(6) = 24$,
$g(0) = 24$ et $g(6) = 16$.

b)
$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 4x &= 24 - \frac{4}{3}x \\ 4x + \frac{4}{3}x &= 24 \\ \frac{16}{3}x &= 24 \\ x &= 24 \times \frac{3}{16} \\ x &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Ex 63

⋆ **Partie A :** On pose $AM = x$.

1) a) x peut varier entre 0 et $AC = 5$.
$CM = 5-x$.

b) (Thalès) $\frac{CM}{CA} = \frac{MN}{AB}$

donc $MN = \frac{CM}{CA} \times AB = \frac{5-x}{5} \times 4 = 4 - 0,8x$.

2) $\mathscr{A}(x) = AM \times \frac{MN+AB}{2} = x \times \frac{8-0,8x}{2} = x(4-0,4x)$ du trapèze ABNM.

⋆ **Partie B :**

1) Le volume de la citerne est 100 m^3.

2) $\mathscr{V}(x) = BE \times \mathscr{A}(x) = 4x(10-x)$.

3) Si $x = 2,5$ alors $\mathscr{V}(2,5) = 75$ m^3.

4) a) Tableau de valeurs :

x	1	1,4	1,5	1,6	2
$\mathscr{V}(x)$	35	48,16	51	53,76	64

b) La citerne est remplie à la moitié de sa capacité lorsque $1,4 < x < 1,5$.

Ex 64

1) On lit $B(-4\ ;\ 4,6)$

2) La courbe C_3 coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisse 2 et 4.

3) C_1 est la représentation d'une fonction linéaire : c'est une droite contenant l'origine.

4) La fonction f est une fonction affine : sa représentation est une droite passant par le point de coordonnées $(0\ ;\ 3)$.

5) Il faut trouver x tel que :
$-0,4x+3 = 1$ d'où $3-1 = 0,4x$, puis $2 = 0,4x$ et $\frac{2}{0,4} = x = 5$.
Le seul antécédent de 1 par f est 5.

6) $A(4,6\ ;\ 1,2)$ appartient-il à C_2 ?
$-0,4\times 4,6+3 = -1,84+3 = 1,16$
or $1,2 \neq 1,16$ donc A n'appartient pas à C_2.

Ex 65

1) f est du type $f(x) = mx + p$ donc
$f(2) = 2m + p = 4$ et $f(3) = 3m + p = 9$
on en déduit que $m = 5$ puis que $p = -6$.
$f(4) = 4 \times 5 - 6 = 14$.

2) f est linéaire et $f(2) = 4$ donc $f(x) = 2x$.
En particulier $f(3) = 6$. Alors : $g(3) = -6$.
On peut ainsi trouver que $g(x) = -10x + 24$ donc $g(1) = 14$.

Ex 66

Comme $(-h)^{17} = -h^{17}$ on a $f(h) + f(-h) = -4$ donc $f(-h) = -4 - f(h) = -4 + 2015 = 2011$.

Ex 67

$f(2) = f(1+1) = f(1)f(1) = \dfrac{1}{4}$.
$f(1) = f(1+0) = f(1)f(0)$ donc $f(0) = 1$.
$f(2) + f(0) + f(2) + f(1) = \dfrac{1}{4} + 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} = 2$

VIII Raisonnements

Ex 68

Il y a 5 décompositions de 8 en somme de 3 nombres :

$$6+1+1;\quad 5+2+1;\quad 4+3+1;$$
$$4+2+2;\quad 3+3+2.$$

Les deux premières ne conviennent pas (un côté du triangle ne peut dépasser la somme de deux autres).

Les deux suivantes donnent des triangles aplatis $(4 = 3 + 1 = 2 + 2)$.

Il n'y a donc qu'1 triangle non aplati à côtés entiers dont le périmètre est 8 : celui de côtés 3, 3 et 2.

Ex 69

$\ell = \dfrac{12 \times 5 + 20 \times 6}{2} \times 4,5 = 405$ cm.

Ex 70

1) Dans 35 min. **2)** Dans 26 min.

Ex 71

Choisir 3 nombres parmi 4, c'est aussi en choisir 1 parmi 4 (celui qui n'est pas pris) : il y a donc 4 choix possibles. Obtenir 0 comme produit des 3 nombres choisis, c'est avoir choisi 0 parmi les 3 nombres, ou encore de n'avoir pas choisi 2, 2 ou 1 ; soit 3 possibilités.

La probabilité cherchée est donc $p = \dfrac{3}{4}$.

Ex 72

Comme somme des valeurs des deux dés, on peut trouver les nombres premiers 2, 3, 5, 7 et 11.

- 2 s'obtient d'1 seule façon : $1+1$.
- 3 s'obtient de 2 façons : $1+2$ et $2+1$.
- 5 s'obtient de 4 façons : $1+4$, $2+3$, $3+2$ et $4+1$.
- 7 s'obtient de 6 façons : $1+6$, $2+5$, $3+4$, $4+3$, $5+2$ et $6+1$.
- 11 s'obtient de 2 façons : $5+6$ et $6+5$.

Cela fait, au total, $1+2+4+6+2 = 15$ lancers parmi les 36 lancers possibles des deux dés.

La probabilité cherchée est donc $= \dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}$.

Ex 73

Il faudra 3 tours pour que le dé retrouve sa position initiale

Ex 74

Comme le garçon dit la vérité deux jours de suite, il n'y a que deux possibilités :

soit le premier jour était un vendredi et il s'appelle John, soit le dernier jour était un jeudi et il s'appelle Bob.

Dans ce dernier cas, le mardi, il aurait dit « Bob » c'est-à-dire la vérité ; or il ment ce jour-là.

Il s'appelle donc John et le premier jour est un vendredi. Le septième jour est donc un jeudi et il dit la vérité : John.